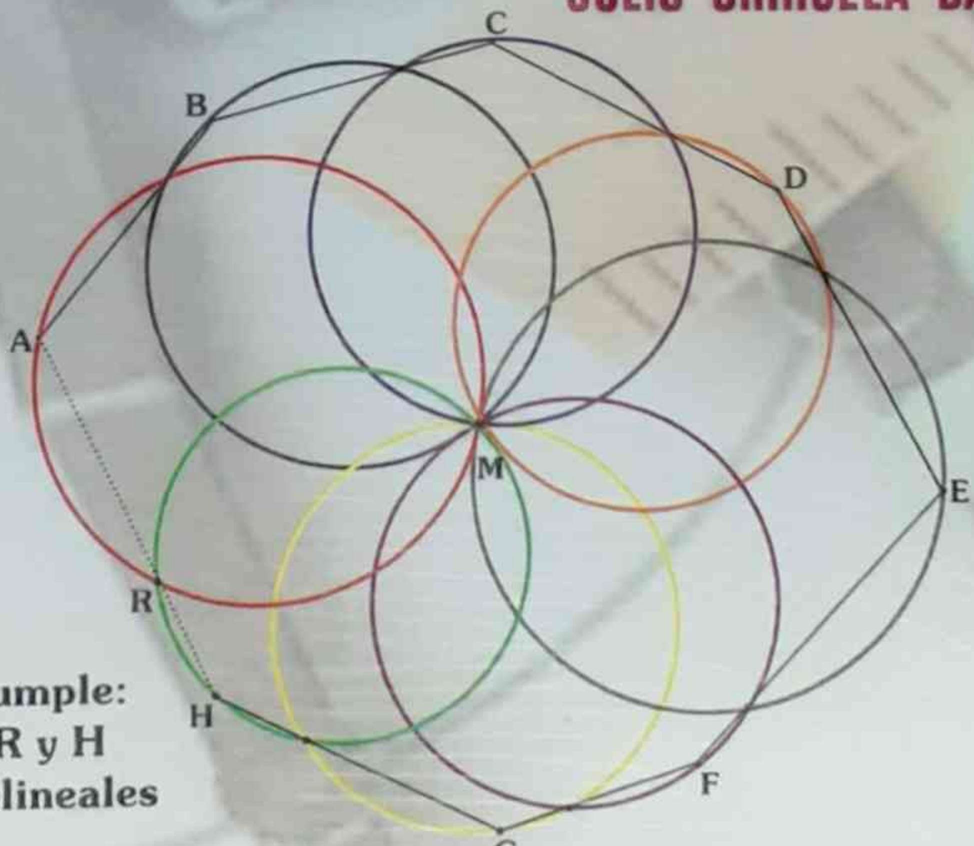
GEOMETRÍA

6 CIRCUNFERENCIA

TEORÍA - DEMOSTRACIONES
TRAZOS AUXILIARES

600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



Se cumple:
A , R y H
son colineales

Editorial
CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

GEOMETRÍA

CIRCUNFERENCIA

TEORÍA - DEMOSTRACIONES

300 Problemas Resueltos
300 Problemas Propuestos

JULIO ORIHUELA BASTIDAS

Editorial
CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

Índice

Pág.

Índice

CIRCUNFERENCIA

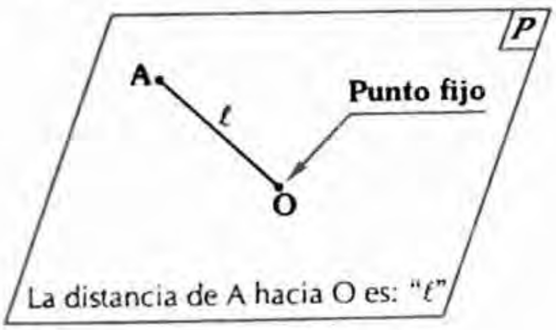
GEOMETRÍA

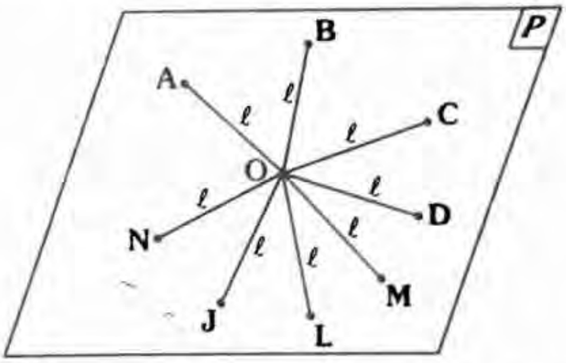
El universo es una esfera infinita cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna.

Jorge Luis Borges

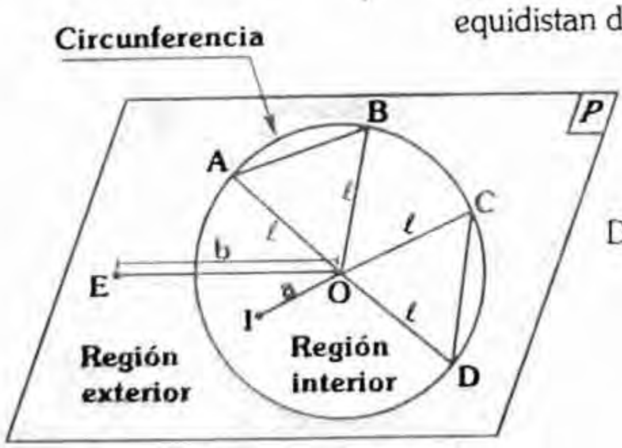
DEFINICIÓN

Es el conjunto de todos los puntos de un plano, que tienen igual distancia (equidistan) respecto de un punto fijo en dicho plano. La distancia constante se llama **radio** y el punto fijo se denomina **centro**.





Los puntos A, B,C, D, M, L, J y N del plano P, equidistan de O. (O *en el plano* P)



Del gráfico, tenemos:

$a<\ell$ y $b<\ell$

La unión de todos los puntos del plano que tienen la misma distancia " ℓ " hacia el punto "O" se llama circunferencia.

O: centro y ℓ : radio

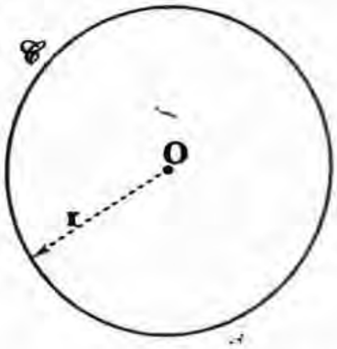
Notemos que los triángulos AOB y COD son isósceles.

Observación

- *La unión de todos los puntos del plano* P, *cuya distancia es menor que " ℓ " definen la región interior* $(OI < \ell)$.
- *La unión de todos los puntos del plano* P, *cuya distancia es mayor que " ℓ " definen la región exterior* $(OE > \ell)$.
- *Lo más "simple" que podemos aprovechar es la definición. Las "distancias iguales", es decir los triángulos isósceles como:* ΔAOB, ΔCOD,...

Notación

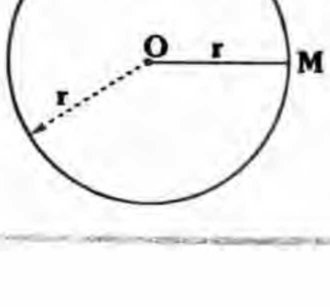
Aunque no hay una notación general para nombrar circunferencia usualmente remarcaremos el centro y el radio lo representamos con un flecha.



En el gráfico, se muestra la circunferencia $\mathscr{C}$, de centro O y radio **r**.

Observación

- *Con respecto al radio, vamos a considerar dos acepciones: como longitud o como segmento comprendido entre el centro y un punto de la circunferencia.*

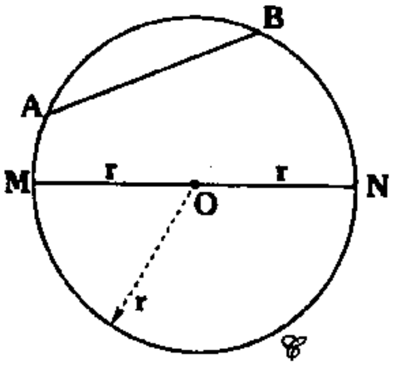


Radio: " $\overline{OM}$ " ó "r"

ELEMENTOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

❶ CUERDA

Es aquel segmento cuyos extremos están en la circunferencia.

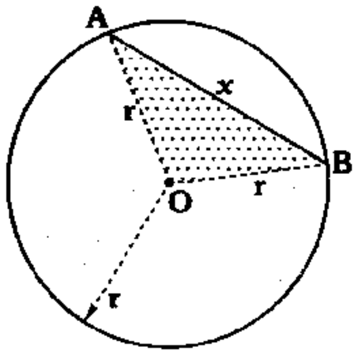


- $A \in \mathscr{C}$ y $B \in \mathscr{C}$ entonces $\overline{AB}$ es cuerda.
- $\overline{MN}$ es también cuerda, se le llama "diámetro" o "cuerda máxima".
- Se cumple:

$$MN = 2r$$

Observación

Si una cuerda no pasa por el centro, entonces su longitud es menor que dos veces el radio.



Prueba

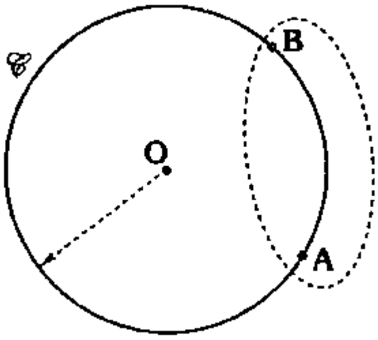
En ΔAOB , por existencia :

$$x < r + r$$

$$\Rightarrow \quad AB < 2r$$

❷ ARCO

Es parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.

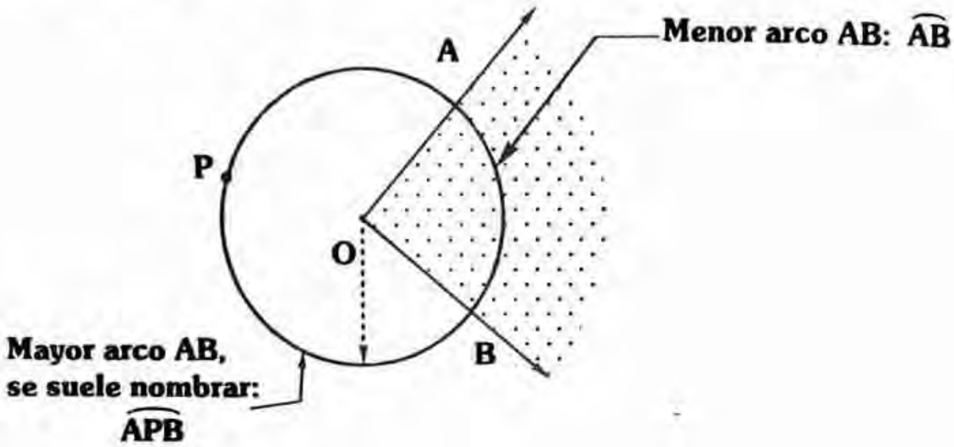


- En el gráfico, A y B están en $\mathscr{C}$

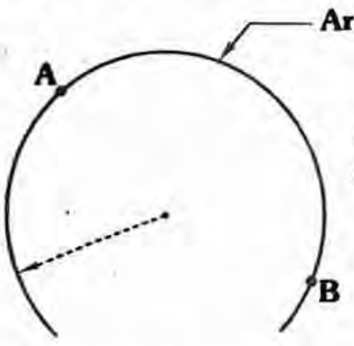
$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AB}$, se denomina arco AB

Observaciones

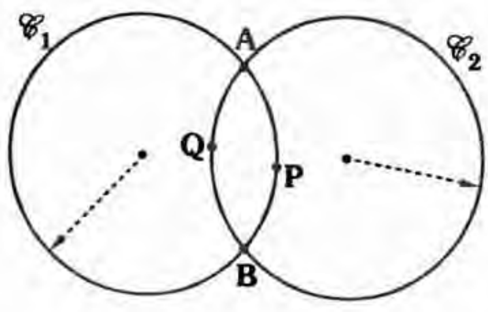
- *Si A y B no son colineales con el centro O de la circunferencia $\mathscr{C}$, entonces se llama* **arco menor** *de la misma, a la unión de A, B y todos los puntos de la circunferencia que están en el interior del ángulo AOB. Se llama* **arco mayor** *de la circunferencia a la unión de A, B y todos los puntos de la circunferencia a la unión de A, B y todos los puntos de la circunferencia que están en el exterior del ángulo AOB.*



- *Cuando está perfectamente aclarado si es el arco mayor o el menor cuyos extremos son A y B, se indica con los símbolos más sencillos:* $\overset{\frown}{AB}$ o $\overset{\frown}{BA}$.



- *Aquí no está claro quien es el arco:* AB

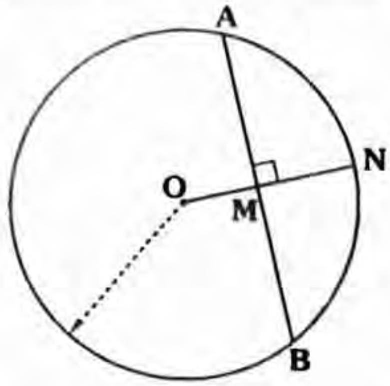


Por lo que se hace necesario ubicar un punto más: $\overset{\frown}{APB}$ está en $\mathscr{C}_1$

$\overset{\frown}{AQB}$ está en $\mathscr{C}_2$

❸ FLECHA O SAGITA

Al trazar una cuerda perpendicular al radio en una circunferencia se determina en el radio un segmento entre el arco menor y la cuerda, denominando flecha o sagita.



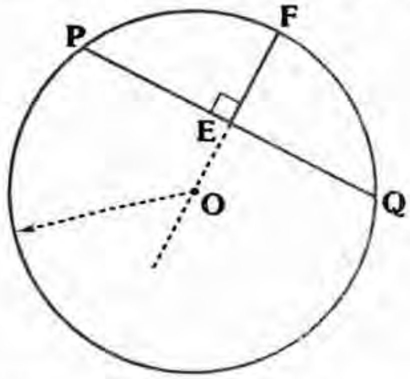
- $\overline{AB}$ no es diámetro y $\overline{AB} \perp \overline{ON}$
- $\overline{MN}$: Flecha asociada a $\overline{AB}$

Nota:

Se cumple: AM=MB

Observación

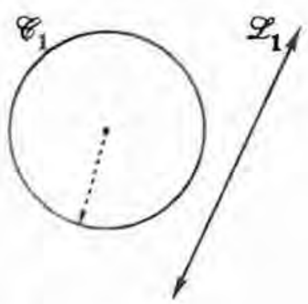
Si $\overline{EF}$ *es flecha respecto de* $\overline{EF} \Rightarrow \overline{PQ} \perp \overline{EF}$



Al prolongarse $\overline{FE}$ *llegará al centro* O.

❹ POSICIONES RELATIVAS EN UN PLANO ENTRE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA

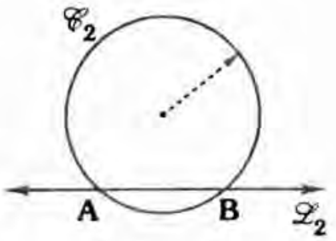
Recta exterior



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \cap \mathscr{C}_1 = \phi$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ es una recta exterior respecto de $\mathscr{C}_1$

Recta secante

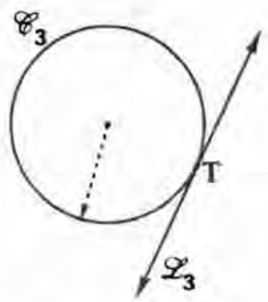


$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \cap \mathscr{C}_2 = \{A, B\}$

$(\overline{AB}$: cuerda de $\mathscr{C}_2)$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ es recta secante respecto de $\mathscr{C}_2$

Recta tangente



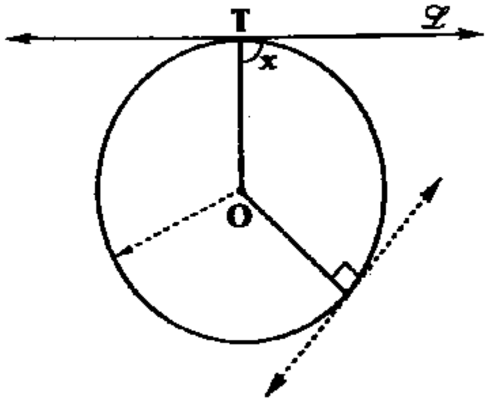
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \cap \mathscr{C}_3 = \{T\}$

(T: Punto de tangencia)

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ es recta tangente

TEOREMA

La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.



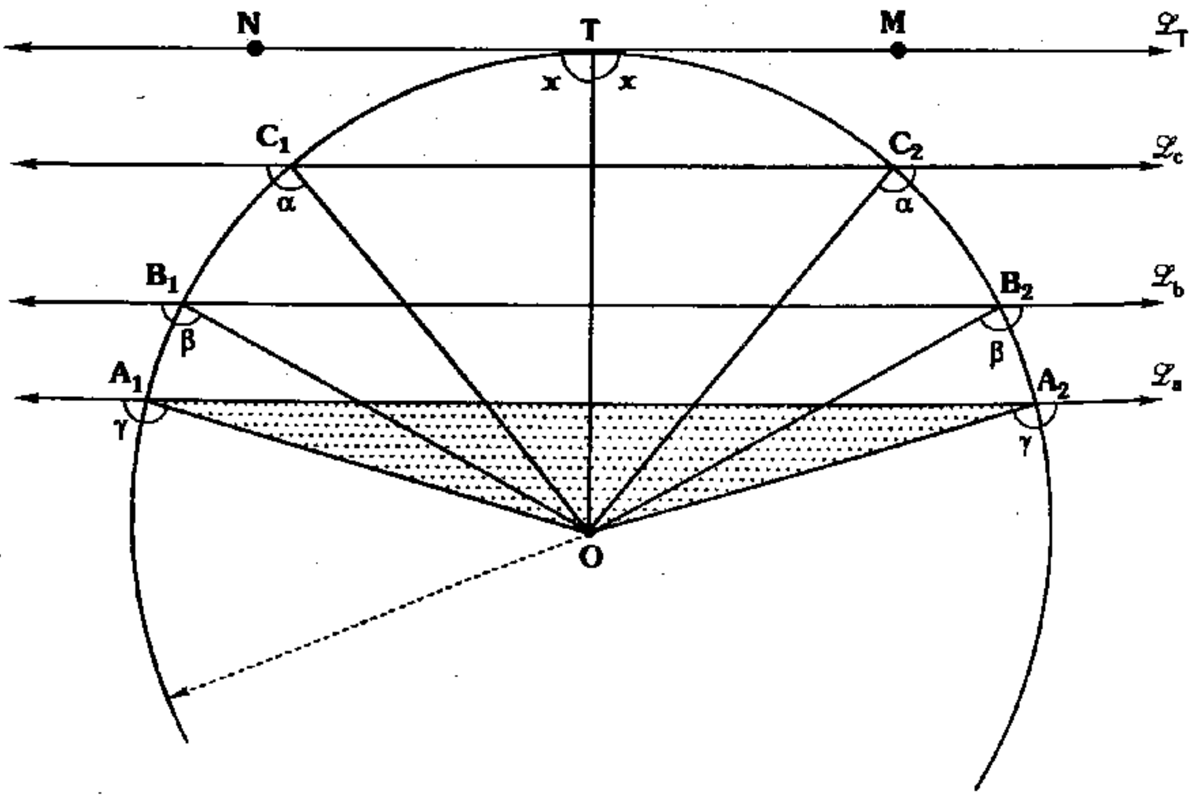
T: es punto de tangencia

Se cumple:

$$\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \text{ ó } x = 90°$$

[illegible]

Analicemos primero el comportamiento de la recta secante.



Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_a}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_b}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_c}$ rectas secantes entonces los triángulos A_1OA_2, B_1OB_2 y C_1OC_2 son isósceles entonces sus respectivos ángulos externos son de igual medida.

- En el caso límite de la secante, es como que en T hubiesen dos puntos, entonces:

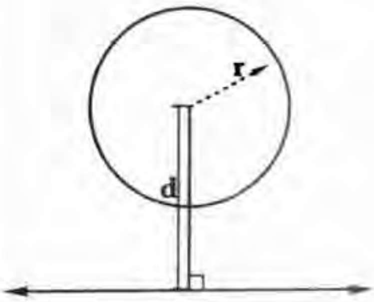
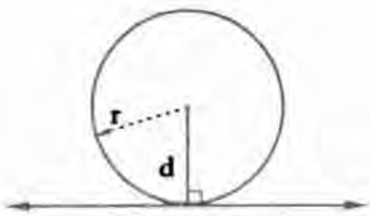
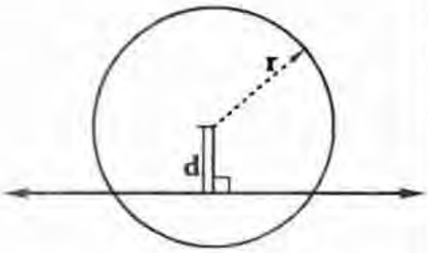
$$m\sphericalangle OTM = m\sphericalangle OTN = x$$

$$\Rightarrow \quad x + x = 180°$$

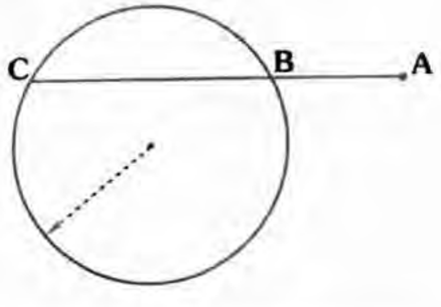
$$\therefore \quad x = 90°$$

Observaciones

- *Se va a reconocer la posición de una recta y una circunferencia en el plano, con la distancia del centro de la circunferencia a dicha recta:*

Recta exterior	**Recta tangente**	**Recta secante**
		
Se cumple: $d > r$	*Se cumple:* $d = r$	*Se cumple:* $d < r$

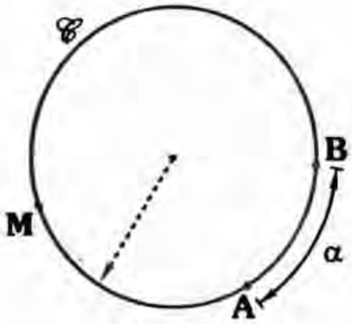
- *Cuando se traza una recta secante desde un punto exterior se nombrará primero dicho punto, luego los puntos de intersección.*



Recta secante: ABC

MEDIDA ANGULAR DE LA CIRCUNFERENCIA - MEDIDA DE ARCOS

En geometría se usa el sistema sexagesimal, es decir se divide a la circunferencia en 360 partes iguales (congruentes) y cada una de dichas partes representará un grado sexagesimal.



- Medida angular de $\mathscr{C}$: 360°
- $m\overset{\frown}{AB}$: medida del arco AB, $m\overset{\frown}{AB} = \alpha$
- $m\overset{\frown}{AMB} = 360° - \alpha$

Nota Histórica

En la antigua Mesopotamia, región que se situó en Asia, entre el río Tigris y el Eufrates, floreció una civilización cuya antigüedad se remonta a 57 siglos aproximadamente: ***Los Babilonios.***

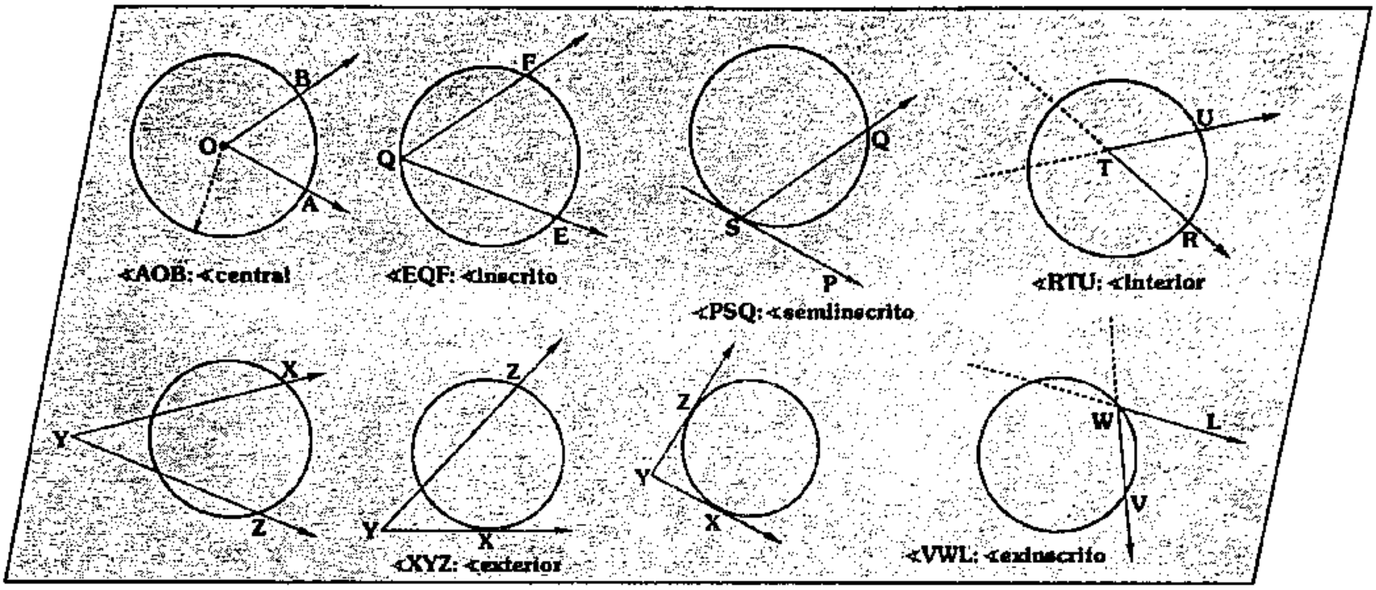
Los Babilonios fueron, hace más de 6000 años, los inventores de la rueda. Tal vez de ahí provino su afán por descubrir las propiedades de la circunferencia, y esto condujo a estudiar la relación entre ella y su diámetro.

Los sabios de esta civilización cultivaron la astronomía y, conociendo que el año tiene aproximadamente 360 días, dividieron la circunferencia en 360 partes iguales obteniendo lo que se llama actualmente el grado sexagesimal.

(Patricia Jimenez Gallego – UAZ)

ÁNGULOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

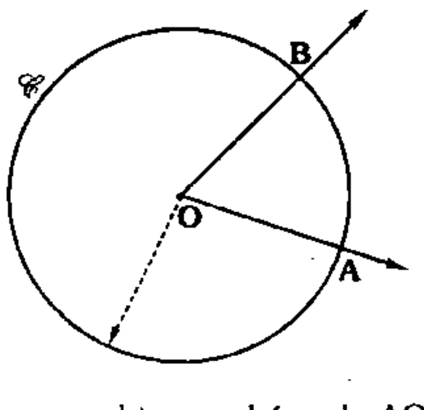
Veamos las diferentes posiciones que tienen un ángulo y una circunferencia en el mismo plano.



Ahora estudiemos cada uno de ellos:

ÁNGULO CENTRAL

Es el ángulo cuyo vértice es el centro de una circunferencia y sus lados contienen a dos radios.

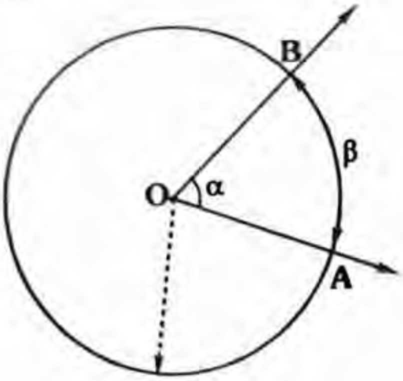


Respecto de $\mathscr{C}$

∢AOB : ángulo central

Notemos que al trazar el ángulo AOB, se determinan dos arcos, al menor se le denominará arco correspondiente al ángulo AOB.

Hay una correspondencia entre la medida del ángulo AOB y de su arco correspondiente, así tenemos:



- $m\widehat{AB}$: medida del arco

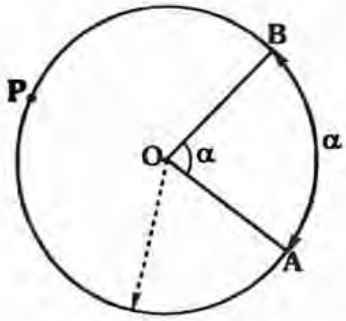
Se cumple:

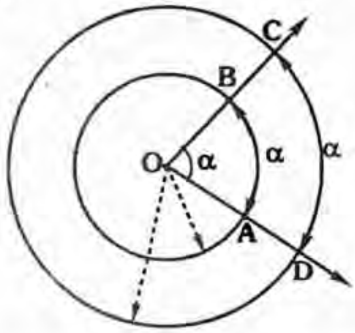
$m\measuredangle AOB = m\widehat{AB}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \beta}$

Observaciones

También:



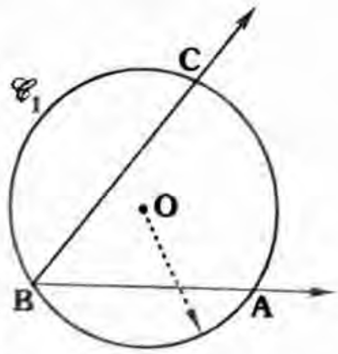


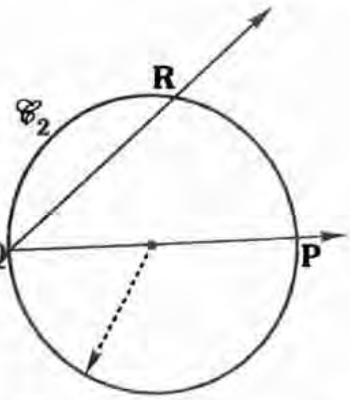
Se cumple: $m\widehat{APB} = 360° - \alpha$

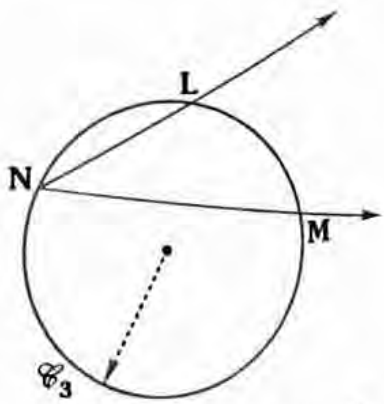
Se cumple: $m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$

ÁNGULO INSCRITO

Es el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados contienen a dos cuerdas. Así tenemos:







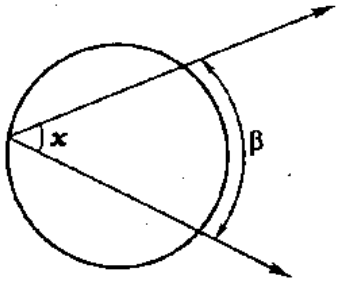
- $\measuredangle ABC$: $\measuredangle$inscrito en $\mathscr{C}$
- $\widehat{AC}$: arco correspondiente a $\measuredangle ABC$.

- $\measuredangle PQR$: $\measuredangle$inscrito en $\mathscr{C}_2$
- $\widehat{PR}$: arco correspondiente a $\measuredangle PQR$.

- $\measuredangle MNL$: $\measuredangle$inscrito en $\mathscr{C}_3$
- $\widehat{ML}$: arco correspondiente a $\measuredangle MNL$.

TEOREMA

La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco correspondiente.

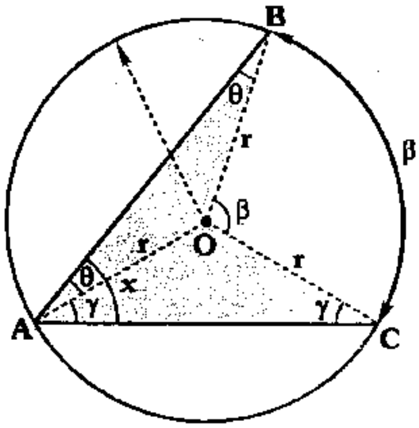


Se cumple:

$$x=\frac{\beta}{2} \quad \text{o} \quad \beta=2x$$

Prueba

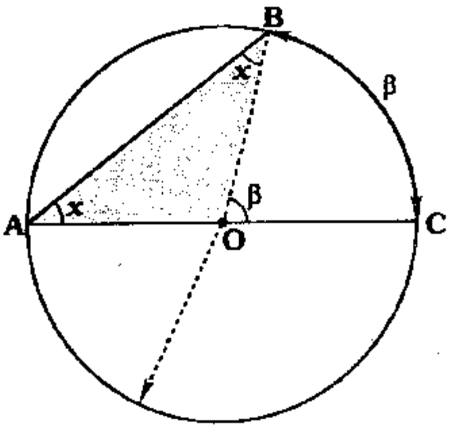
Para los tres casos: Sea "O" el centro



- Por ∢ central: $m∢BOC=\beta$
- ΔAOC y ΔAOB : isósceles
- $x=\theta+\gamma$
- En ∡ABOC: $\underbrace{\theta+x+\gamma}=\beta$

$$2x=\beta$$

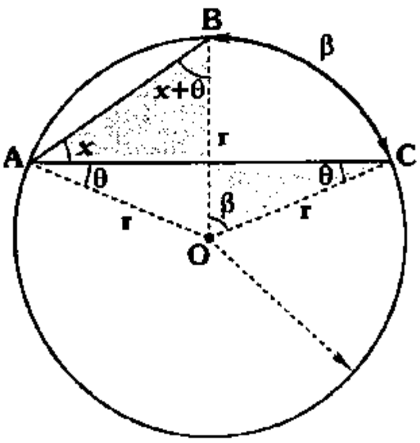
$$\therefore\ x=\frac{\beta}{2}$$



- Por ∢ central: $m∢BOC=\beta$
- ΔAOB : isósceles

$$\Rightarrow\ x+x=\beta$$

$$\therefore\ x=\frac{\beta}{2}$$



- Por ∢ central: $m∢BOC=\beta$
- ΔAOC y ΔAOB : isósceles
- En la parte sombreada (⪥):

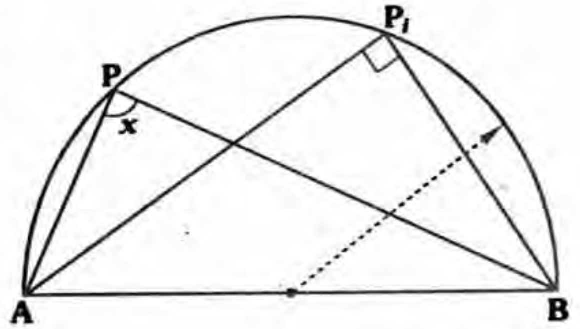
$$x+x+\theta=\beta+\theta$$

$$\rightarrow\ 2x=\beta$$

$$\therefore\ x=\frac{\beta}{2}$$

Observaciones

SEMICIRCUNFERENCIA

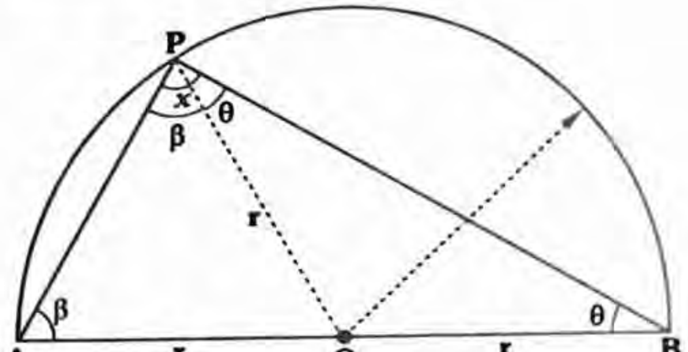


- Es el arco que mide 180°.
- Se le asocia el diámetro.
- Se cumple que cualquier ángulo inscrito mide 90°.
- En el gráfico:

$m\widehat{AB}=180°$ entonces $\widehat{AB}$ es una semicircunferencia.

Se cumple: $x=90°$

Prueba



- ΔPOB y ΔPOA : isósceles

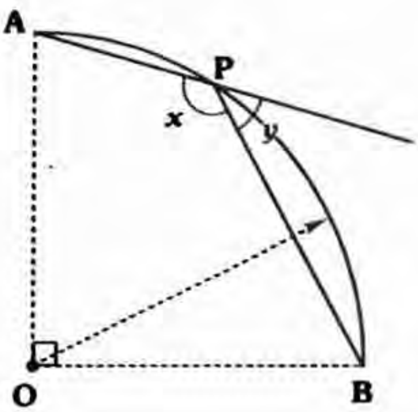
$\Rightarrow\ x=\beta+\theta$

- ΔAPB: $\underbrace{2\beta+2\theta}=180°$

$2x=180°$

$\therefore\ x=90°$

CUADRANTE

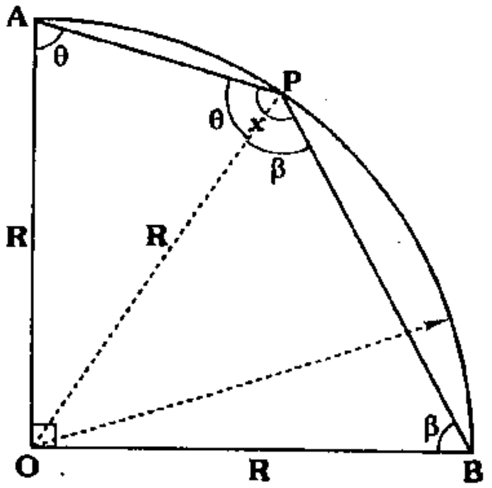


- Es aquel arco que mide 90°.
- Se le asocia dos radios perpendiculares.
- Se cumple que el ángulo inscrito mide 135°.
- En el gráfico:

$m\widehat{AB}=90° \Rightarrow \overline{AO}\perp\overline{OB}$, luego $\widehat{AB}$ es un cuadrante

Se cumple: $x=135°$ o $y=45°$

Prueba



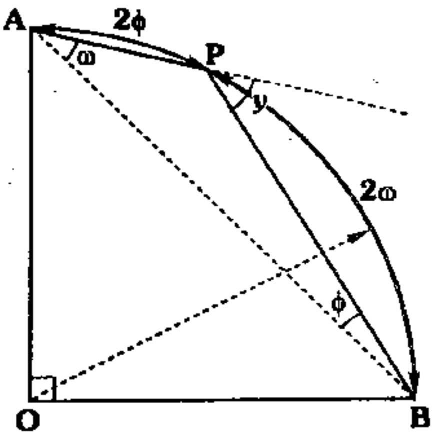
- ΔAOP y ΔPOB : isósceles
- $x = \theta + \beta$
- En ⏢AOBP:

$$\Rightarrow \quad \underbrace{2\theta + 2\beta}_{} + 90° = 360°$$

$$2x \quad + 90° = 360°$$

$$\therefore \; x = 135°$$

Otra forma



- ΔAPB : $y = \omega + \phi$
- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AP} = 2\phi \quad y \quad m\widehat{PB} = 2\omega$$

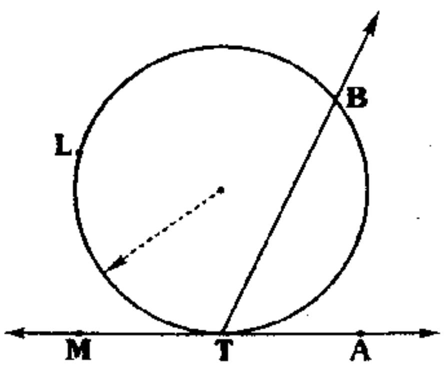
$$\Rightarrow \; 2\phi + 2\omega = 90°$$

$$\Rightarrow \; \phi + \omega = 45°$$

$$\therefore \; y = 45°$$

ÁNGULO SEMI INSCRITO

Es cada uno de los ángulos que se determinan con la recta tangente y el rayo secante a la circunferencia en el punto de tangencia.



- En el gráfico, T es punto de tangencia.
- Son ángulos semiinscritos:

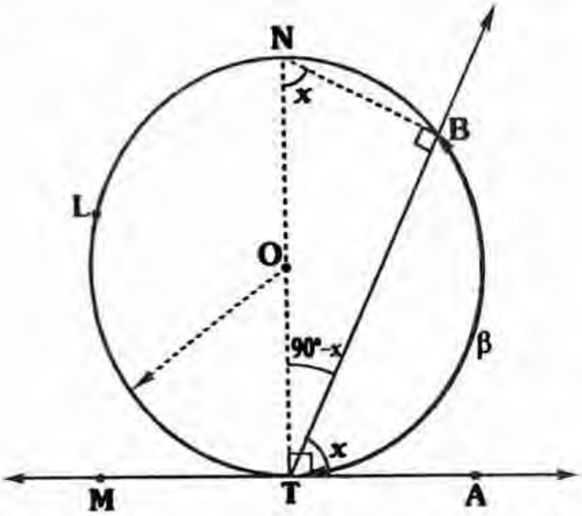
$$\measuredangle ATB \quad y \quad \measuredangle MTB$$

- $\widehat{TB}$: arco correspondiente al $\measuredangle ATB$
- $\widehat{TLB}$: arco correspondiente al $\measuredangle MTB$

TEOREMA

La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco correspondiente.

Prueba

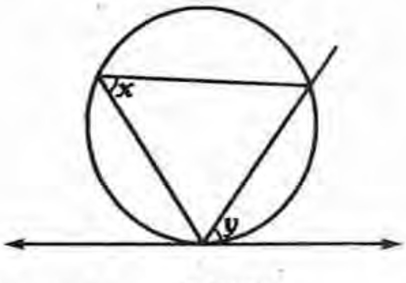


- Sea $x = m\measuredangle ATB$ y $m\overset{\frown}{TB} = \beta$
- Por propiedad $\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{AN}$
- Como $\overline{TN}$ es diámetro entonces $m\measuredangle TNB = x$
  $\Rightarrow m\measuredangle NTB = 90^\circ - x \Rightarrow m\measuredangle TNB = x$
- Por ángulo inscrito: $x = \dfrac{\beta}{2}$
- Se concluye:

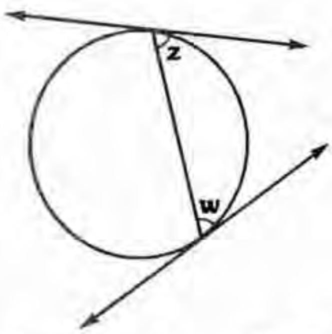
$$m\measuredangle ATB = \frac{m\overset{\frown}{TB}}{2} \quad y \quad m\measuredangle NTB = \frac{m\overset{\frown}{TLB}}{2}$$

Observación

Como consecuencia de lo anterior se deduce:



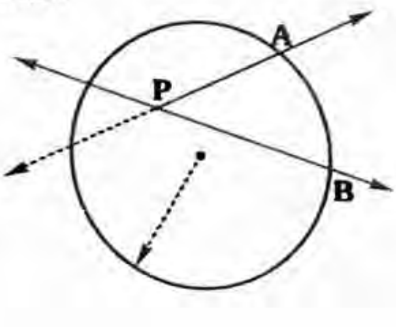
Se cumple: $x = y$



Se cumple: $w = z$

ÁNGULO INTERIOR

Es el ángulo cuyo vértice es un punto interior y sus lados están sobre rectas secantes a la circunferencia.

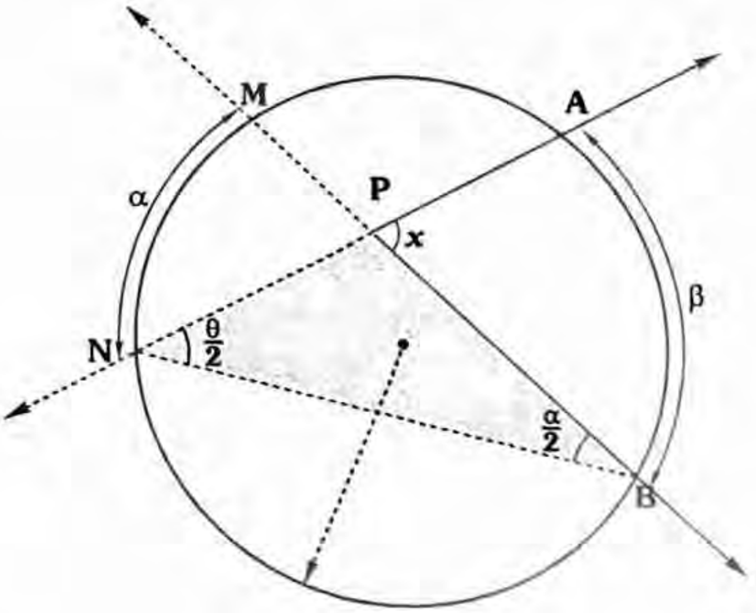


- P es un punto interior.
- $\measuredangle APB$: ángulo interior.
- $\overset{\frown}{AB}$: arco correspondiente por el $\measuredangle APB$.

TEOREMA

La medida del ángulo interior es la semisuma de las medidas de los arcos correspondientes a dicho ángulo y de su opuesto por el vértice.

Prueba



- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle ANB=\frac{\theta}{2} \quad y$$

$$m\measuredangle MNB=\frac{\alpha}{2}$$

- En ΔNPB, por ángulo exterior:

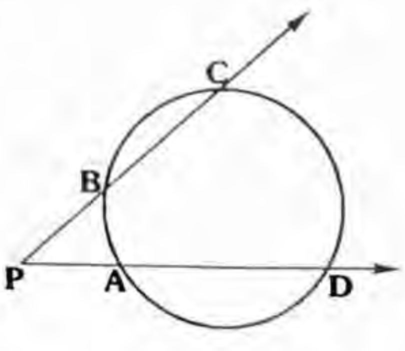
$$x=\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{\alpha+\theta}{2}$$

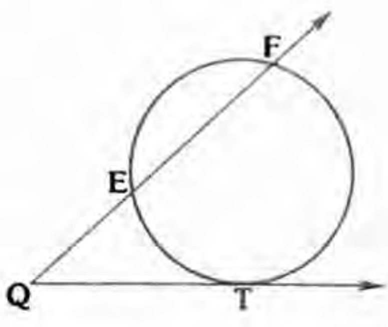
ÁNGULO EXTERIOR

Es aquel ángulo cuyo vértice es un punto exterior y sus lados son dos rayos: ambos secantes; uno secante y uno tangente; o ambos tangentes.

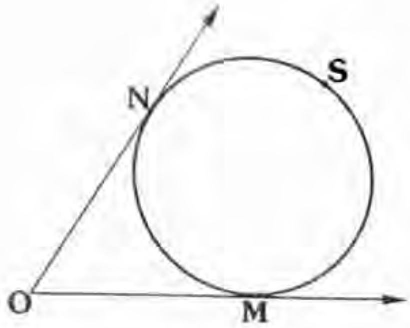
Así tenemos:



- P: Punto exterior
- $\measuredangle$CPD: $\measuredangle$exterior
- $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ arcos correspondientes al $\measuredangle$CPD.



- Q: Punto exterior
- T: Punto de tangencia
- $\overset{\frown}{ET}$ y $\overset{\frown}{TF}$ arcos correspondientes al $\measuredangle$CPD.

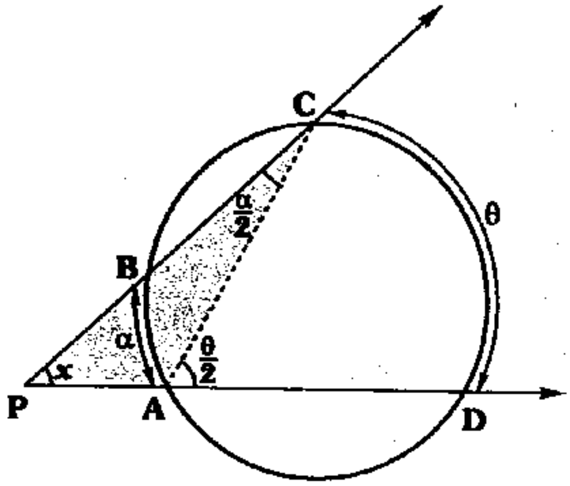


- O: es punto exterior
- M y N: Punto de tangencia
- $\overset{\frown}{MN}$ y $\overset{\frown}{MSN}$ arcos correspondientes al $\measuredangle$MON.

TEOREMA

La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos correspondientes.

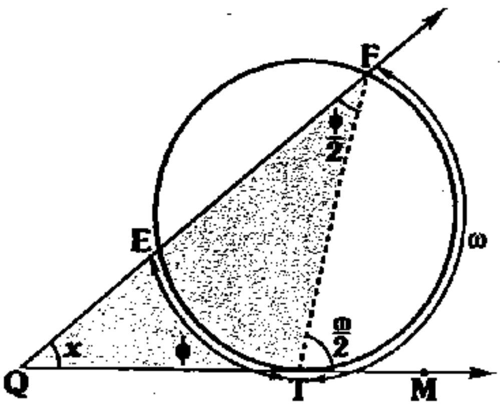
Prueba



- Sea: $m\widehat{CD}=\theta$ y $m\widehat{AB}=\alpha$
- Por ∢inscrito:

  $m\sphericalangle ACB=\frac{\alpha}{2}$ y $m\sphericalangle CAD=\frac{\theta}{2}$
- En el ΔAPC: $x+\frac{\alpha}{2}=\frac{\theta}{2}$

  $\therefore\ \boxed{x=\frac{\theta-\alpha}{2}}$

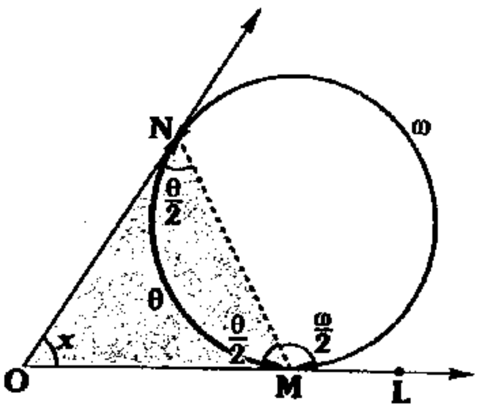


- Por ∢inscrito:

  $m\sphericalangle QFT=\frac{\phi}{2}$
- Por ∢semiinscrito:

  $m\sphericalangle MTF=\frac{\omega}{2}$
- En el ΔQTC: $x+\frac{\phi}{2}=\frac{\omega}{2}$

  $\therefore\ \boxed{x=\frac{\omega-\phi}{2}}$

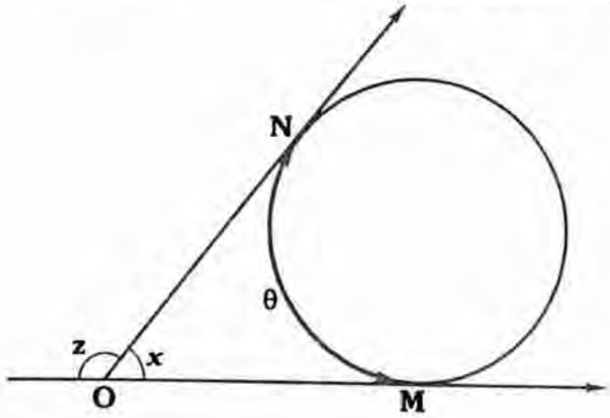


- Por ∢semiinscrito:

  $m\sphericalangle NML=\frac{\omega}{2}$ y $m\sphericalangle ONM=\frac{\theta}{2}$
- En el ΔOMN: $x+\frac{\theta}{2}=\frac{\omega}{2}$

  $\therefore\ \boxed{x=\frac{\omega-\theta}{2}}$

Observación



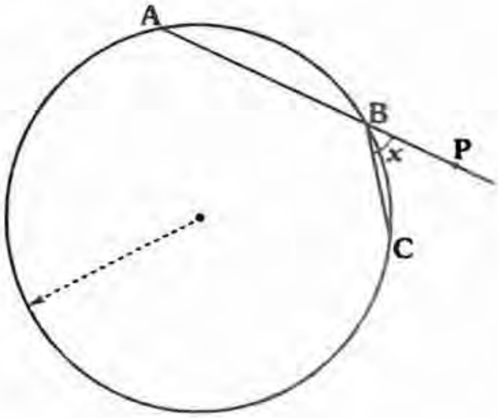
De lo anterior, se deduce:

$$x+\theta=180°$$

También:

$$z=\theta$$

ÁNGULO EXINSCRITO

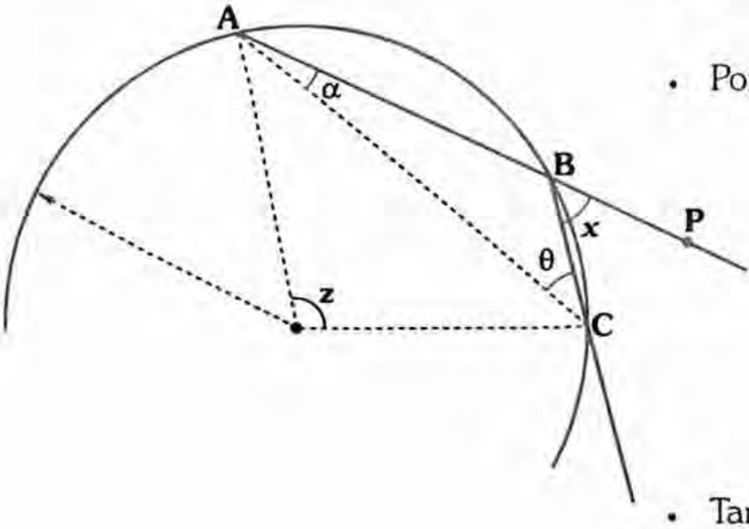


$\sphericalangle PBC$: ángulo exinscrito

Se cumple:

$$x=\frac{m\overset{\frown}{ABC}}{2}$$

Prueba



- Sea $m\sphericalangle BAC=\alpha$ y $m\sphericalangle BCA=\theta$

  $\Rightarrow x=\alpha+\theta$

- Por ángulo inscrito:

  $m\overset{\frown}{AB}=2\theta$ y $m\overset{\frown}{BC}=2\alpha$

  $\Rightarrow m\overset{\frown}{ABC}=\underbrace{2\theta+2\alpha}$

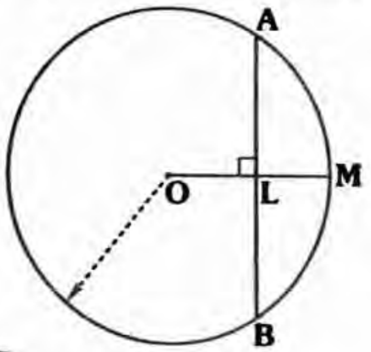
  $m\overset{\frown}{ABC}=2x$

  $\therefore x=\frac{m\overset{\frown}{ABC}}{2}$

- También: $x=\frac{z}{2}$ o $z=2x$

TEOREMAS EN LA CIRCUNFERENCIA

- El radio perpendicular a una cuerda, biseca a dicha cuerda y al arco correspondiente.

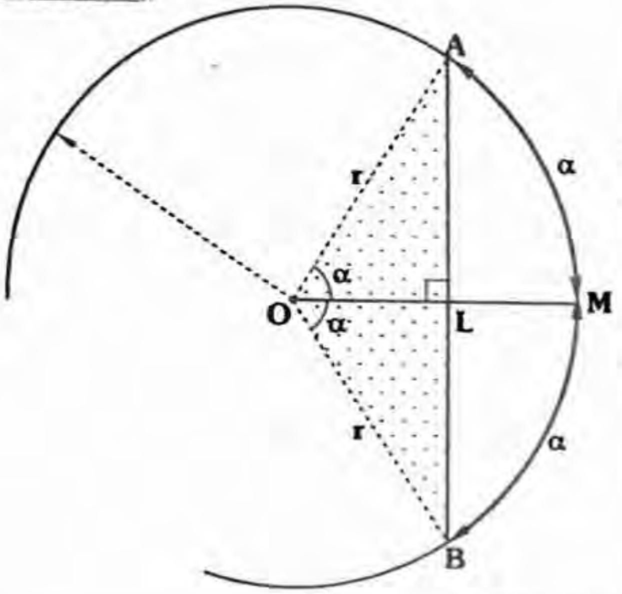


En el gráfico, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

Se cumple:

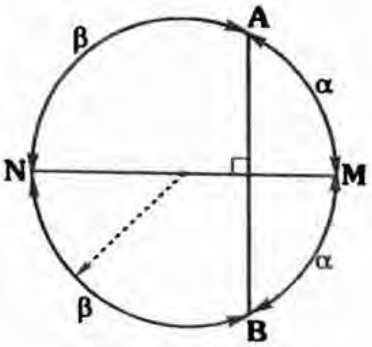
$AL = LB$ y $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$

Prueba

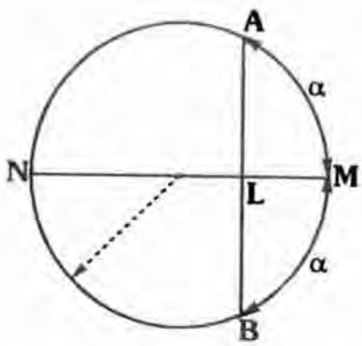


- ΔAOB: isósceles
- Como $\overline{OL}$ es altura entonces también es mediana $(AL = LB)$ y bisectriz $(m\sphericalangle AOL = m\sphericalangle LOB)$.
- Por $\sphericalangle$ central: $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$

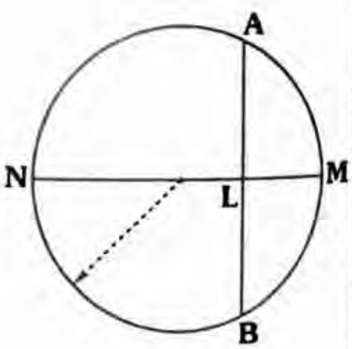
Observación



Si $\overline{AB} \perp \overline{NM} \Rightarrow m\widehat{AN} = m\widehat{NB}$ y $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$

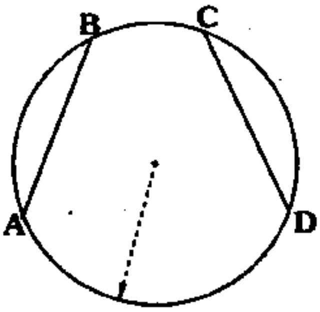


Si $m\widehat{AM} = m\widehat{MB} \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{NM}$ y $AL = LB$



Si $\overline{AB}$ no es diámetro y $AL = LB \Rightarrow \overline{NM} \perp \overline{AB}$ y $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$

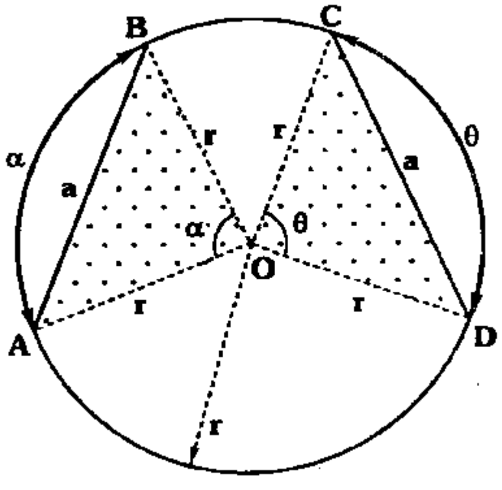
- En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, si dos cuerdas son de igual longitud, sus arcos correspondientes de igual medida y viceversa.



En el gráfico:

$$\boxed{AB = CD \Leftrightarrow m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}}$$

Prueba



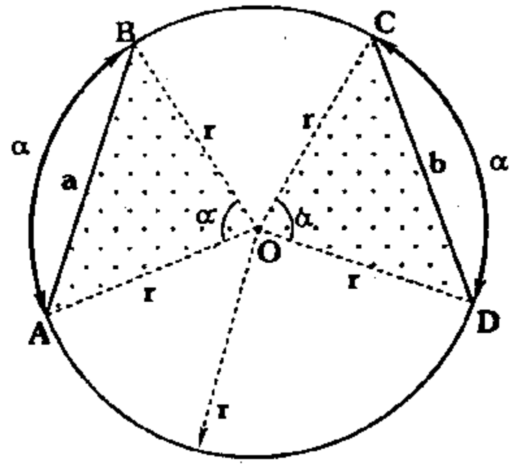
- Sea AB=CD, $m\overset{\frown}{AB} = \alpha$ y $m\overset{\frown}{CD} = \theta$
- Δ Por ángulo central:

$$m\measuredangle AOB = \alpha \quad y$$
$$m\measuredangle COD = \theta$$

- $\Delta ABO \cong \Delta CDO$ (LLL)

$$\Rightarrow \alpha = \theta$$

Veamos el caso recíproco:



Si $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$

- Por $\measuredangle$ central:

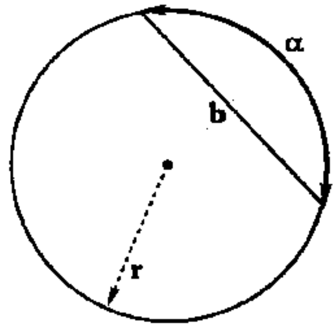
$$m\measuredangle AOB = m\measuredangle COD$$

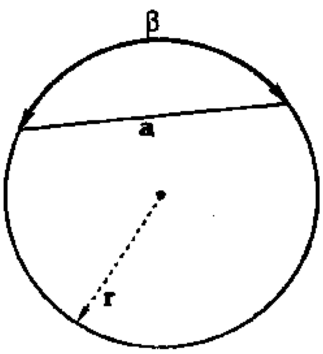
- $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (LAL)

$$\therefore \; a = b$$

Observación

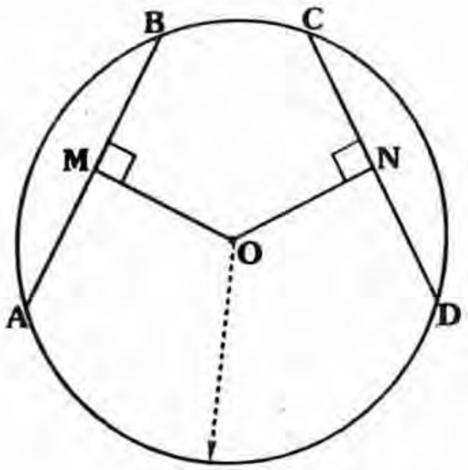
Si las circunferencias son congruentes:





Se cumple : $\boxed{a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta}$

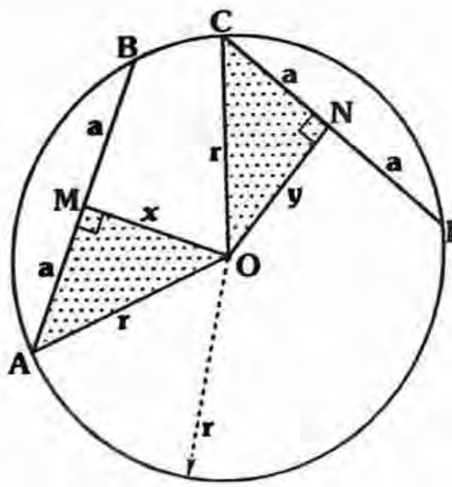
- Si dos cuerdas son de igual longitud entonces el centro equidista de dichas cuerdas.



Si AB=CD

$\Rightarrow$ OM = ON

Prueba



- Como AB=CD

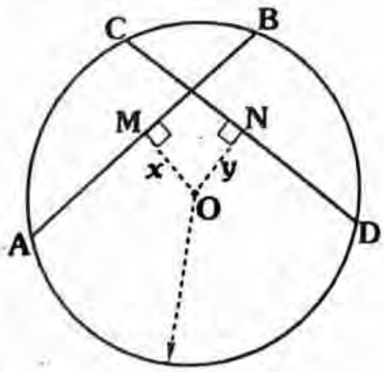
$\Rightarrow$ AM = MB = CN = ND

- ⊿AMO ≅ ⊿CNO

$\therefore$ $x=y$

Observación

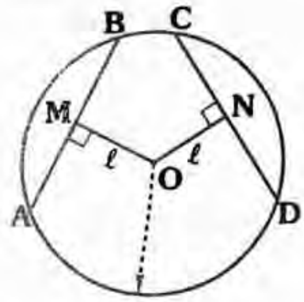
- *También el teorema es válido si las cuerdas son secantes.*



Si AB = CD

$\Rightarrow$ $x=y$

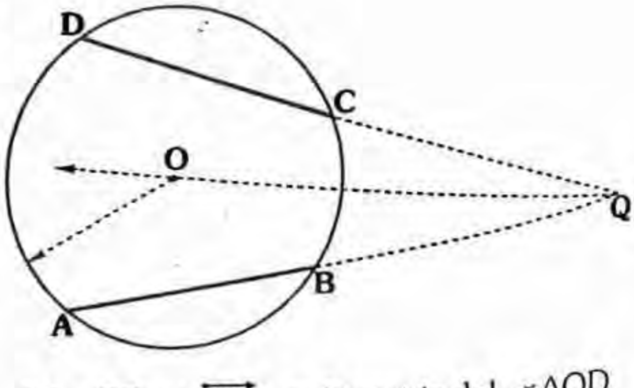
- *El recíproco del teorema también es verdadero*



Si OM = ON

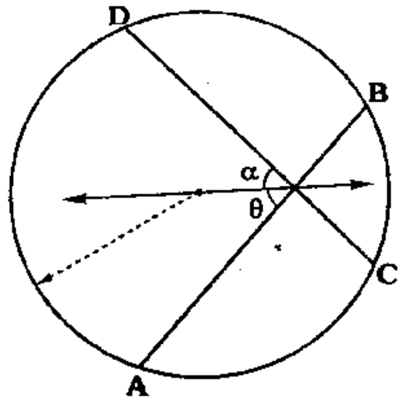
$\Rightarrow$ AB=CD

- El siguiente teorema, es consecuencia directa del anterior:



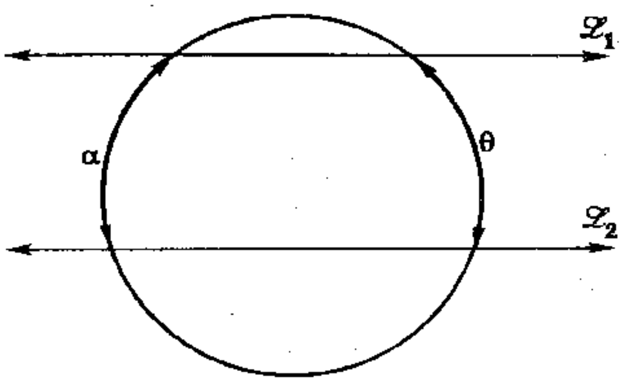
AB=CD $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{QO}$ es bisectriz del ∢AQD

También:



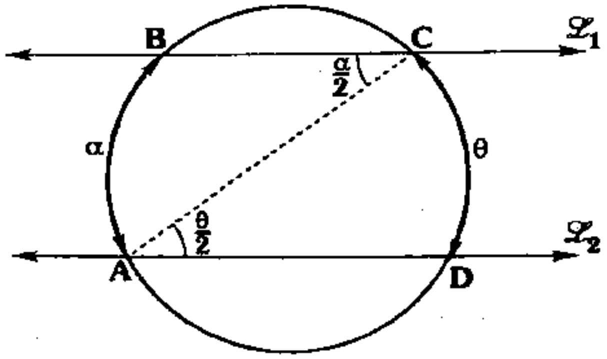
Si $AB = CD \Rightarrow \alpha = \theta$

- En un circunferencia, dos rectas secantes determinan arcos de igual medida.



Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \Rightarrow \alpha = \theta$

Prueba



- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle ACB = \frac{\alpha}{2} \text{ y } m\measuredangle CAD = \frac{\theta}{2}$$

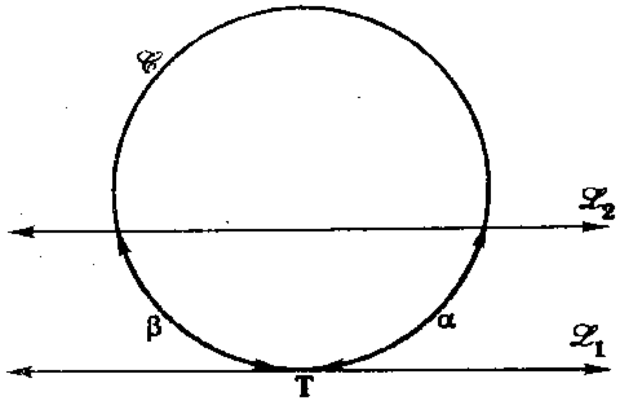
- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2}$

$$\therefore \quad \alpha = \theta$$

Observación

Si $\alpha = \theta$ entonces $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, la prueba es similar a la anterior.

- En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ *es tangente a* $\mathscr{C}$.

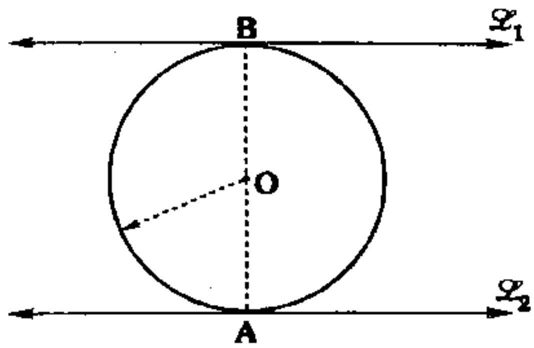


Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \Rightarrow \alpha = \beta$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

Observación

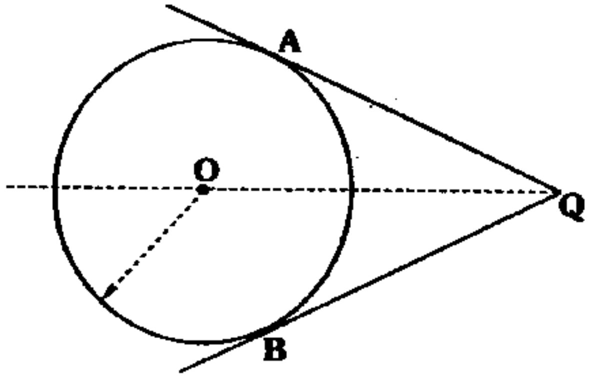
Si ambas rectas son tangentes.



Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ *entonces* $m\overset{\frown}{AB} = 180°$

(A, O y B: *colineales)*

- En el gráfico, A y B son puntos de tangencia:

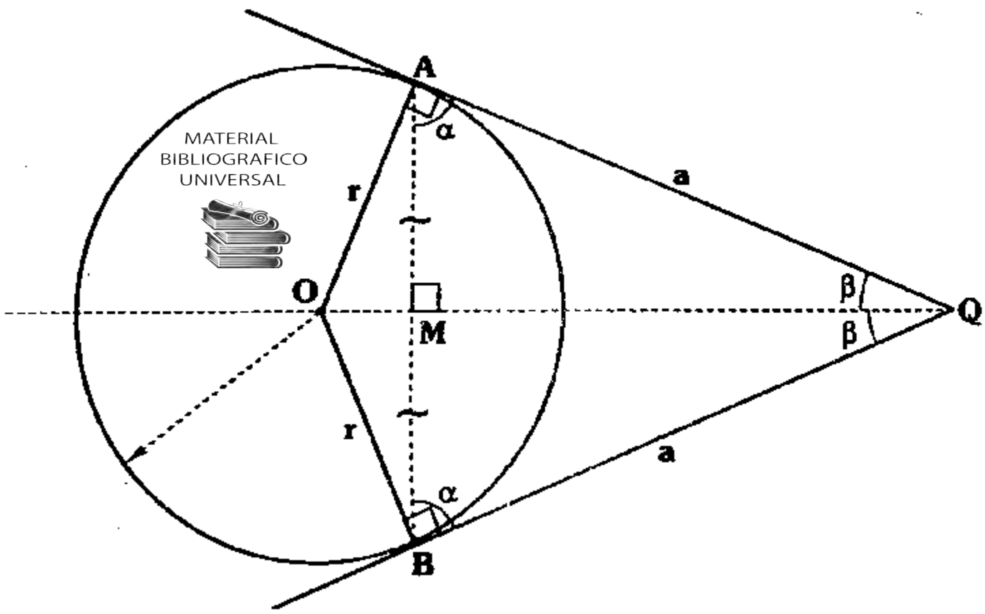


Se cumple:

$QA = QB$

$\overrightarrow{QO}$: bisectriz del $\measuredangle AQB$

Prueba



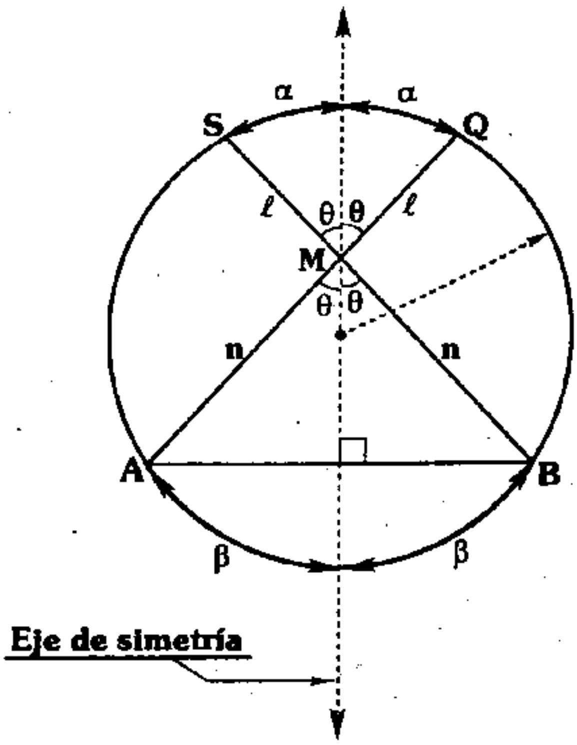
- Sea $m\widehat{AB} = 2\alpha$ entonces por ángulo semiinscrito:

  $m\measuredangle BAQ = m\measuredangle ABQ = \alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta AQB$ es isósceles entonces $QA = QA$.

- Como $OA = OB$, $\overline{OA} \perp \overline{QA}$ y $\overline{OB} \perp \overline{BQ}$ entonces $\overrightarrow{QO}$ es bisectriz.

- Además: como el ΔAQB es isósceles entonces $\overline{QM}$ es mediana y altura.

- Toda recta que pasa por el centro es eje de simetría.

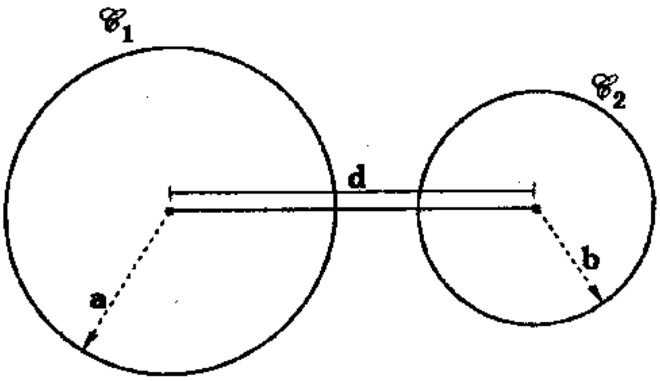


POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS EN EL PLANO

Dos circunferencias en un plano se pueden ubicar de seis posiciones diferentes, así tenemos:

1 CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES

Cuando una de ellas se encuentra en la región exterior de la otra.



- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias exteriores
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \phi$

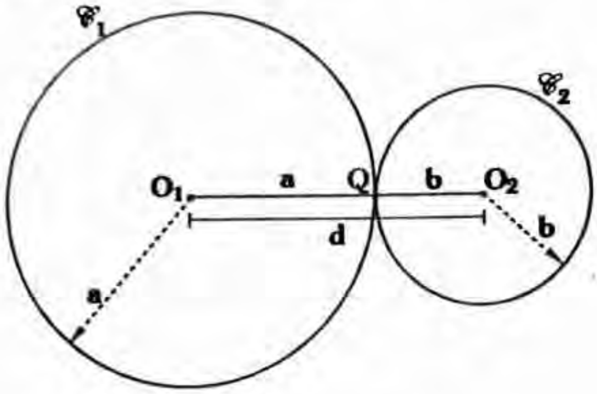
Se cumple:

$$d > a + b$$

d: distancia de centros

2 CIRCUNFERENCIAS TANGENTES EXTERIORES

Cuando tienen un solo punto en común y los demás puntos de una de ellas están en la región exterior de la otra.



- Q: punto de tangencia
- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: Circunferencias tangentes exteriores
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{Q\}$

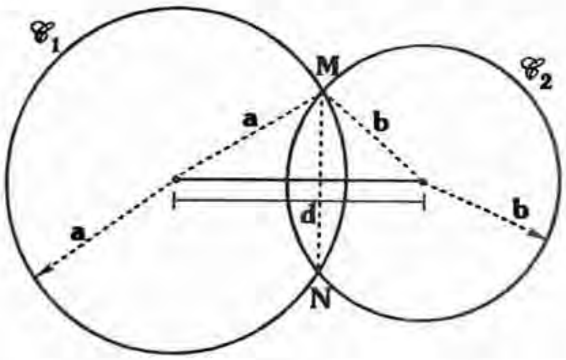
Se cumple:

* O_1, Q y O_2 son colineales

* $d = a + b$

3 CIRCUNFERENCIAS SECANTES

Cuando hay dos puntos de intersección (al segmento comprendido entre dichos puntos se le llama: **"cuerda común"**)



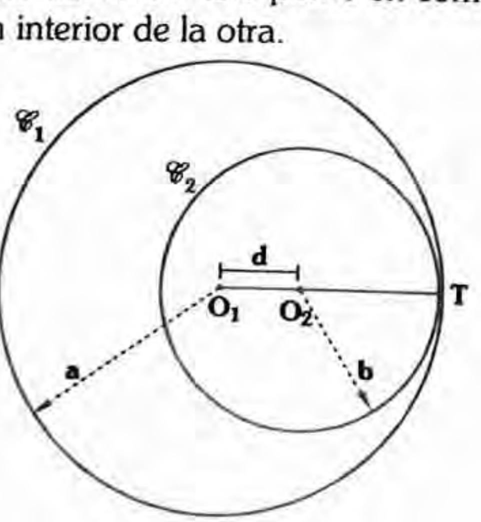
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{M, N\}$
- $\overline{MN}$: cuerda común
- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias secantes

Se cumple:

$$|a-b| < d < a+b$$

4 CIRCUNFERENCIAS TANGENES INTERIORES

Cuando tienen un sólo punto en común y los demás puntos de una de ellas están en la región interior de la otra.



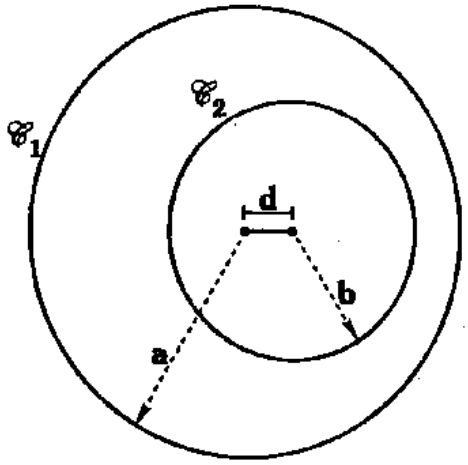
- T: Punto de tangencia
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$: Circunferencias tangentes interiores.

Se cumple: O_1, O_2 y T son colineales

$$d = a - b$$

5 CIRCUNFERENCIAS INTERIORES

Cuando las circunferencias no se intersecan y una de ellas está en la región interior de la otra.



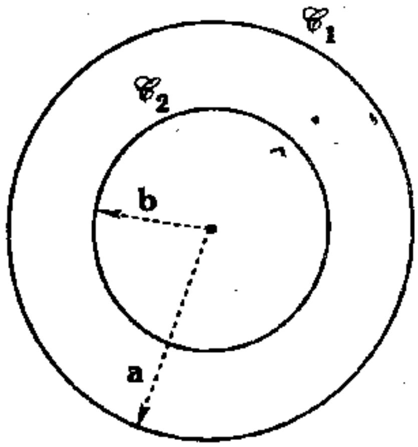
- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$:circunferencias interiores
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \phi$

Se cumple:

$$d < a - b$$

6 CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS

Cuando tienen el mismo centro.



- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$:circunferencias interiores
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \phi$
- d: distancia de centros entonces:

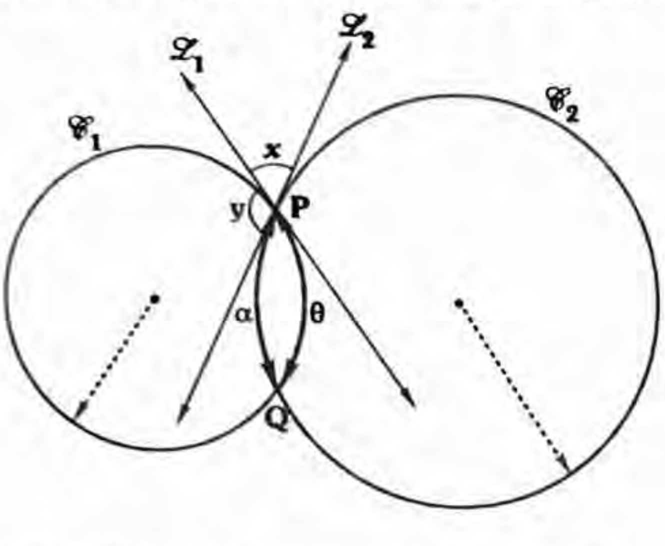
$$d = 0$$

Observación

Se llama ***circunferencias disjuntas*** *a aquel grupo de circunferencias cuya intersección es el conjunto vacio.*

ÁNGULO ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS (1)

Es el ángulo formado por las rectas tangentes en uno de los puntos de intersección.



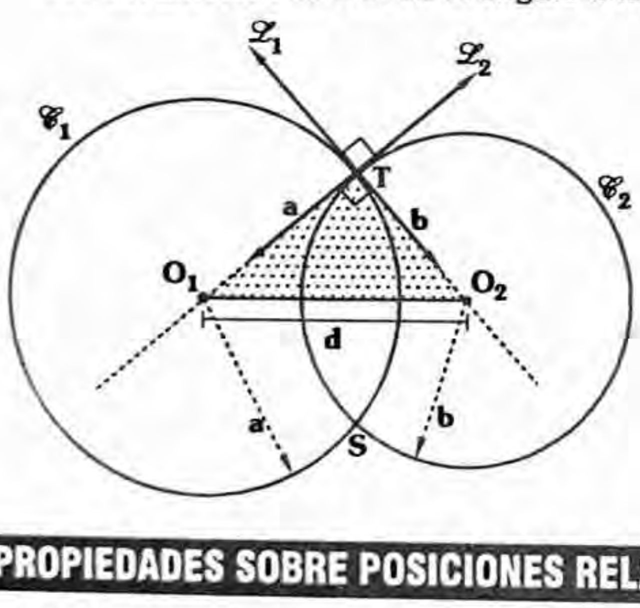
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{P, G\}$
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$: tangente a $\mathscr{C}_1$ en P
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: tangente a $\mathscr{C}_2$ en P
- " x " ó "y": medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Se cumple:

$$x = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES

Son dos circunferencias donde el ángulo entre ellas es recto.

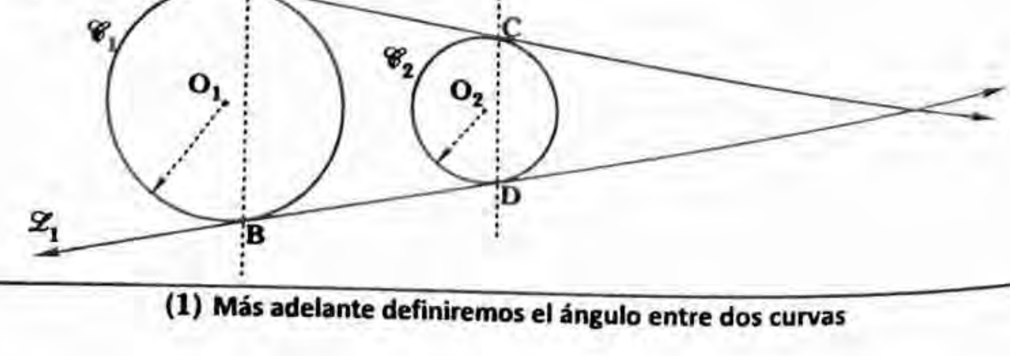


- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias ortogonales
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ entonces $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ pasa por el centro de $\mathscr{C}_2$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ pasa por el centro de $\mathscr{C}_1$

Se cumple: $d^2 = a^2 + b^2$

PROPIEDADES SOBRE POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

- En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias exteriores



(1) Más adelante definiremos el ángulo entre dos curvas

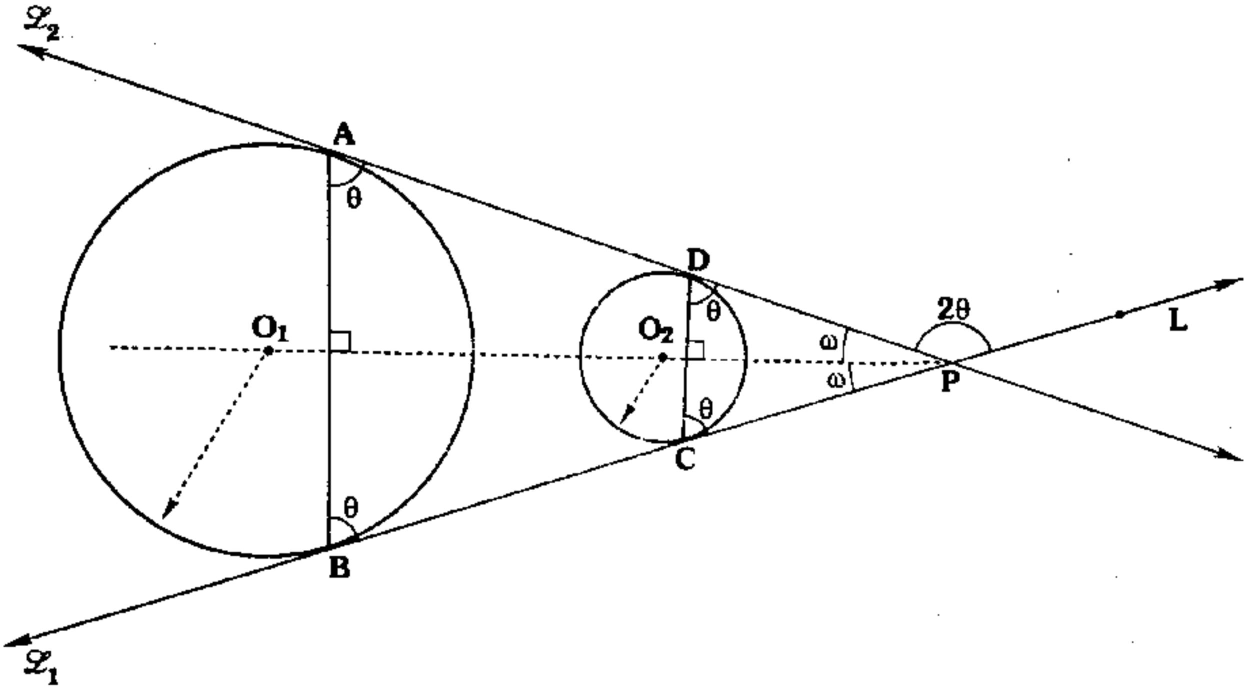
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: tangentes comunes exteriores (A, B, C y D: *puntos de tangencia*)
- Se cumple:

  • $AC = BD$ • $\overline{AB} // \overline{CD}$ • O_1, O_2 y P : colineales

Prueba

- Como $PA = PB$ y $PC = PD$ $\Rightarrow$ $AD = PA - PD = \underbrace{PB - PC}$

  $\therefore$ $AD = BC$



- Como ΔPCD y ΔPBA : isósceles

  $\Rightarrow$ $m\sphericalangle PDC = \theta$ $\Rightarrow$ $m\sphericalangle DCP = \theta$

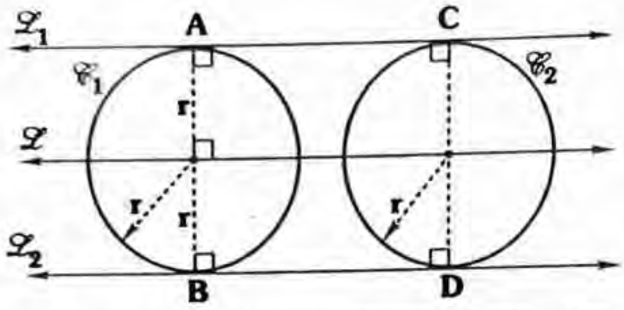
  $\Rightarrow$ $m\sphericalangle LDP = 2\theta$ $\Rightarrow$ $m\sphericalangle PAB = m\sphericalangle PBA$

  $\Rightarrow$ $\overline{AC} // \overline{DC}$

- O_1 y O_2 están en la bisectriz del $\sphericalangle APB$ $\Rightarrow$ O_1, O_2 y P : colineales

Observación

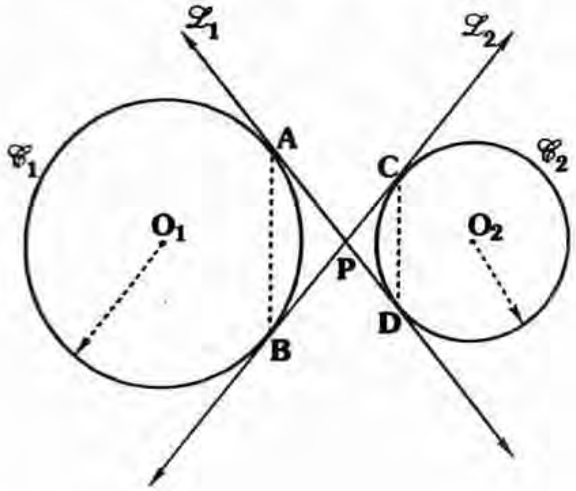
Si $\mathscr{C}_1 \equiv \mathscr{C}_2$, entonces:



Se cumple: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

También: AC=BD

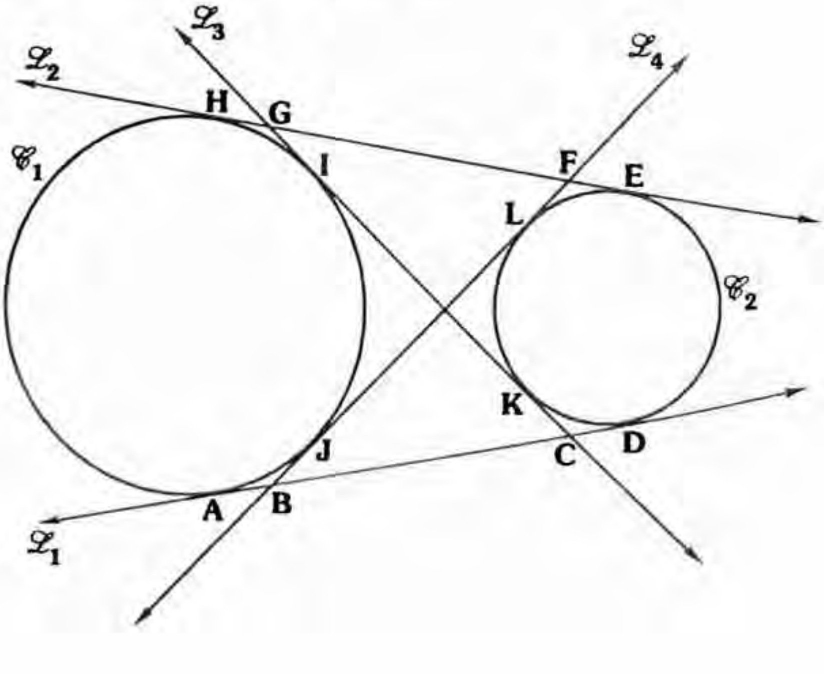
- En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son exteriores



- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: tangentes comunes interiores (A, B, C y D: Puntos de tangencia)
- Se cumple:
  - * AD = BC
  - * $\overline{AB} // \overline{CD}$
  - * O_1, P y O_2: colineales

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

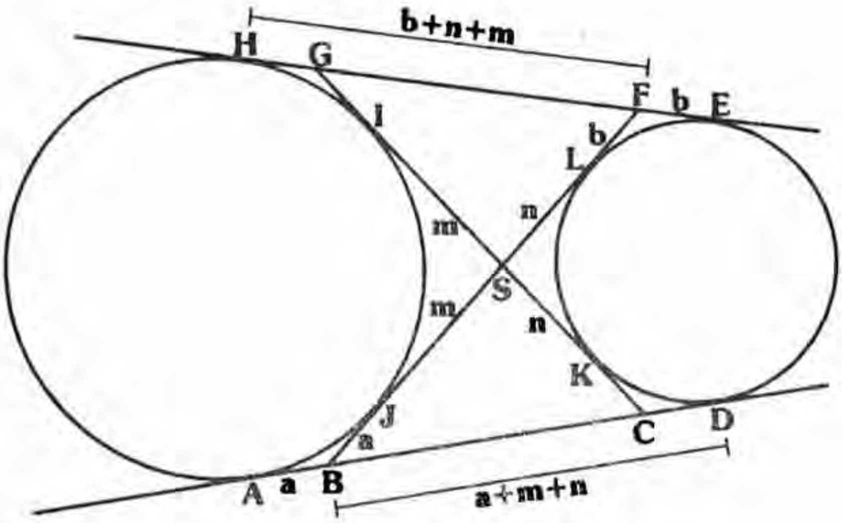
- En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ circunferencias exteriores



- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$: Tangentes comunes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$
- Se cumple:

$$HE = AD = BF = GC$$
$$AB = CD = HG = FE$$

Prueba

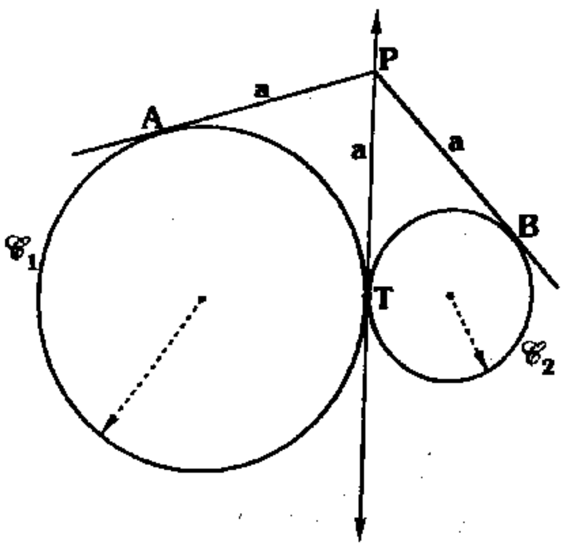


- HE=AD ya fue probado.
- Sea AB=a; JS=m; SL=n, LF=FE=b

$$\Rightarrow BL=BD=a+m+n \quad y \quad FH=FJ=m+n+b$$

- Como HE=AD $\Rightarrow 2b+\cancel{n+m}=2a+\cancel{m+n} \Rightarrow b=a$
- Luego notamos: AD=2a+m+n=BF
- También: como, $\left.\begin{array}{l} AD=2a+m+n \Rightarrow CD=a \\ HE=2b+n+m \Rightarrow HG=b \end{array}\right\}$ CD=HG

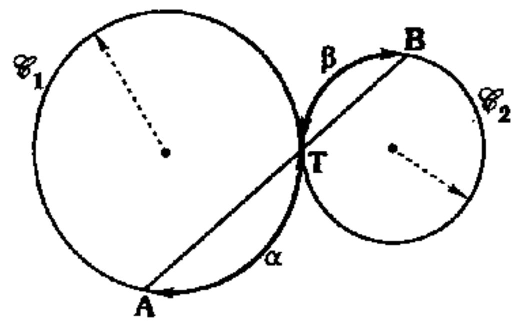
▭ $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: Circunferencias tangentes exteriores



- T: Punto de tangencia
- Se cumple:

$$PA = PT = PB$$

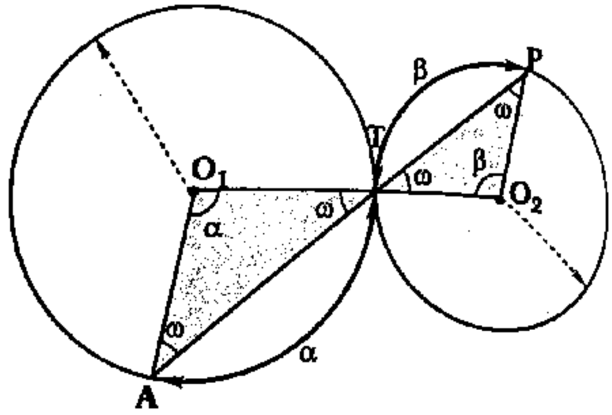
▭ $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: Circunferencias tangentes exteriores .



- T: Punto de tangencia
- Se cumple:

$$\alpha = \beta$$

Prueba

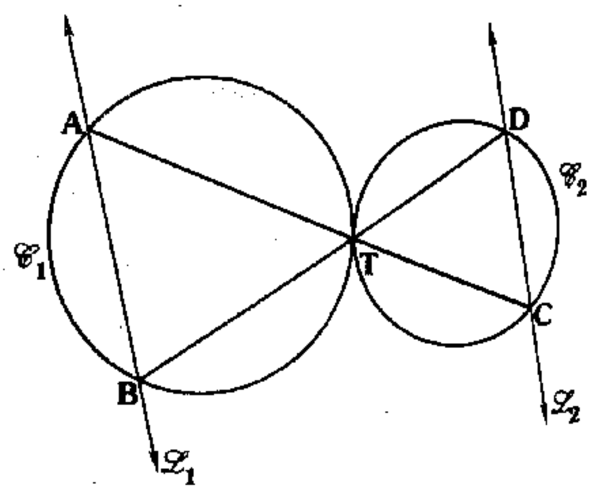


- Como O_1 , T y O_2 son colineales
- ΔAO_1T y ΔAO_2T : isósceles
- En $\bowtie$:

$$\alpha + \omega = \beta + \omega$$

$$\therefore \ \alpha = \beta$$

▭ $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: tangentes exteriores



- T es punto de tangencia
- Se cumple:

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$$

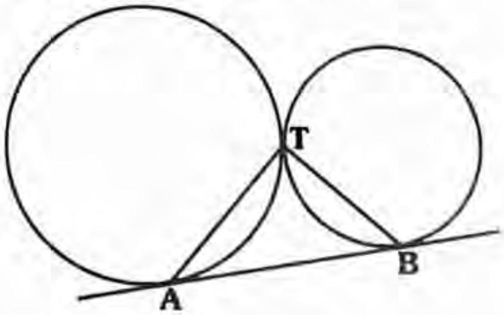
Prueba

- Como : $m\widehat{BT} = m\widehat{TD}$

$$\Rightarrow m\measuredangle BAT = m\measuredangle TCD$$

$$\therefore \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$$

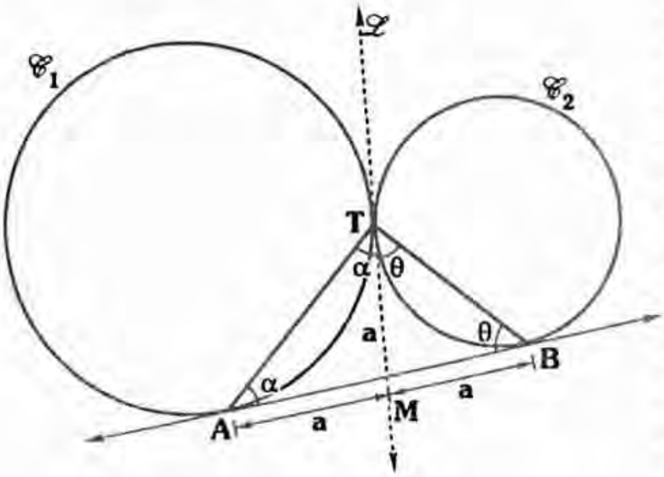
- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: tangente exteriores



- A, T y B: Puntos de tangencia
- Se cumple:

$$m\measuredangle ATB = 90^\circ$$

Prueba

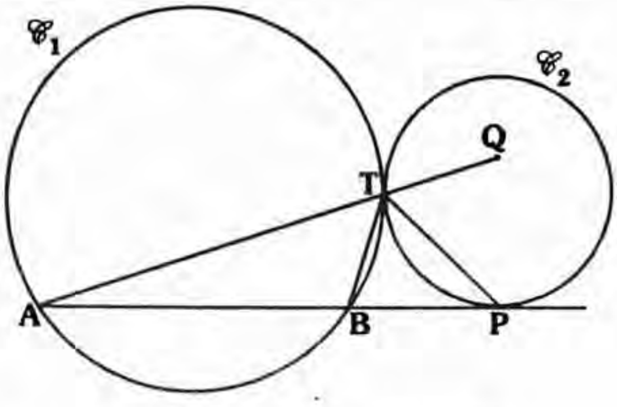


- Se traza la tangente a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en T, la cual a $\overline{AB}$ en M entonces AM=MT=MB
- En el triángulo ATB:

$$2\alpha + 2\theta = 180^\circ$$

$$\therefore \ \alpha + \theta = 90^\circ$$

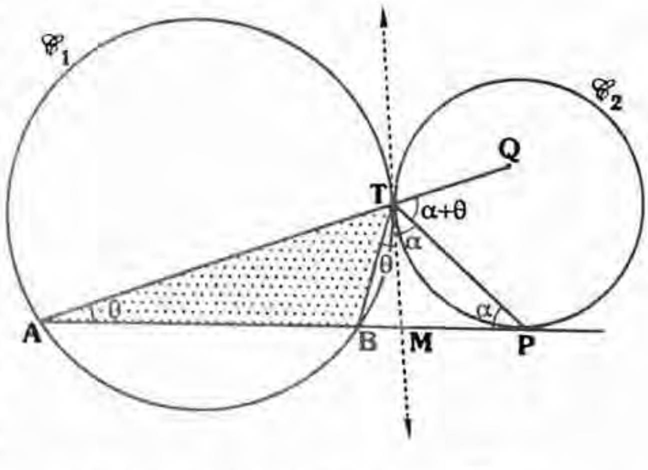
- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencia tangentes exteriores



- T y P: Puntos de tangencia
- Se cumple:

$$m\measuredangle BTP = m\measuredangle PTQ$$

Prueba



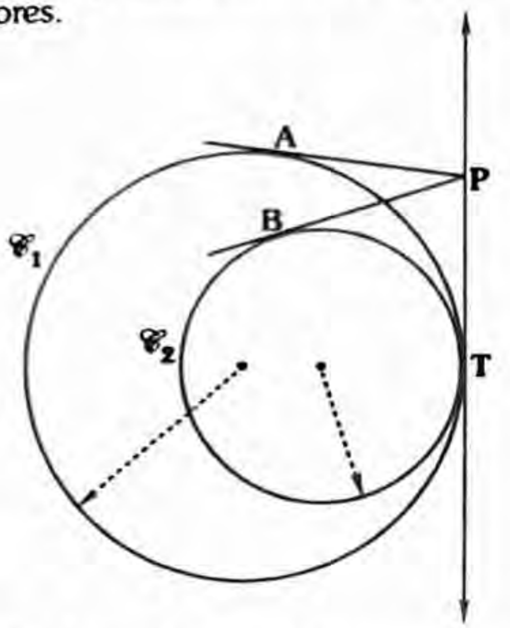
- Sea $m\measuredangle BAT = \theta \Rightarrow m\widehat{TB} = 2\theta$
- Se traza la tangente común en T, que corta a $\overline{BP}$ en M.
- Por $\measuredangle$ semiinscrito: $m\measuredangle BTM = \theta$
- $m\measuredangle MTP = m\measuredangle MPT = \alpha$
- En ΔATP: $m\measuredangle QTP = \underbrace{\alpha + \theta}_{m\measuredangle BTP}$

$$\therefore \ m\measuredangle BTP = m\measuredangle QTP$$

Observación

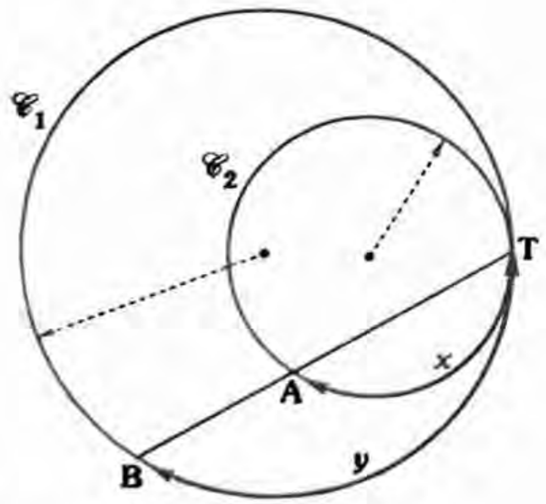
Se cumple que $\overline{TP}$ es bisectriz exterior para el ΔBTA.

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencia tangentes interiores.



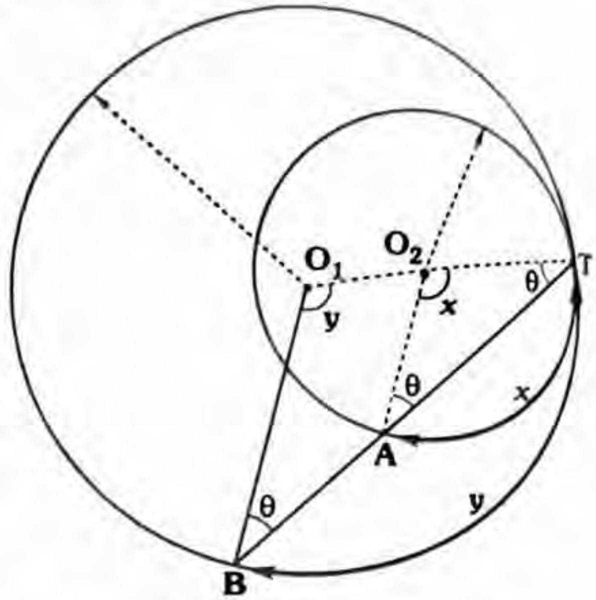
- T, A y B puntos de tangencia.
- Se cumple: $PA=PB=PT$

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: son circunferencias tangentes interiores.



- T: Punto de tangencia
- Se cumple: $x=y$

Prueba



- Por ∢ central:

$m∢BO_1=y$ y $m∢AO_2T=x$

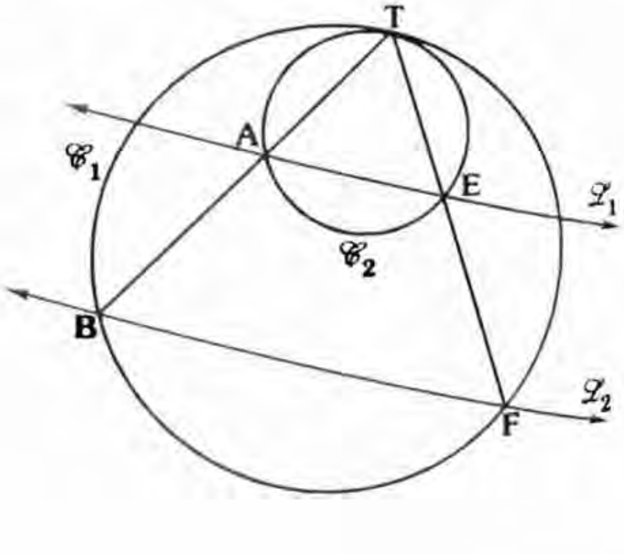
- O_1, O_2 y T son colineales
- Los triángulos: AO_2T y BO_1T son isósceles

$\Rightarrow m∢O_2TA=m∢O_2AT=m∢O_1BT$

$\Rightarrow \overline{O_1B}//\overline{O_2A}$

$\therefore\ x=y$

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias tangentes interiores



- T: Punto de tangencia
- Se cumple:

$$\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2$$

Prueba

- Como:

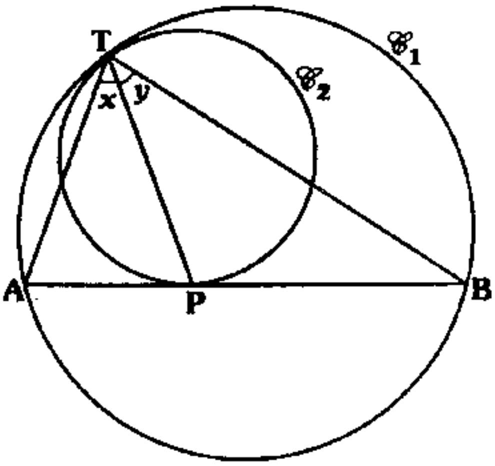
$$m\widehat{TE} = m\widehat{TF}$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle EAT = m\measuredangle FBT$$

- Por recíproco de la propiedad de ángulos correspondientes:

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$$

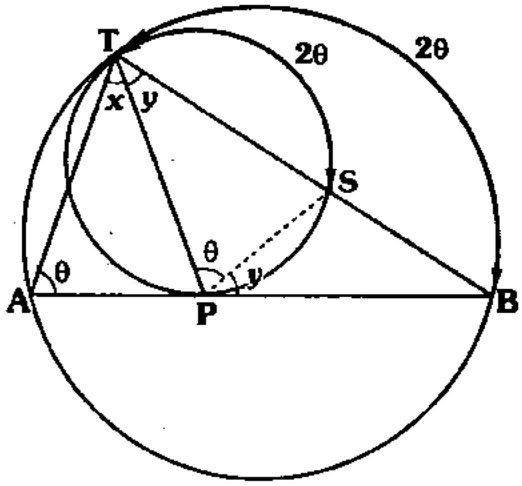
- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias tangentes interiores



- En el gráfico, T y P son puntos de tangencia.
- Se cumple:

$$x = y$$

Prueba



- Como:

$$m\widehat{TS} = m\widehat{TB}$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle TPS = m\measuredangle TAB = \theta$$

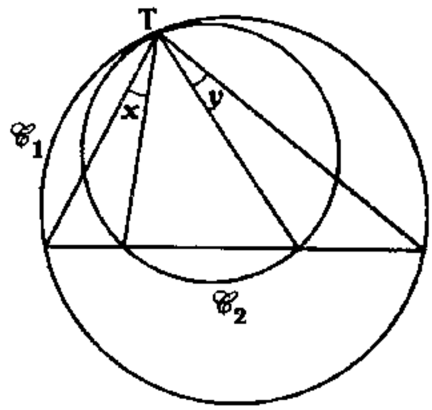
- Por ángulo inscrito y semiinscrito:

$$m\measuredangle PTS = m\measuredangle SPB = y$$

- En ΔATP: $x + \theta = \theta + y$

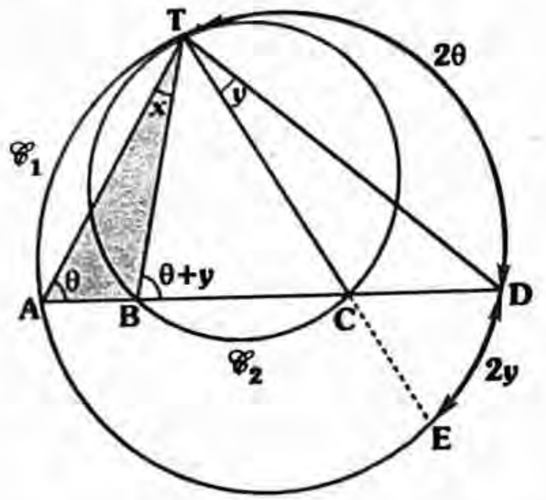
$$\therefore \quad x = y$$

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes interiores



- T: Punto de tangencia
- Se cumple: $x = y$

Prueba



- Se prolonga $\overline{TC}$ hasta que corte a $\mathscr{C}_1$ en E.
- Sea:

$$m\measuredangle TAD=\theta$$

$$\Rightarrow m\overset{\frown}{TD}=2\theta$$

- Por $\measuredangle$ inscrito:

$$m\overset{\frown}{ED}=2y$$

- Como:

$$m\overset{\frown}{TC}=m\overset{\frown}{TDE}=2\theta+2y$$

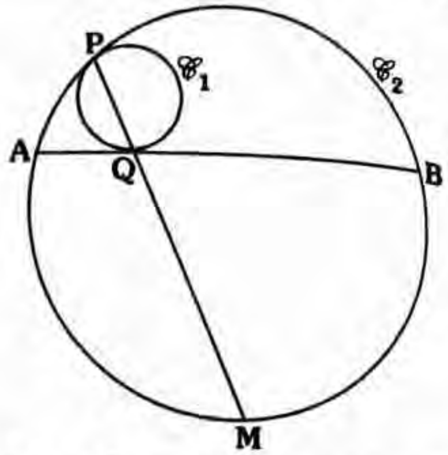
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle TBC=\theta+y$$

- En ΔABT:

$$x+\not{\theta}=\not{\theta}+y$$

$$\therefore\ x=y$$

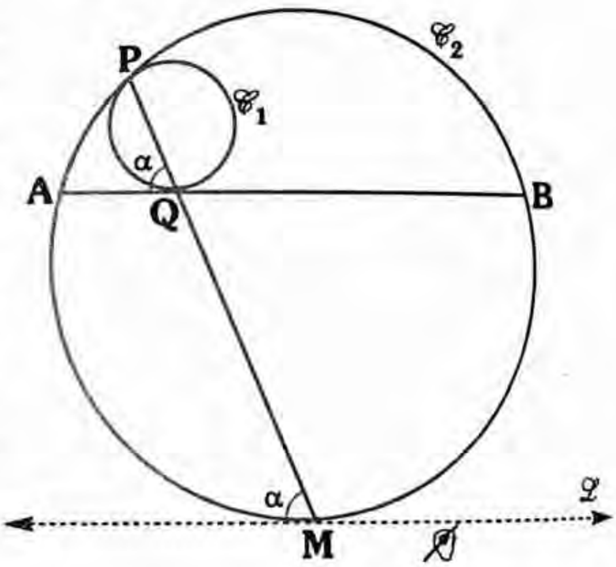
- En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes interiores.



- Si P y Q son puntos de tangencia
- Se cumple:

$$m\overset{\frown}{AM}=m\overset{\frown}{MB}$$

Prueba



- Se traza la tangente en M, como:

$$m\overset{\frown}{PQ}=m\overset{\frown}{PAM}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle AQP=m\measuredangle NMP$$

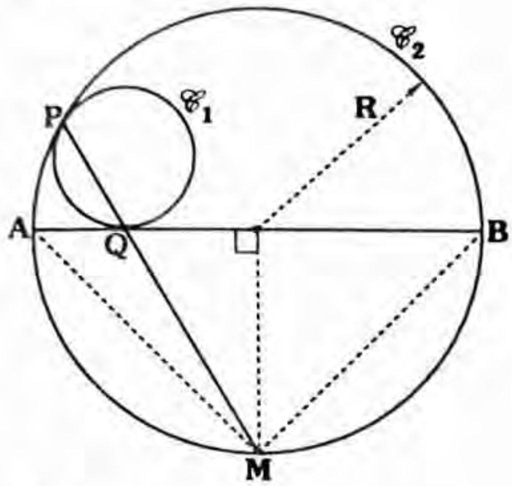
- Luego:

$$\overline{AB}\ //\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$$

$$\therefore\ m\overset{\frown}{AM}=m\overset{\frown}{MB}$$

Observación

- *Como caso particular del teorema anterior veamos:*

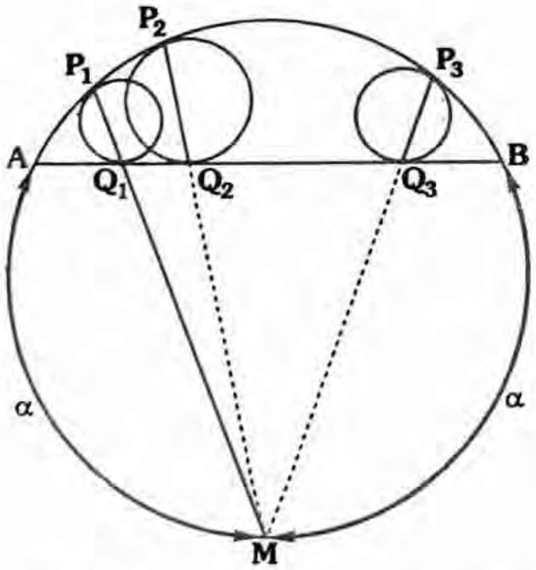


Se cumple:

$$m\widehat{AM} = m\widehat{MB} = 90°$$

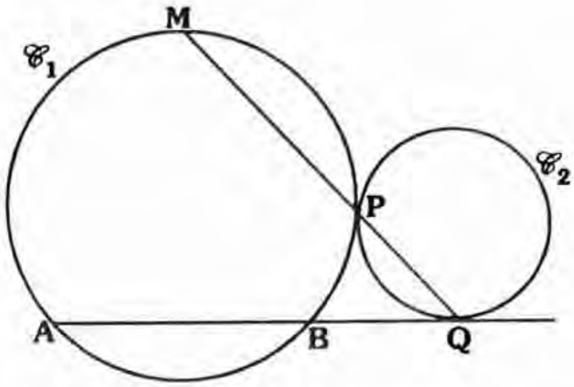
También:

$$AM = MB = R\sqrt{2}$$



- P_i *y* Q_i: *Puntos de tangencia*
- *Se cumple:* $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$, $\overleftrightarrow{P_2Q_2}$, $\overleftrightarrow{P_3Q_3}$ ... *concurren*

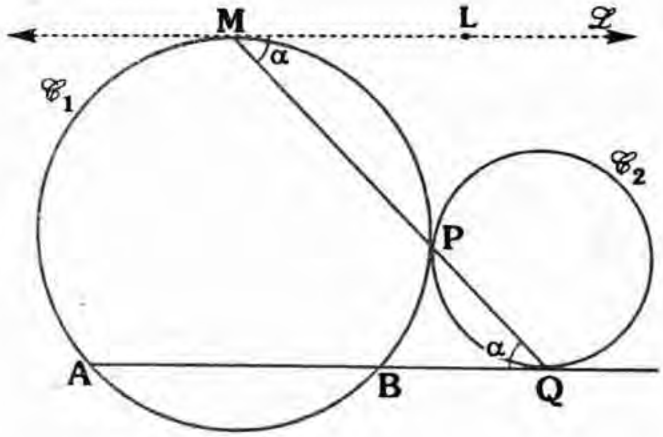
▭ $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias tangentes exteriores.



- Q y P : Puntos de tangencia
- Se cumple:

$$m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$$

Prueba



- Por M se traza la tangente a $\mathscr{C}_1$.
- Como:

$$m\widehat{MP} = m\widehat{PQ}$$

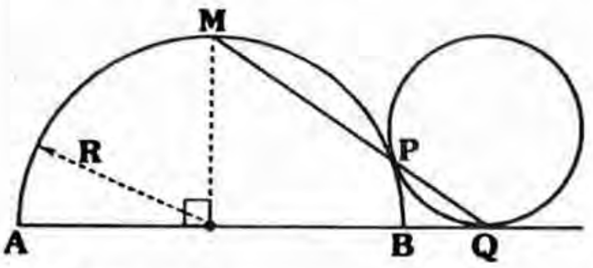
$$\Rightarrow m\measuredangle AQP = m\measuredangle PML$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \,//\, \overline{AB}$$

$$\therefore \; m\widehat{AM} = m\widehat{MPB}$$

Observación

- *Casos particulares del teorema*

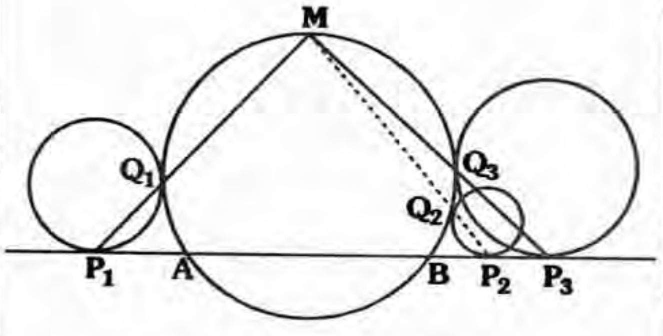


Se cumple:

$$m\widehat{AM} = m\widehat{MB} = 90°$$

$$AM = MB = R\sqrt{2}$$

- *También:*



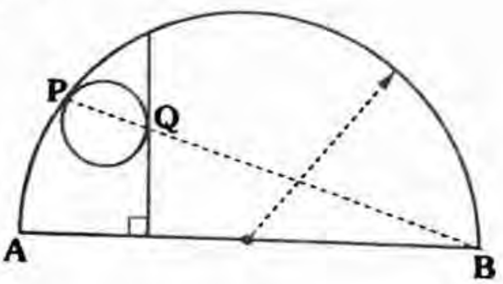
- P_i y Q_i: *Puntos de tangencia*
- *Se cumple:*

$\overleftrightarrow{P_1Q_1}$, $\overleftrightarrow{P_2Q_2}$, $\overleftrightarrow{P_3Q_3}$, ...

son concurrentes

- Los siguientes casos de colinealidad se pueden demostrar como casos particulares.

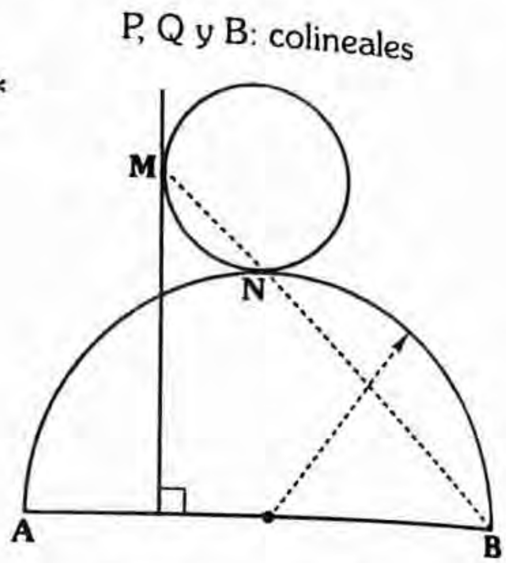
*



- P y Q: Puntos de tangencia
- Se cumple:

P, Q y B: colineales

*

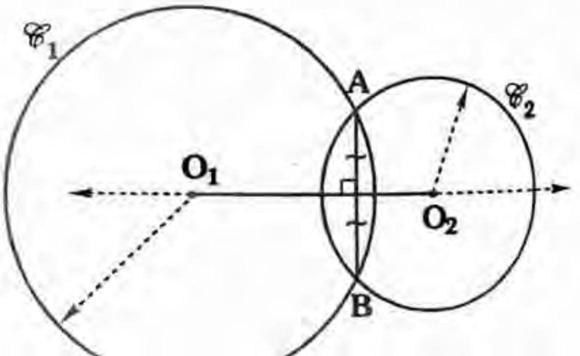


- M y N son puntos de tangencia
- Se cumple:

M, N y B: colineales

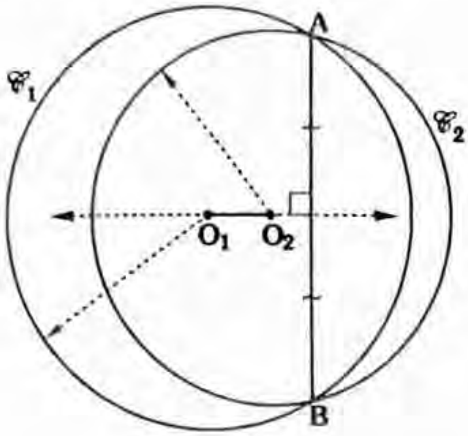
Las pruebas se deja como ejercicio para el lector.

- En dos circunferencias secantes la recta que une los centros es mediatriz de la cuerda común.

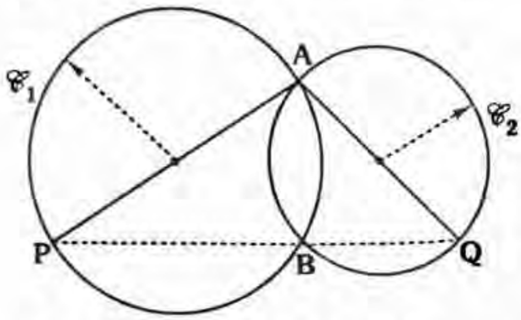


- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: secantes
- $\overline{AB}$: Cuerda común
- Se cumple: $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.

También, se puede presentar:



- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias secantes



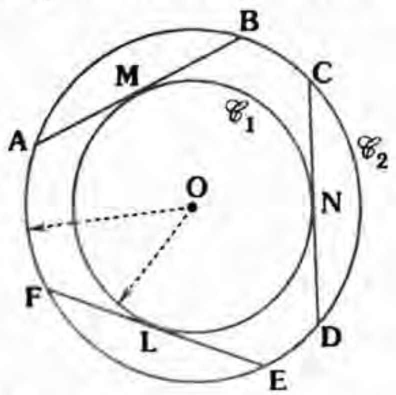
- Se cumple: P, B y Q son colineales

Prueba

- Basta observar que:

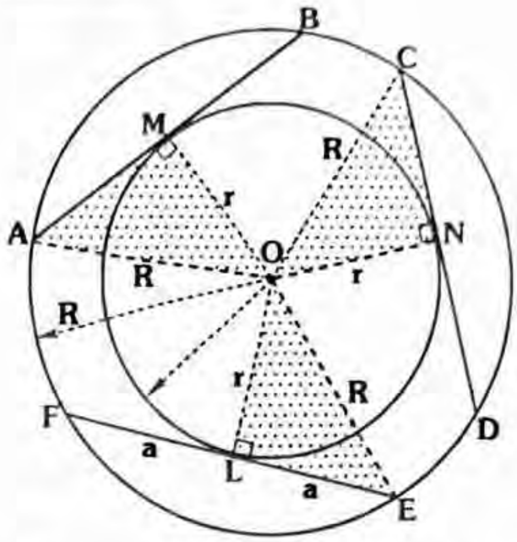
$$m\measuredangle ABP = m\measuredangle ABQ = 90^\circ$$

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias concéntricas



- M, N y L son puntos de tangencia
- Se cumple: AB=CD=FE

Prueba

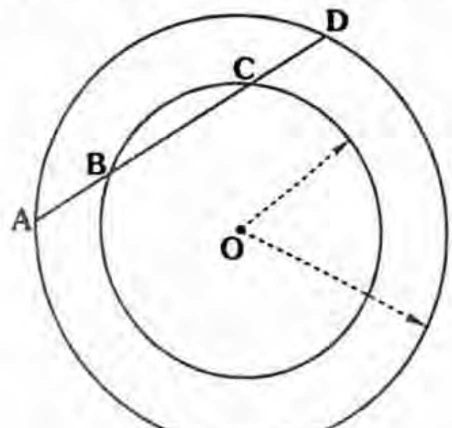


- Notemos que cada punto de tangencia es punto medio de las cuerdas
- $\triangle OLE \cong \triangle ONC \cong \triangle OMA$

$$\Rightarrow AM=CN=EL=a$$

$$\therefore AB=CD=FE$$

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: circunferencias concéntricas



- Se cumple: AB=CD

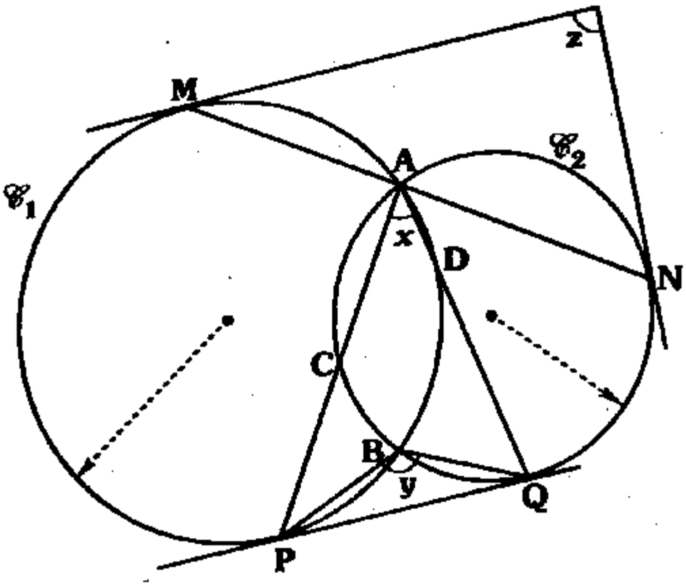
Prueba

- Se traza $\overline{OM} \perp \overline{BC}$ (M en $\overline{BC}$)

$$\Rightarrow BM=MC \text{ y } AM=MD$$

$$\therefore AB=CD$$

- $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: ortogonales



- P, Q, M y N: Puntos de tangencia
- Se cumple:

I. $m\overset{\frown}{ACB}+m\overset{\frown}{ADB}=180°$

II. $x=45°$

III. $y=135°$

IV. $z=90°$

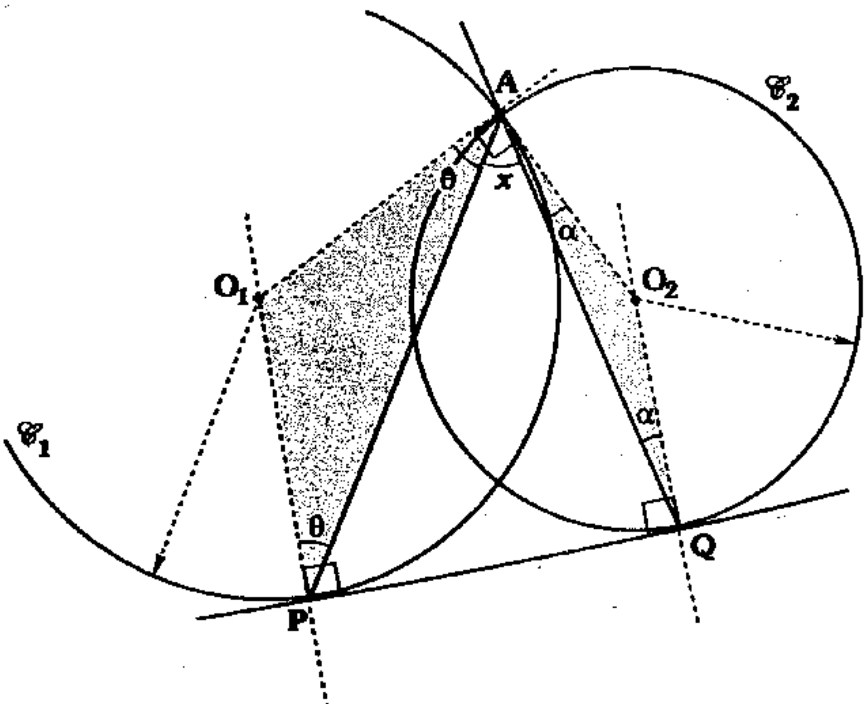
Prueba

I. La primera parte se deduce fácil, por la propiedad, como el ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ es 90°

$$\Rightarrow \; 90°=\frac{m\overset{\frown}{ACB}+m\overset{\frown}{ADB}}{2}$$

$$\therefore \; m\overset{\frown}{ACB}+m\overset{\frown}{ADB}=180°$$

II.



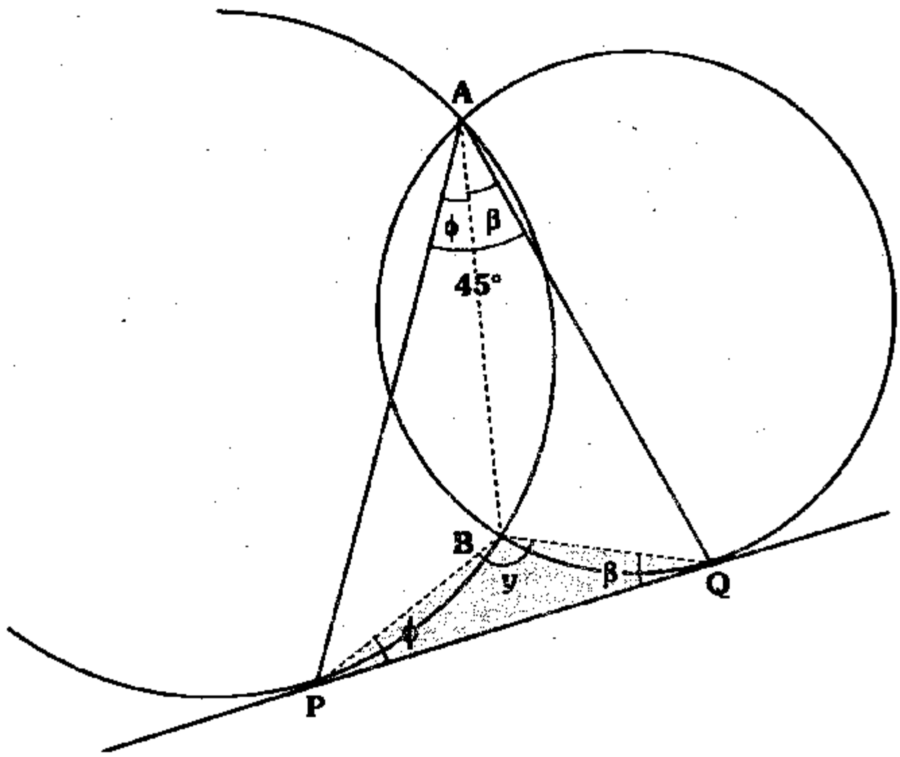
- Como $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales $\Rightarrow$ $m\sphericalangle O_1AO_2 = 90°$

$$\Rightarrow x+\theta+\alpha = 90° \quad \ldots (a)$$

- ΔO_1AP y ΔO_2AQ son isósceles
- Como: $\overleftrightarrow{O_1P} // \overleftrightarrow{O_2P}$ $\Rightarrow$ $x=\theta+\alpha$ ... (b)
- De (a) y (b): $x+x=90°$

$$\therefore \ x = 45°$$

III.



- Sea $m\sphericalangle BPQ = \phi$ y $m\sphericalangle BQP = \beta$ entonces:

$$m\widehat{PB} = 2\phi \quad y \quad m\widehat{BQ} = 2\beta$$

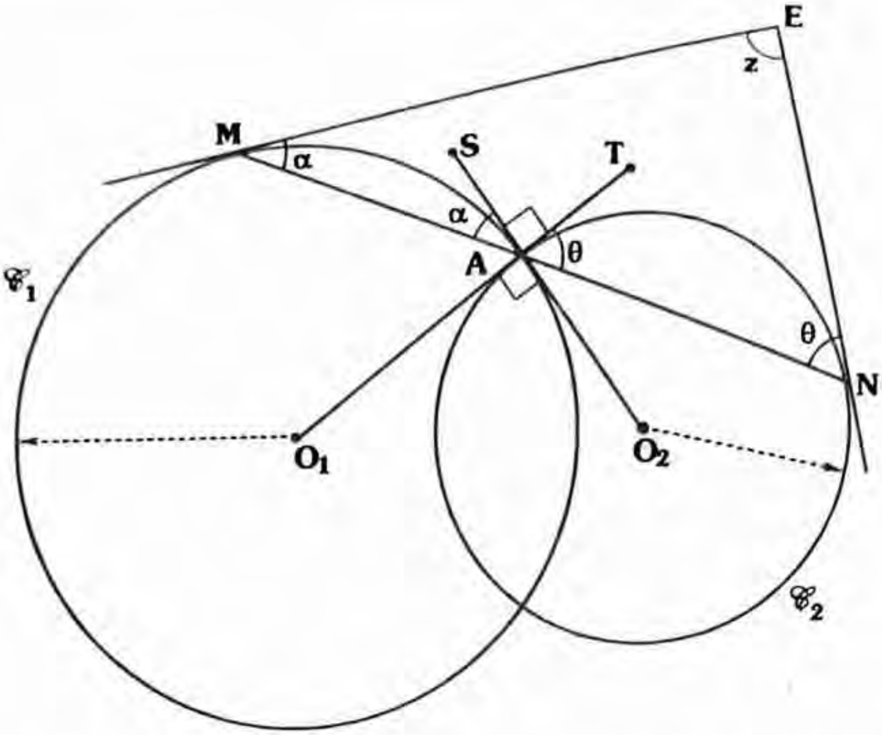
- Por ángulo inscrito:

$$m\sphericalangle PAB = \phi \quad y \quad m\sphericalangle BAQ = \beta$$

- Por propiedad anterior: $\phi+\beta = 45°$
- En ΔPBQ: $y+\underbrace{\phi+\beta}_{45} = 180°$

$$\therefore \ y = 135°$$

IV.

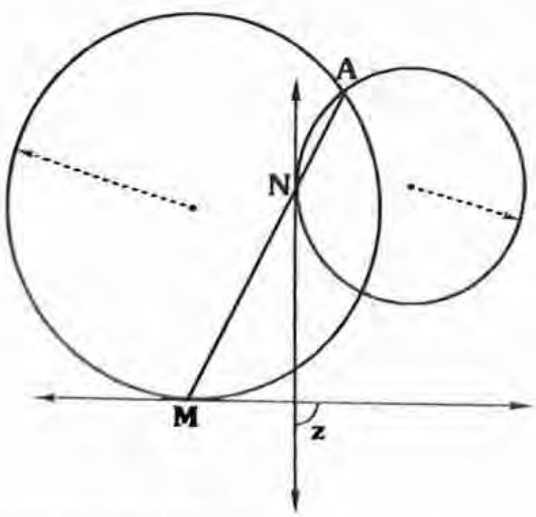


- Como $m\measuredangle O_1AO_2=90^\circ$ entonces $\overleftrightarrow{O_1A}$ es tangente a $\mathscr{C}_2$ y $\overleftrightarrow{O_2A}$ es tangente a $\mathscr{C}_1$.
- Por propiedad: $m\measuredangle EMA=m\measuredangle MAS=\alpha$ y $m\measuredangle TAN=m\measuredangle ENA=\theta$
- Notemos en A: $\alpha+\theta=90^\circ$
- En ΔENM: $z+\alpha+\theta=180^\circ$

$$\therefore\ z=90^\circ$$

Observación

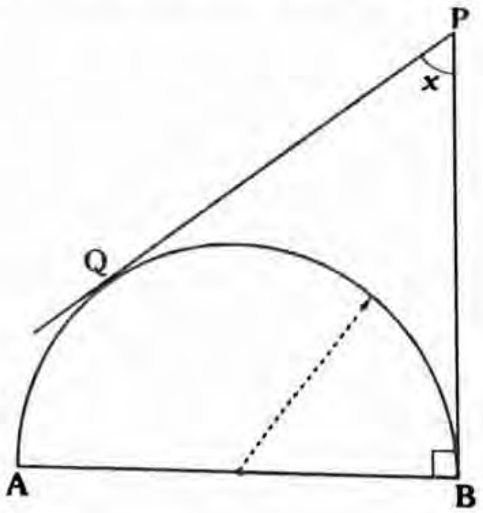
La propiedad anterior también se verifica en:



Se cumple:

$z=90^\circ$

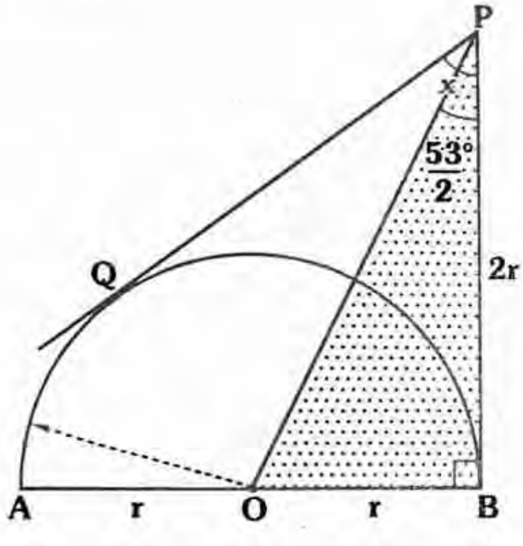
- En el gráfico, Q es punto de tangencia y AB=PB.



Se cumple:

$x=53°$

Prueba

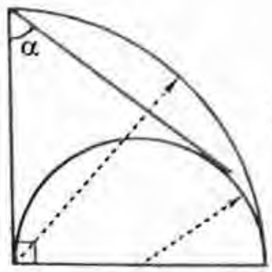


- $\overrightarrow{PO}$ es bisectriz del $\measuredangle QPB$
- $\triangle OBP$: notable de $\dfrac{53°}{2}$

$\therefore\ x=53°$

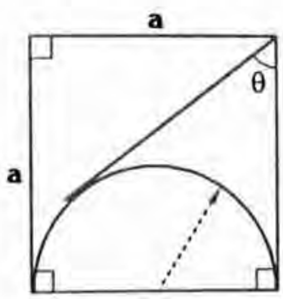
Observación

La propiedad anterior es común encontrarla en las siguientes figuras:



Se cumple:

$\alpha=53°$

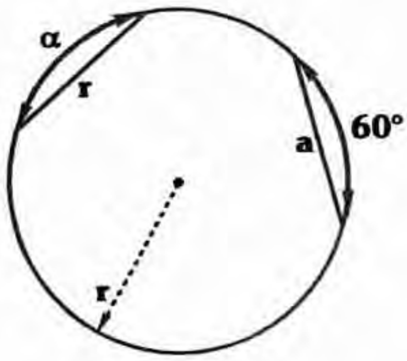


Se cumple:

$\theta=53°$

Nota

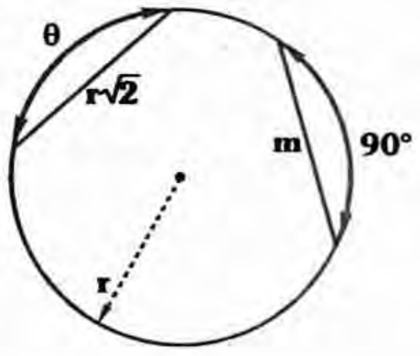
En el capítulo de "Polígonos Regulares" se estudiará muchos casos, veamos casos de relación de arcos y cuerdas:



Se cumple:

$a = r$

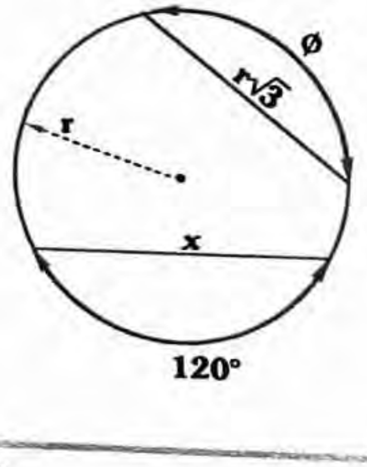
$\alpha = 60°$



Se cumple:

$m = r\sqrt{2}$

$\theta = 90°$



Se cumple:

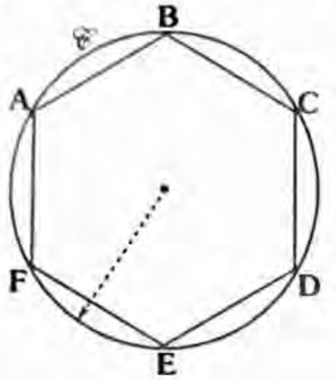
$x = r\sqrt{3}$

$\phi = 120°$

POLÍGONO INSCRITO Y CIRCUNSCRITO A UNA CIRCUNFERERENCIA

POLÍGONO INSCRITO

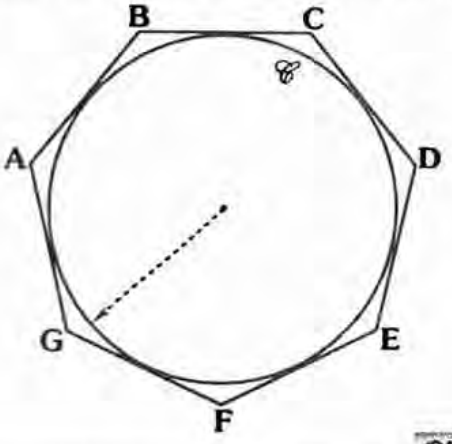
Un polígono está inscrito en una circunferencia si tiene sus vértices en dicha circunferencia.



- El polígono ABCDEF está inscrito en $\mathscr{C}$.
- La circunferencia $\mathscr{C}$ se denomina circunscrita al polígono ABCDEF.

POLÍGONO CIRCUNSCRITO

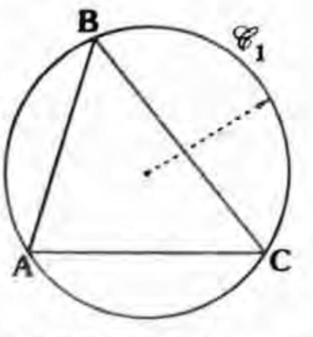
Es aquel polígono que tiene todos sus lados tangentes a la misma circunferencia.

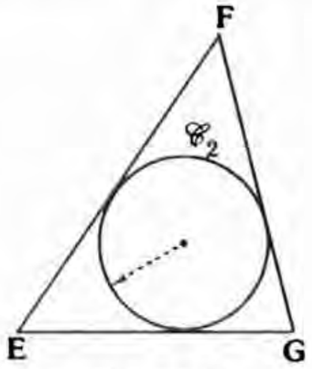


- El polígono ABCDEFG es un polígono circunscrito a la circunferencia $\mathscr{C}$.
- La circunferencia $\mathscr{C}$ está inscrita en el polígono.

Observación

- *Si una figura f_1 esta inscrita en f_2, entonces f_2 está circunscrito a f_1 y viceversa.*
- *Para un triángulo:*



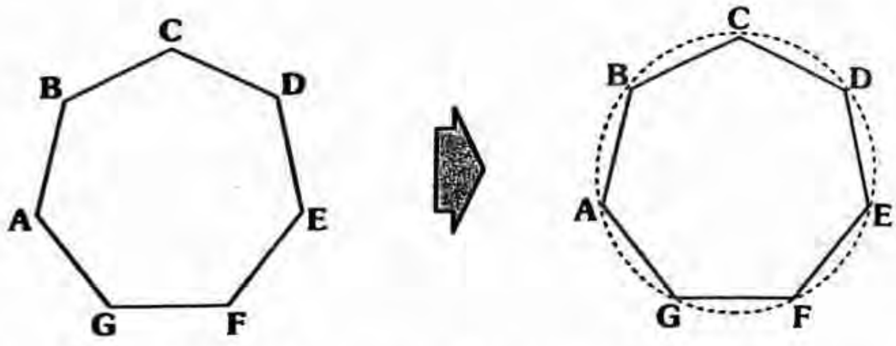


- $\ast$ ΔABC *inscrito en* $\mathscr{C}_1$
- $\ast$ $\mathscr{C}_1$ *es circunscrita al* ΔABC

- $\ast$ ΔEFG *inscrito en* $\mathscr{C}_2$
- $\ast$ $\mathscr{C}_2$ *esta inscrito en el* ΔEFG

POLÍGONO INSCRIPTIBLE

Un polígono se denomina inscriptible cuando por sus vértices puede pasar una misma circunferencia.

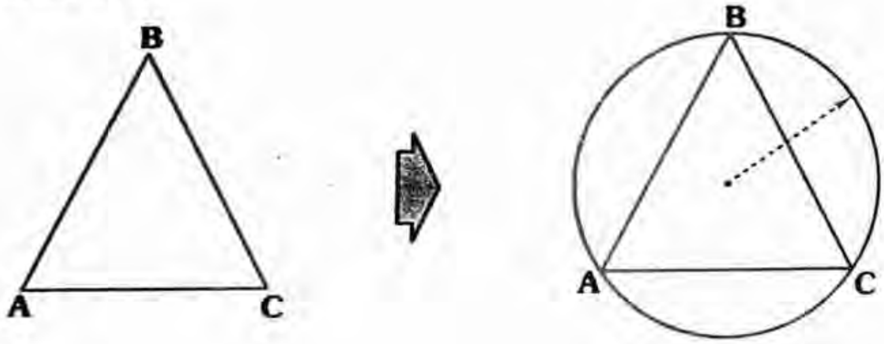


Si los vértices del polígono ABCDEFG se pueden ubicar en una misma circunferencia.

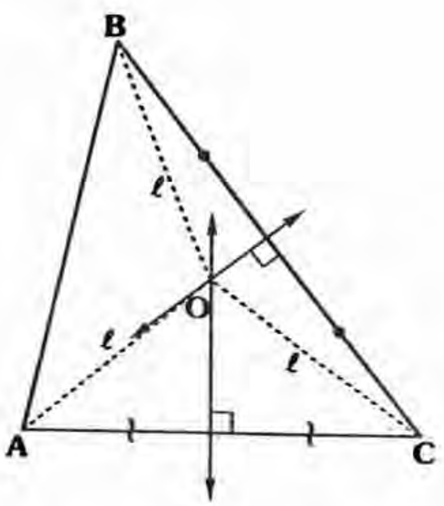
$\Rightarrow$ ABCDEFG es inscriptible

TEOREMA

Todo triángulo es inscriptible



Prueba



- Se trazan las mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ las cuales se cortan en O.
- Por teorema de la mediatriz:

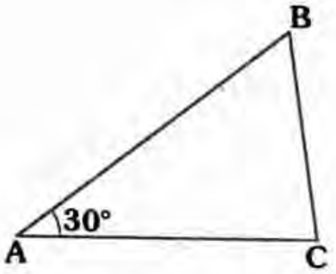
$$OA=OC=OB$$

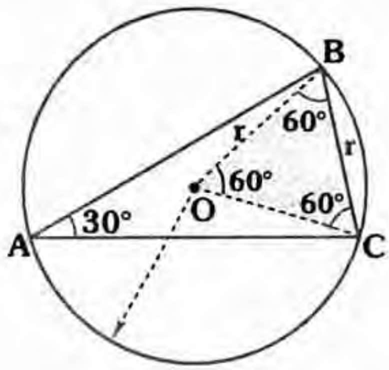
- Como O equidista de A, B y C en dichos puntos se ubicarán en una circunferencia de centro O.
- Al punto O se llama circuncentro del ΔABC .

Nota

- *No todos los polígonos son inscriptibles.*
- *Más adelante estudiaremos las condiciones para que un cuadrilátero sea inscriptible.*

- Como por los vértices de un triángulo siempre puede pasar una circunferencia entonces es recomendable en algunos problemas trazar dicha circunferencia, en especial cuando hay un ángulo que mide 30°.

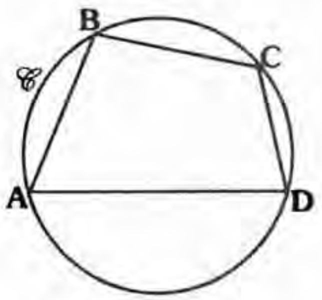




Se cumple: ΔOBC es equilátero

ESTUDIO DEL CUADRILÁTERO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

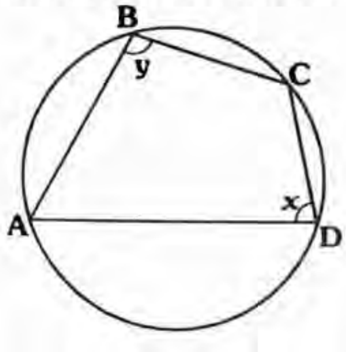
Un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia si tiene sus vértices en dicha circunferencia.



- ⏢ABCD: inscrito en $\mathscr{C}$
- $\mathscr{C}$: circunferencia circunscrita al ⏢ABCD

PROPIEDADES

❶ En todo cuadrilátero inscrito, sus ángulos opuestos son suplementarios.



En el gráfico, se cumple:

$$x + y = 180°$$

Prueba

– Por ángulo inscrito:

$$m\overset{\frown}{ABC} = 2x \quad y \quad m\overset{\frown}{ADC} = 2y$$

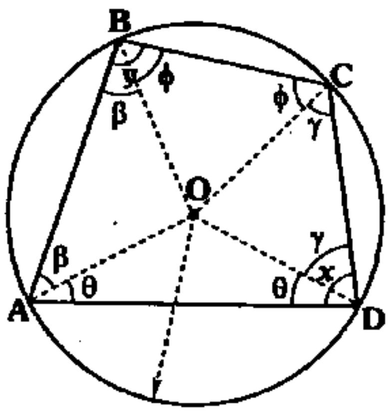
– Como:

$$m\overset{\frown}{ABC} + m\overset{\frown}{ADC} = 360°$$

$$\Rightarrow \; 2x+2y=360°$$

$$\therefore \; x+y=180°$$

Otra forma



– Como los triángulos AOD, DOC, COB y AOB son isósceles entonces: $x=\theta+\gamma$ y $y=\beta+\phi$

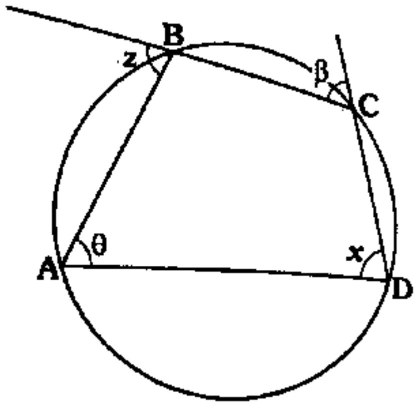
– En ▱ABCD:

$$2\beta+2\phi+2\gamma+2\theta=360°$$

$$\Rightarrow \; \underbrace{\beta+\phi}+\underbrace{\gamma+\theta}=180°$$

$$\therefore \; y + x = 180°$$

2 En todo cuadrilátero inscrito un ángulo interior tiene igual medida que su ángulo exterior opuesto.

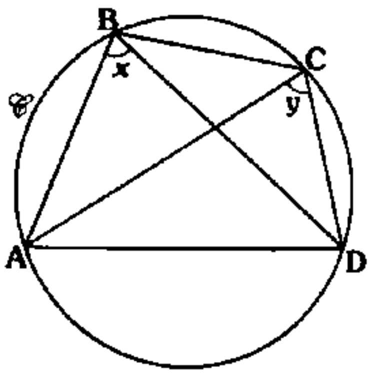


Se cumple: $x=z$

También: $\theta=\beta$

La prueba es consecuencia de la anterior.

3 En todo cuadrilátero inscrito las diagonales determinan con los lados opuestos ángulos de igual medida.



▱ABCD inscrito en $\mathscr{C}$

Se cumple:

$$x=y$$

Prueba

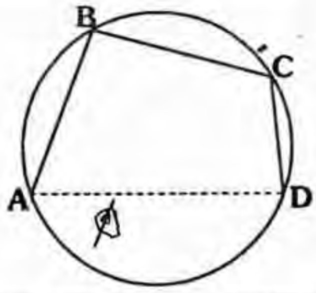
Por ángulo inscrito:

$$m\overset{\frown}{AD} = 2x = 2y$$

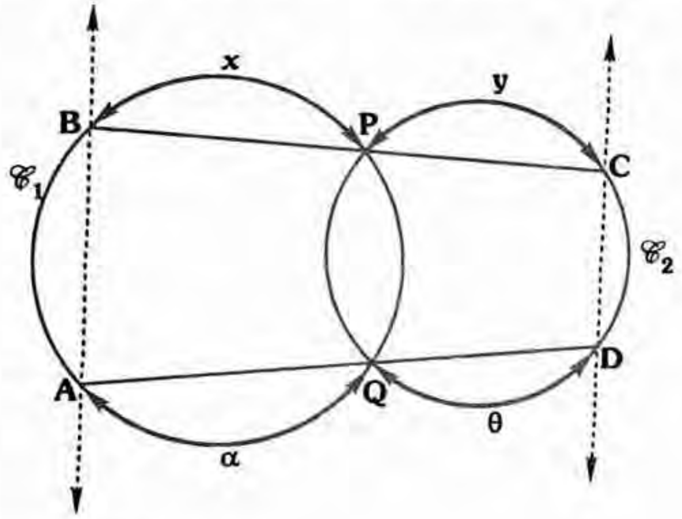
$$\therefore \; x=y$$

Nota

Cuando se tenga tres cuerdas consecutivas en una circunferencia es recomendable completar el cuadrilátero inscrito.



❹ En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias secantes.



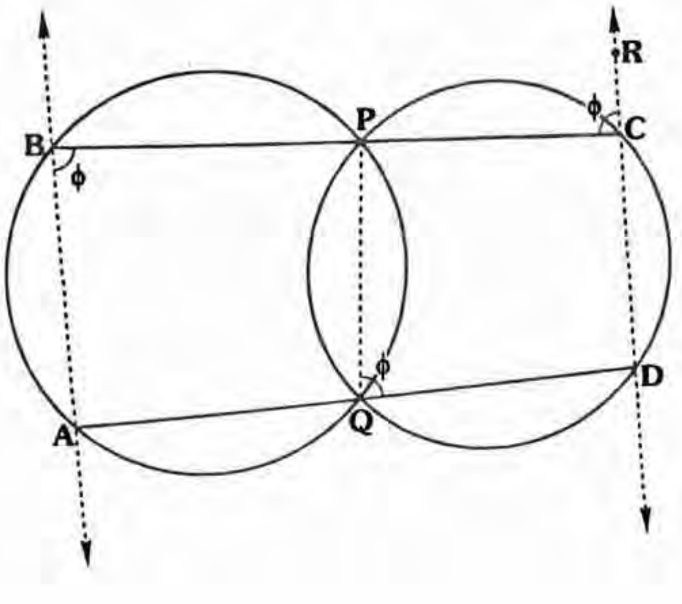
Se cumple:

I) $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

II) $x+y=\alpha+\theta$

Prueba

I)



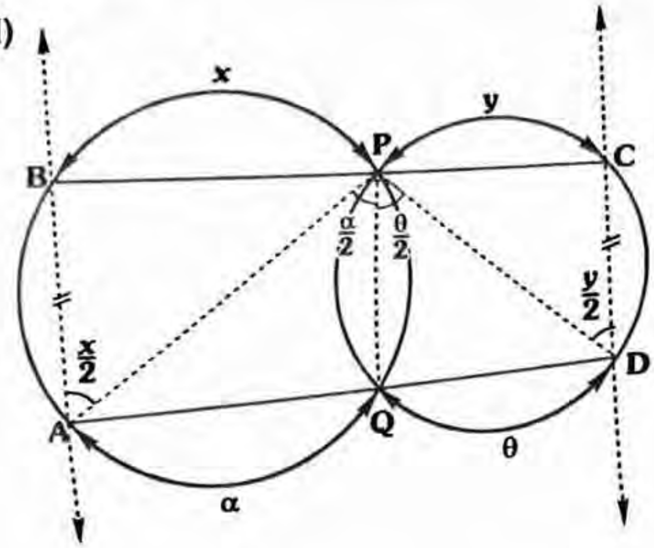
- Se traza $\overline{PQ}$ entonces ⏢ABPQ y ⏢QPCD son inscritos entonces:

$$m\sphericalangle ABP = m\sphericalangle PQD = m\sphericalangle PCR$$

- Por el recíproco de ángulos alternos, internos:

$$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$

II)



- Por propiedad anterior: $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$
- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle BAP=\frac{x}{2} \quad ; \quad m\measuredangle APQ=\frac{\alpha}{2}$$

$$m\measuredangle QPD=\frac{\theta}{2} \quad y \quad m\measuredangle PDC=\frac{y}{2}$$

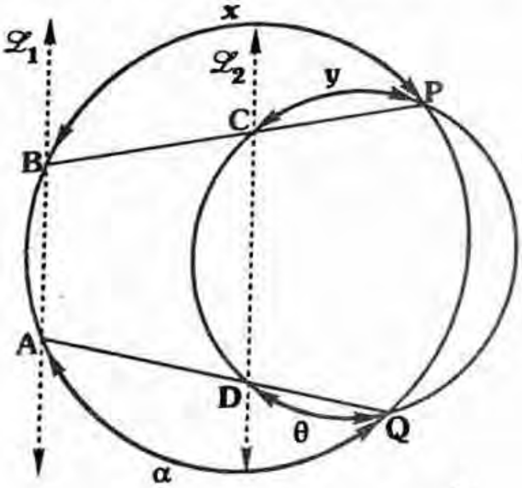
- Por propiedad de las paralelas:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad x+y=\alpha+\theta$$

Observación

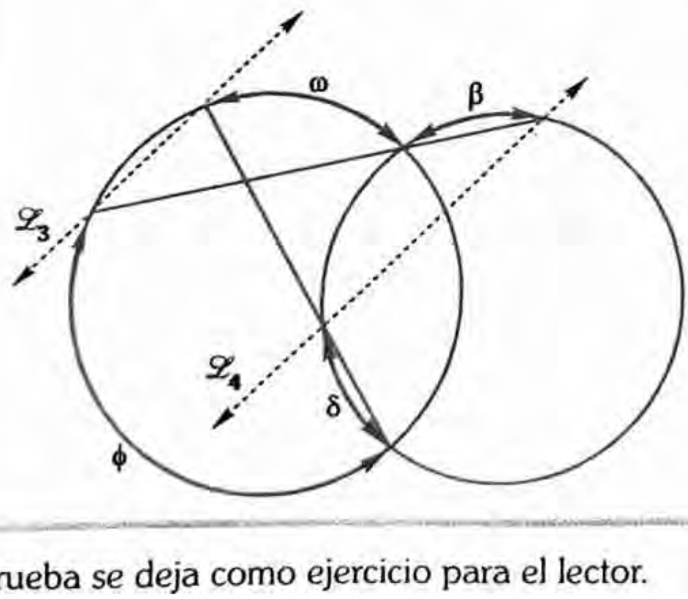
Veamos otras posibilidades del último teorema:



Se cumple:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y

$x-y=\alpha-\theta$



Se cumple:

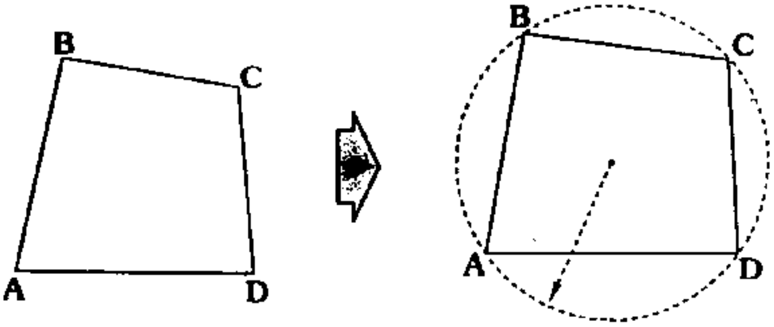
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$ y

$\phi-\delta=\omega+\beta$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE A UNA CIRCUNFERENCIA

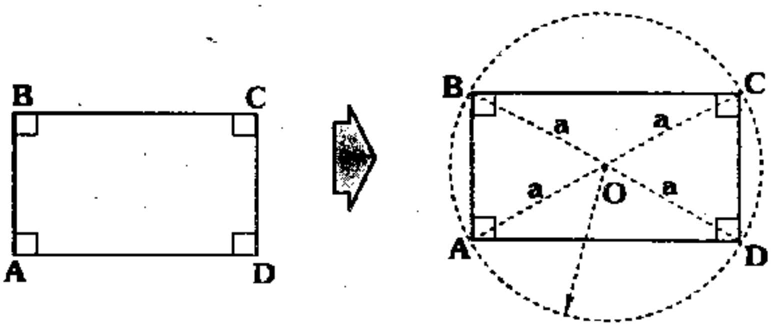
Un cuadrilátero se denomina inscriptible si por sus vértices puede pasar una misma circunferencia.



Si el ◻ABCD se puede inscribir en una circunferencia entonces ◻ABCD es inscriptible.

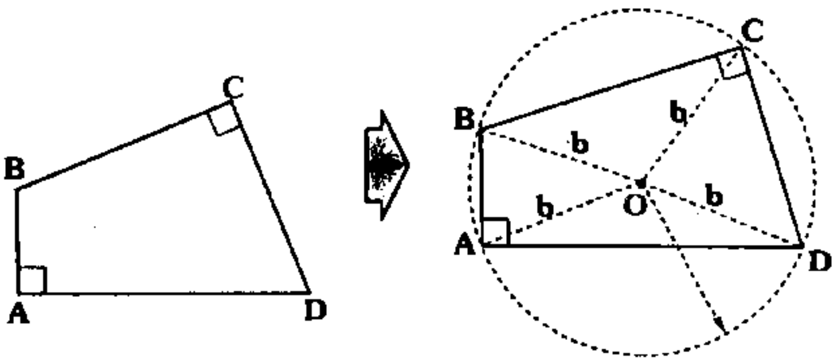
Ejemplos

- El rectángulo en un cuadrilátero inscriptible



Como AO=OC=BO=OD, O es el centro de una circunferencia que pasa por A, B, C y D.

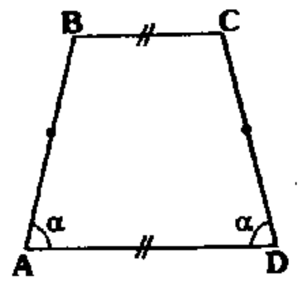
- El cuadrilátero de ángulos opuestos rectos es inscriptible.

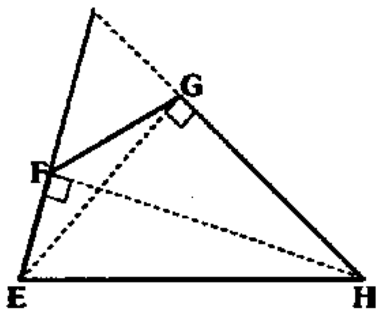


En el ⊿BAD, se traza la mediana $\overline{AO} \Rightarrow BO = OD = AO = b$ y en el ⊿BCD, BO=b. O equidista de A, B, C y D.

$\therefore$ ◻ABCD es inscriptible

- Los siguientes casos también son inscriptibles.



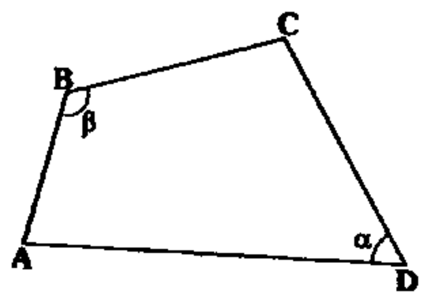


Los cuadrilateros ABCD y EFGH son inscriptibles.

TEOREMAS

(Casos comunes para reconocer a un cuadrilátero inscriptible)

◆ Todo cuadrilátero convexo cuyos ángulos opuestos son suplementarios es inscriptible.

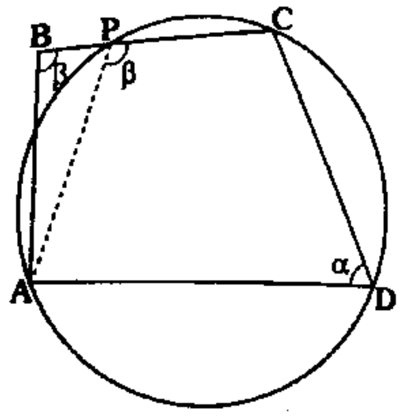


Si $\alpha+\beta=180°$

$\Rightarrow$ ⏢ABCD es inscriptible

Prueba:

- Se traza la circunferencia que pasa por A, D y C supongamos que no pasa por B.



- Se tendrá el ⏢APCD inscrito entonces $m\measuredangle APC+\alpha=180°$, como:

$$\alpha+\beta=180°$$

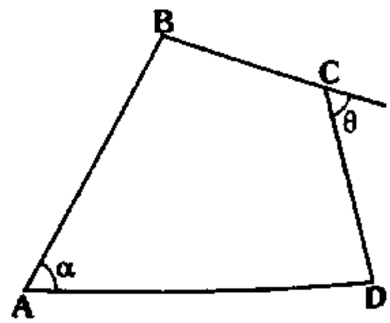
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle APC=\beta$$

- En ΔABP:

$$m\measuredangle ABP=m\measuredangle APC$$

$$\Rightarrow \quad B=P$$

◆ Todo cuadrilátero que tiene un ángulo interior y su ángulo exterior opuesto de igual medida, es inscriptible.

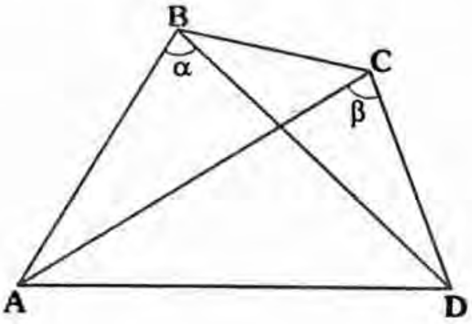


Si $\alpha=\theta$

$\Rightarrow$ ⏢ABCD es inscriptible

La prueba es análoga a la anterior.

- En todo cuadrilátero convexo en el que las diagonales determinan ángulos de igual medida con los lados opuestos, es inscriptible.



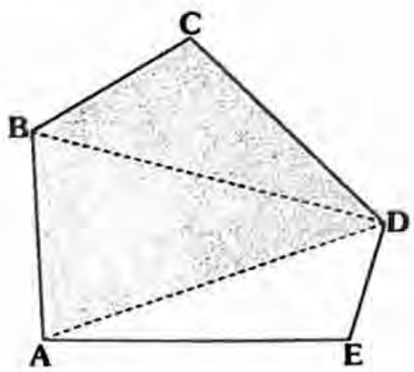
Si $\alpha=\beta$

$\Rightarrow \square ABCD$ es inscriptible.

La prueba es análoga a la primera.

Observación

- *Si dos cuadriláteros que tienen como vértices los del pentágono son inscriptibles (por ejemplo:* ABCD *y* ABDE*)*

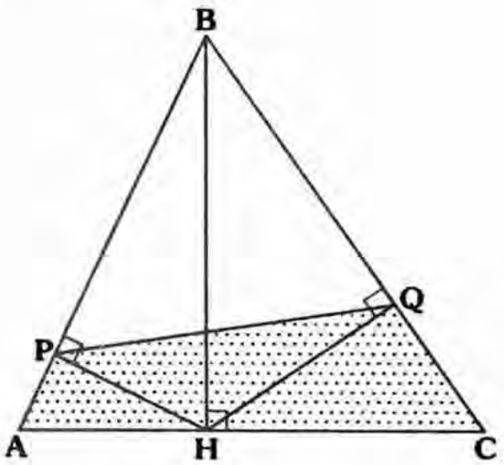


Si ABCD *y* ABDE *son inscriptibles entonces* ABCDE *es inscriptible*

ALGUNOS CUADRILATEROS INSCRIPTIBLES

Acontinuación veremos algunos cuadriláteros inscriptibles que están presentes en diversas figuras algunas relacionadas con circunferencias, ángulos rectos o puntos medios.

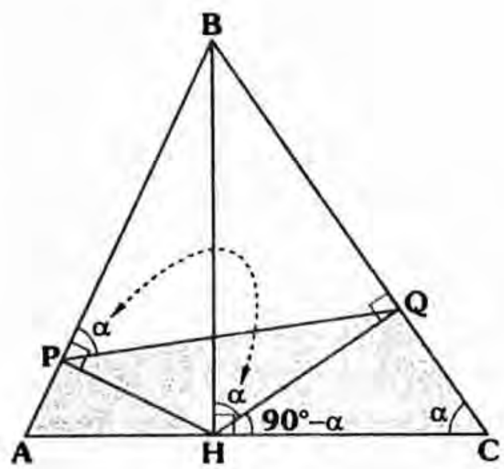
Resulta muy interesante que definidos cuatro puntos con cierta característica, por ellos pase una misma circunferencia.

- 

Se cumple:

$\square APQC$ es inscriptible

Prueba



- Sea $m\sphericalangle BCA = \alpha$

$\Rightarrow m\sphericalangle QHC = 90° - \alpha$

$\Rightarrow m\sphericalangle QHC = \alpha$

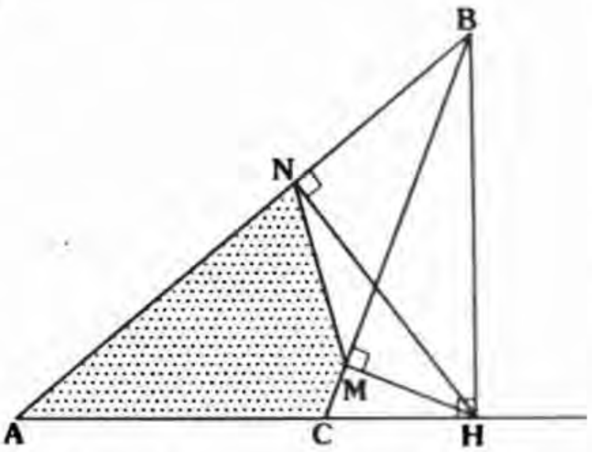
- ⏢HPBQ: inscriptible

$\Rightarrow m\sphericalangle QPB = \alpha$

- Como: $m\sphericalangle ACQ = m\sphericalangle QPB$

$\Rightarrow$ ⏢APQC: inscriptible

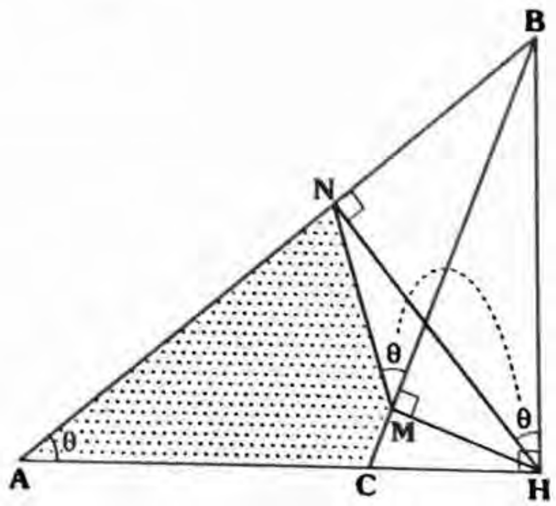
◆



Se cumple:

⏢ANMC: inscriptible

Prueba



- Sea: $m\sphericalangle BAC = \theta$
- En ◿AHB:

$m\sphericalangle HNB = \theta$

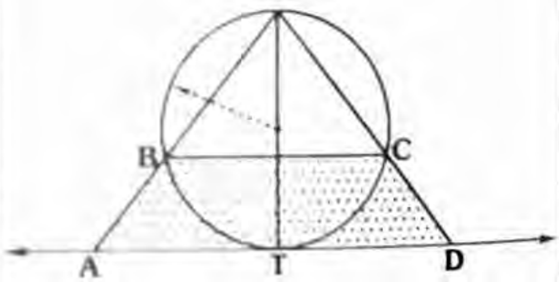
- Como el ⏢HMNB es inscriptible

$m\sphericalangle HMB = \theta$

$\therefore$ ⏢ANMC es inscriptible

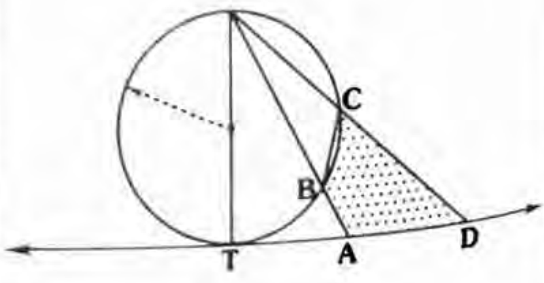
Observación

Los siguientes casos son en realidad los casos anteriores



Se cumple

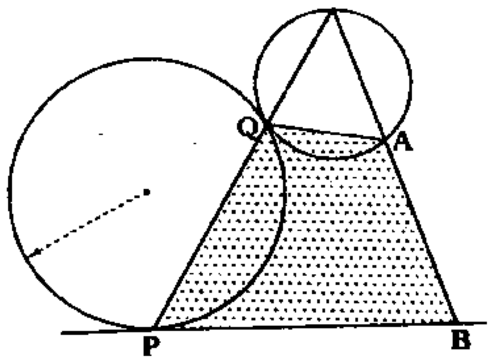
⏢ABCD: *inscriptible*



Se cumple:

⏢ABCD *es inscriptible*

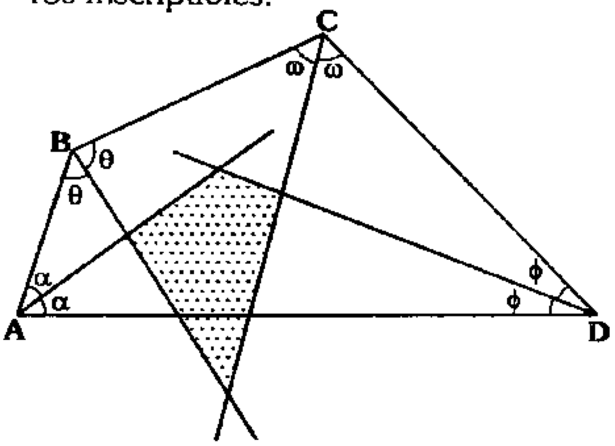
◆ P y Q son puntos de tangencia

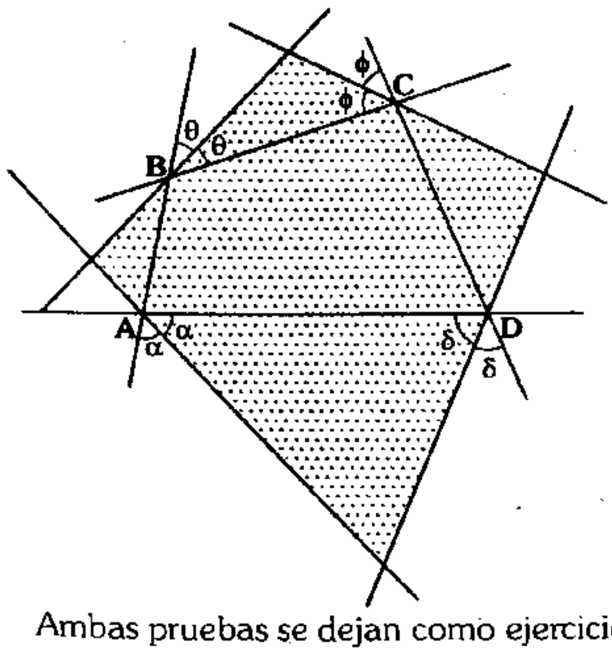


Se cumple que el ⌂PQAB es inscriptible

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

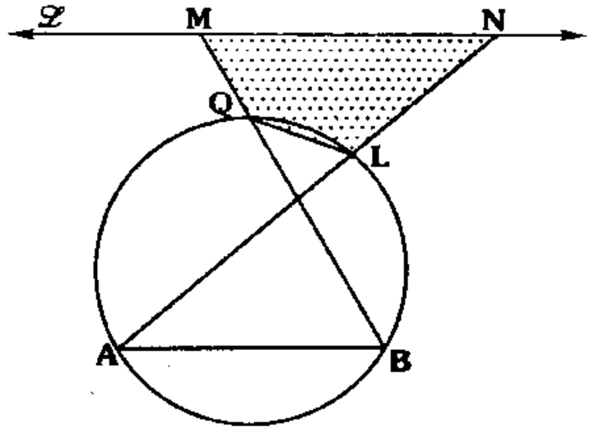
◆ En los dos casos indicados, las regiones sombreadas corresponden a cuadriláteros inscriptibles.





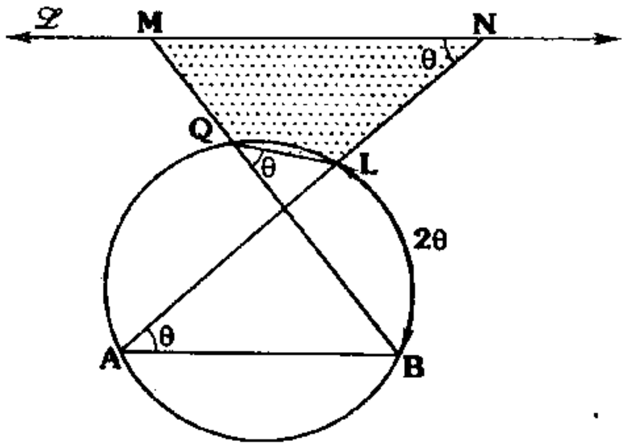
Ambas pruebas se dejan como ejercicio.

◆ En el gráfico, $\overline{AB} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$



Se cumple que el ⌂MNLQ es inscriptible

Prueba



- Sea:

$$m\sphericalangle BAL = \theta$$

$$\rightarrow\ m\sphericalangle ANM = \theta$$

- Como:

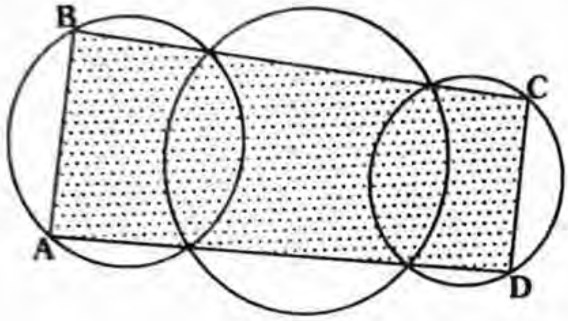
$$m\overset{\frown}{LB} = 2\theta$$

$$\rightarrow\ m\sphericalangle LQB = \theta$$

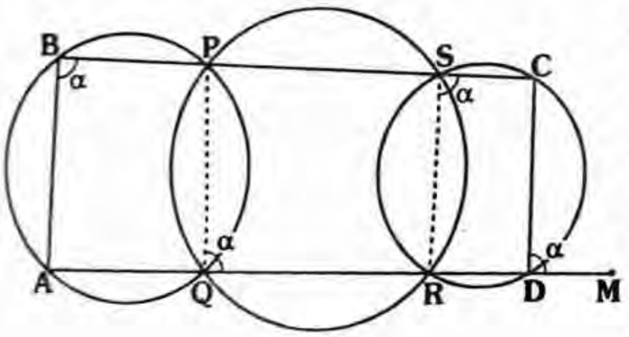
$\therefore$ ⌂MNLQ es inscriptible

◆ En el gráfico, se cumple:

⏢ABCD es inscriptible



Prueba



- Notemos que los cuadrilateros ABPQ, QPSR y RSCD son inscritos.
- Sea:

$$m\sphericalangle ABP = \alpha$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle PQR = \alpha$$

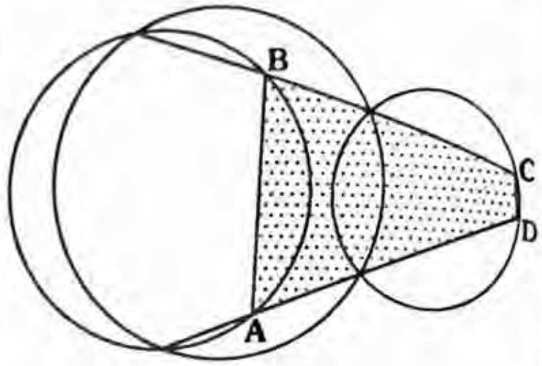
$$\Rightarrow m\sphericalangle RSC = \alpha \quad y$$

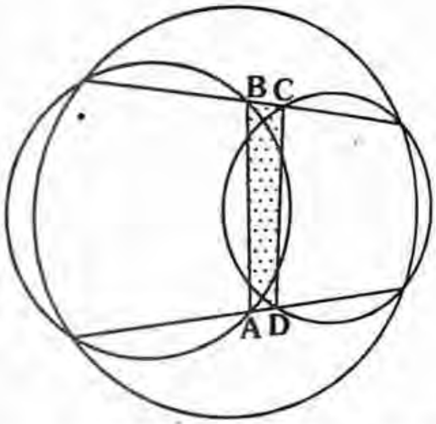
$$m\sphericalangle CDM = \alpha$$

∴ ⏢ABCD es inscriptible.

Observación

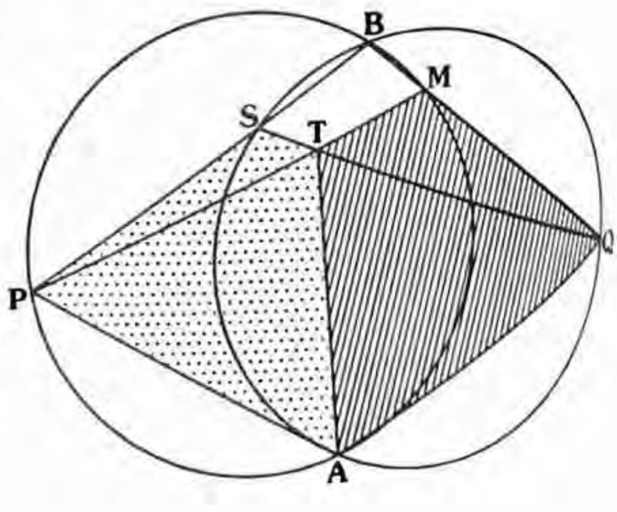
En los siguientes casos también se cumple:



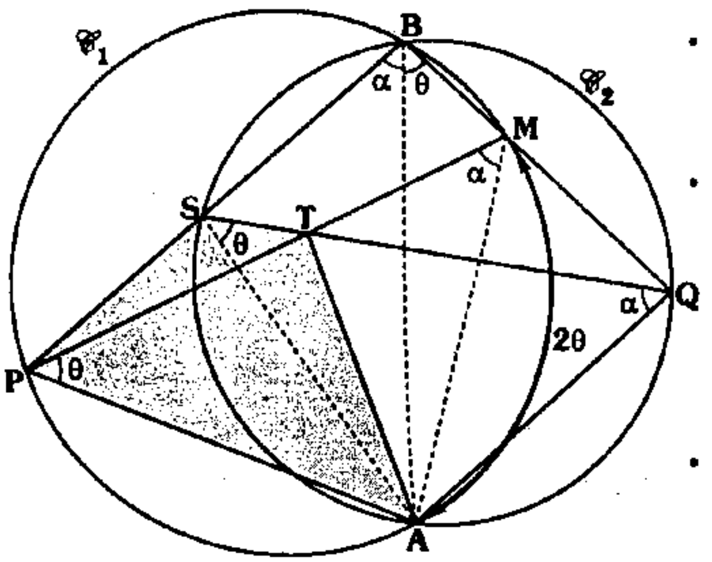


◆ En el gráfico, se cumple:

⏢PSTA y ⏢ATMQ: inscriptibles



Prueba



- Sea $m\measuredangle APM=\theta$ entonces en $\mathscr{C}_1$:

$$m\measuredangle ABM=\theta$$

- En $\mathscr{C}_2$:

$$m\measuredangle ASQ=m\measuredangle ABQ=\theta$$

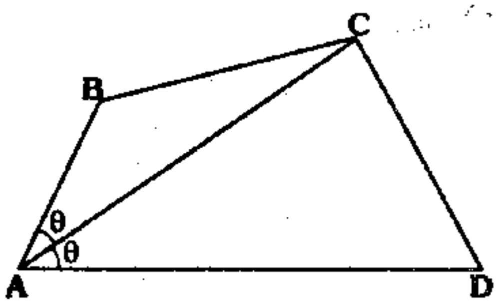
$$m\measuredangle APT=m\measuredangle AST$$

$\square$PSTA: inscriptible

- Análogamente:

$\square$ATMQ es inscriptible

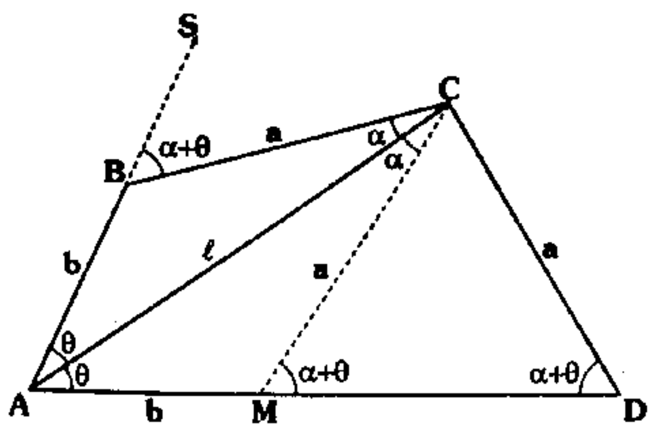
◆ En el gráfico, $BC=CD$ y $AB\neq AD$



Se cumple: $\square$ABCD es inscriptible

Prueba

Supongamos que $AD>AB$



- Sea $AM=AB$

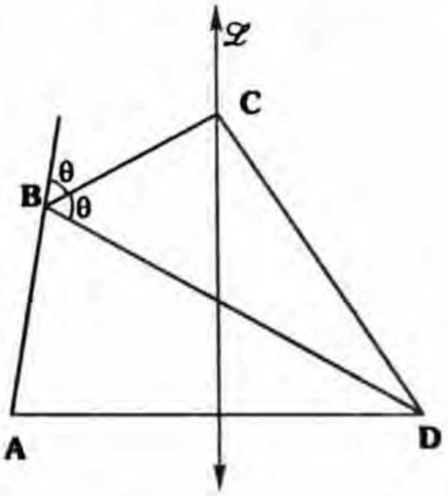
$\Rightarrow \Delta ABC\cong\Delta AMC$ (LAL)

$\Rightarrow BC=CM$

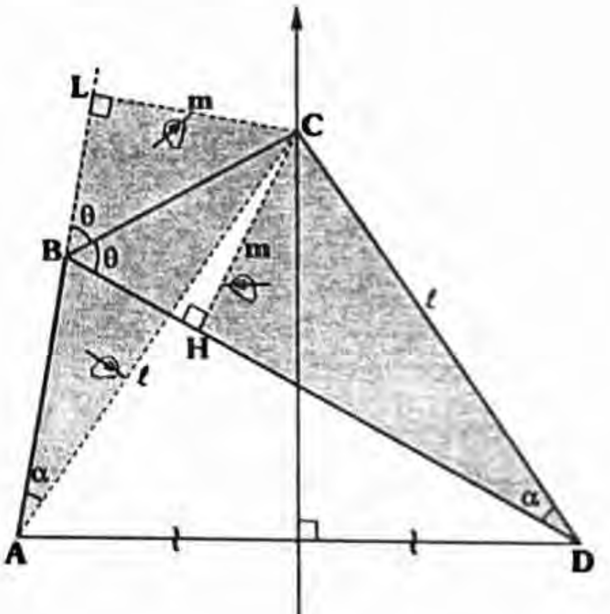
$\Rightarrow m\measuredangle ADC=m\measuredangle SBC\in \ell$

$\square$ABCD es inscriptible

◆ En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AD}$. Se cumple que el ⏢ABCD es inscriptible.



Prueba

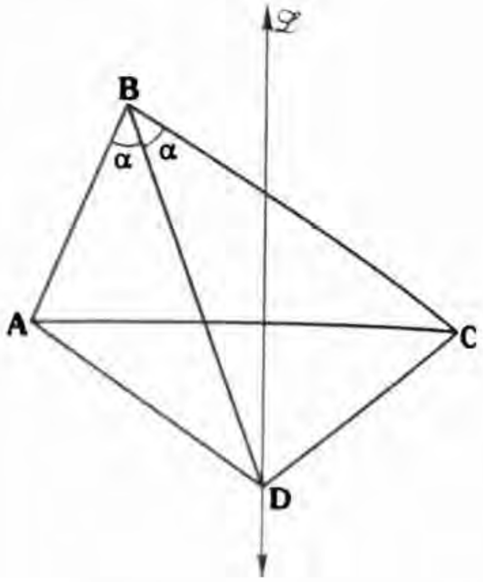


- Se traza $\overline{CL} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $\overline{CH} \perp \overline{BD}$ entonces CL=CH
- Por teorema de la mediatriz: CA=CD
- ◺ALC ≅ ◺CHD

  ⇒ m∢CAL=m∢CDB

∴ ⏢ABCD es inscriptible

◆ En el gráfico, AB ≠ BC y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AD}$. Se cumple que el cuadrilátero ABCD es inscriptible.

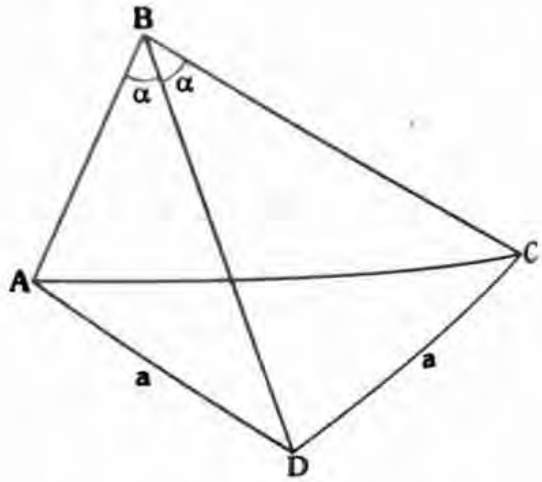


Prueba

- Por teorema de la mediatriz:

  DA=DC

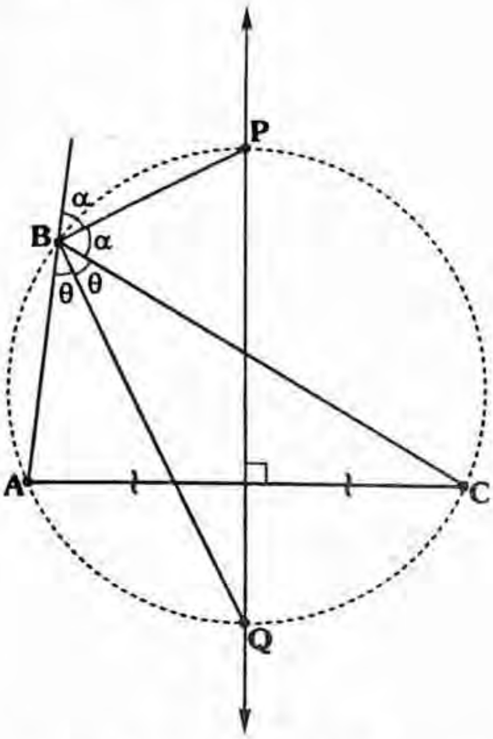
- Como AB ≠ CD entonces es el mismo caso resuelto en la pág. 61.



⏢ABCD: inscriptible

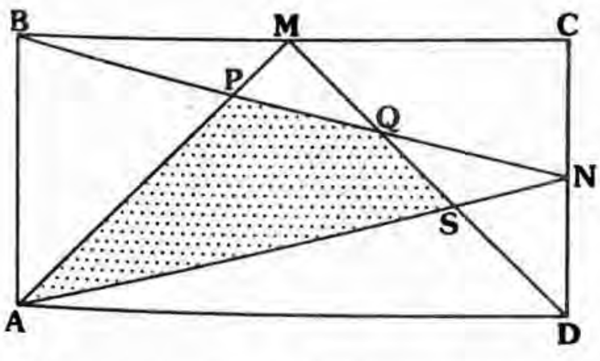
Observación

Juntando los dos gráficos anteriores, tendremos:



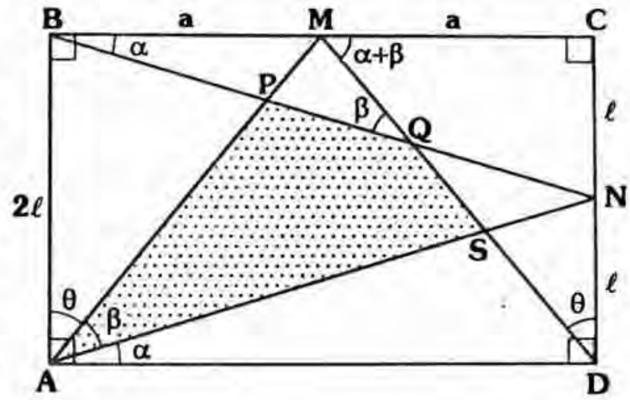
Se cumple que ABPCQ *es inscriptible.*

◆ En el gráfico, ABCD es un rectángulo, M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$.



Se cumple que $\square$APQS es inscriptible.

Prueba



- $\triangle ABM \cong \triangle DCM$

  $\rightarrow m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle CDM = \theta$

- $\triangle DAN \cong \triangle CBN$

  $\rightarrow m\sphericalangle NAD = m\sphericalangle NBC = \alpha$

- Sea:

  $m\sphericalangle PAS = \beta$

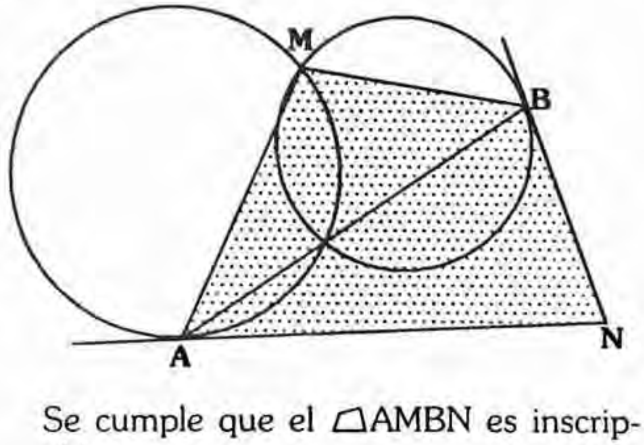
  $\rightarrow \alpha+\beta+\theta = 90°$

- En ΔBMQ:

  $m\sphericalangle BQM = \beta$

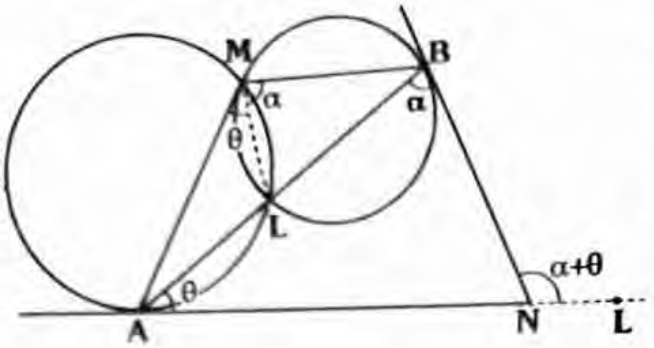
  $\therefore$ $\square$ABQS: inscriptible

◆ A y B son puntos de tangencia



Se cumple que el $\square$AMBN es inscriptible.

Prueba



- Como :

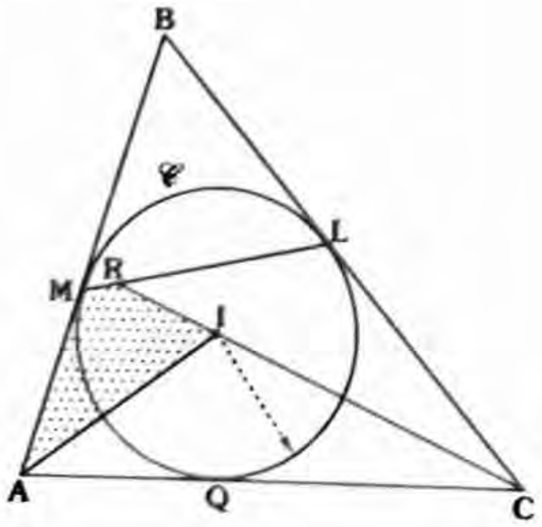
  m∢AML = mBAN = θ y

  m∢LMB = m∢LBN

  → m∢BNL = α∢θ

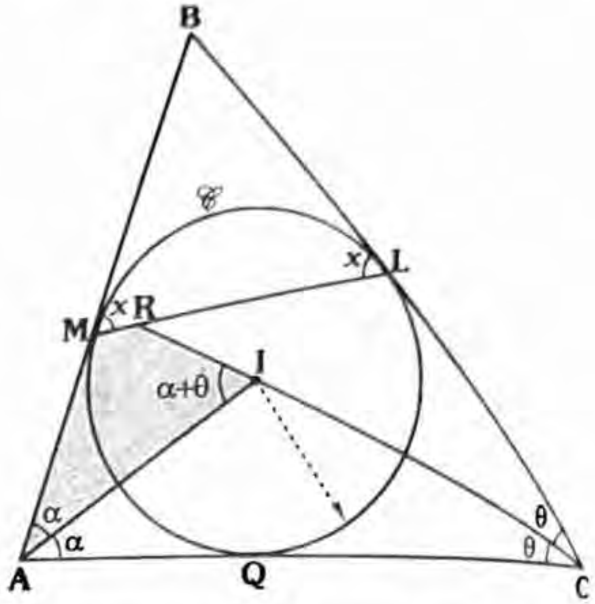
  ∴ ⌂AMBN es incriptible

◆ En el gráfico, 𝒞 es la circunferencia inscrita en el ΔABC .
Se cumple:



⌂AMRI: inscriptible

Prueba



- Sea : m∢IAC = α y m∢ACI = θ

  ⇒ m∢IAM = α y m∢ICL = θ

- En ΔAIC :

  m∢AIR = α + θ

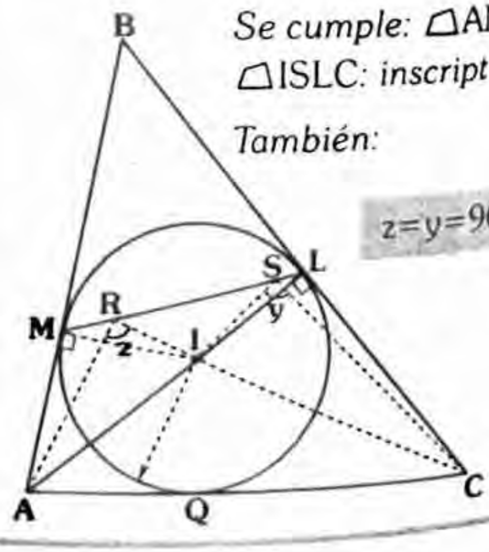
- En ⌂AMLC:

  $x + x = 2\alpha + 2\theta$

  $\Rightarrow x = \alpha + \theta$

- Como: m∢AIR = m∢RMB entonces el ⌂AMRI es inscriptible.

Observación ①



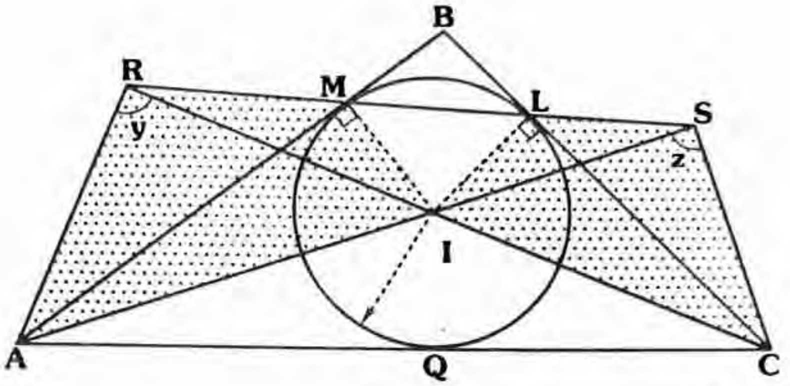
Se cumple: ⌂AMRI y ⌂ISLC: *inscriptibles*

También:

$z = y = 90°$

Observación (2)

Otra posibilidad de gráfico, puede ser:

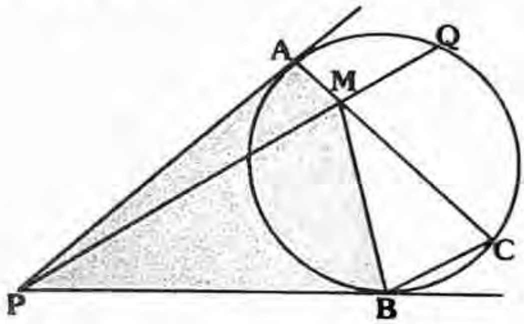


Se cumple:

- ⌂ARMI *y* ⌂ILSC: *inscriptibles*
- $y=z=90°$

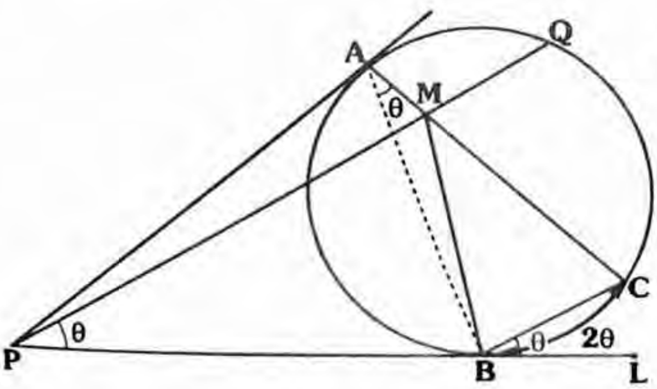
◆ En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia y $\overline{PQ} // \overline{BC}$.

Se cumple:



⌂PAMB: inscriptible

Prueba



- Sea $m\measuredangle QPB=\theta \Rightarrow m\measuredangle CBL=\theta$

  $\Rightarrow m\widehat{BC}=2\theta \Rightarrow m\measuredangle BAC=\theta$

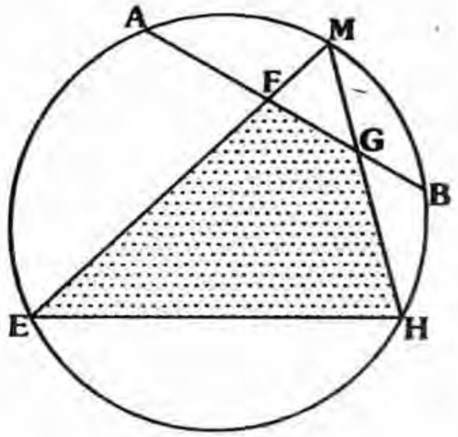
- Como:

  $m\measuredangle BPM = m\measuredangle BAM$

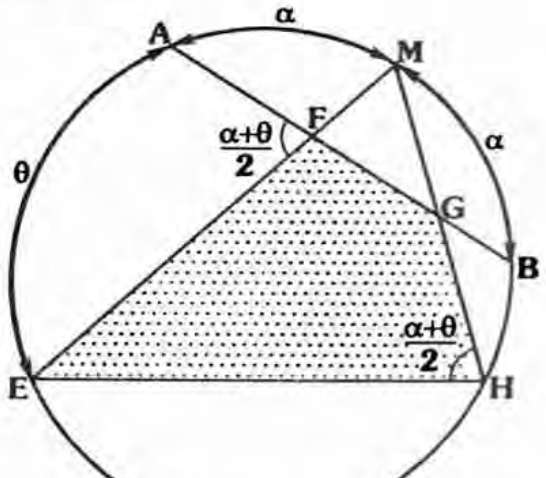
  $\Rightarrow$ ⌂PAMB es inscriptible

◆ En el gráfico, $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$.
Se cumple:

⌂EFGH: inscriptible



Prueba



- Sea:

$$m\widehat{AM} = m\widehat{MB} = \alpha \quad y \quad m\widehat{AE} = \theta$$

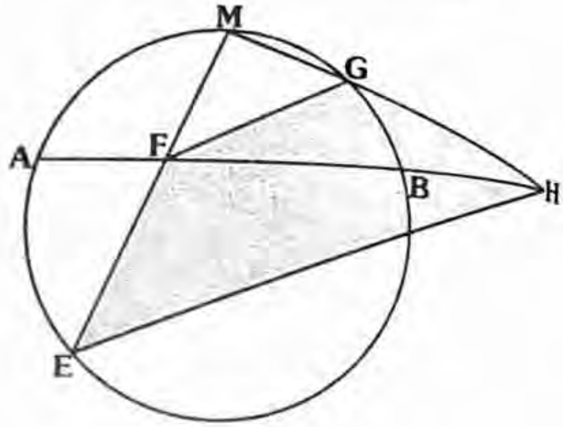
Por ∢ inscrito: $m\sphericalangle EHM = \dfrac{\alpha+\theta}{2}$

- Por ∢ interior: $m\sphericalangle AFE = \dfrac{\alpha+\theta}{2}$

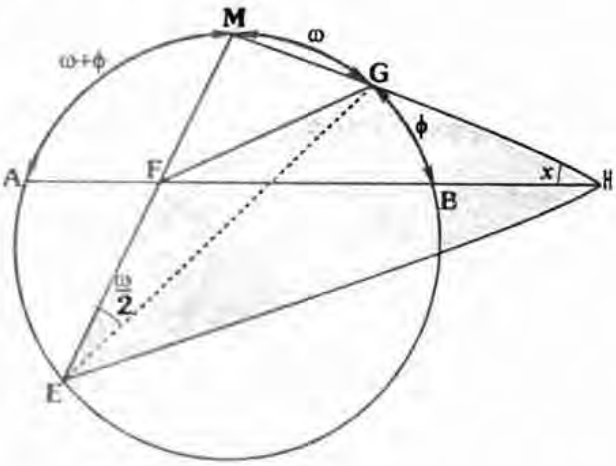
$\Rightarrow$ ⌂EFGH es inscriptible

◆ En el gráfico, $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$.
Se cumple:

⌂EFGH: inscriptible



Prueba



- Sea:

$$m\widehat{MG} = \omega \quad y \quad m\widehat{GB} = \phi$$

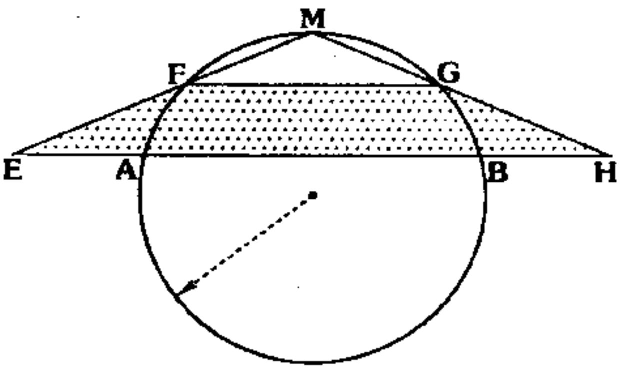
$$\Rightarrow m\widehat{AM} = \omega + \phi$$

Por ∢ inscrito: $m\sphericalangle FEG = \dfrac{\omega}{2}$

- Por ∢ exterior: $x = \dfrac{\omega+\phi-\phi}{2} = \dfrac{\omega}{2}$

- Como $m\sphericalangle FEG = m\sphericalangle FHG$ entonces el ⌂EFGH es incriptible.

◆ En el gráfico, $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$.

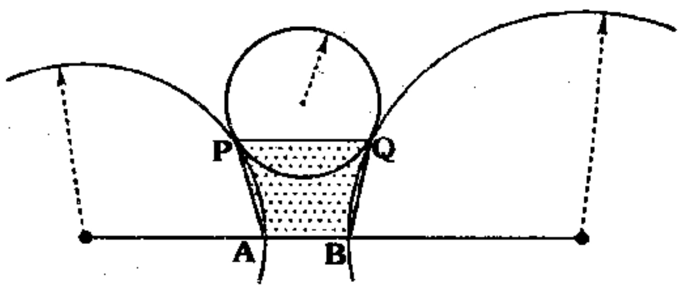


Se cumple:

$\triangle$EFGH es inscriptible

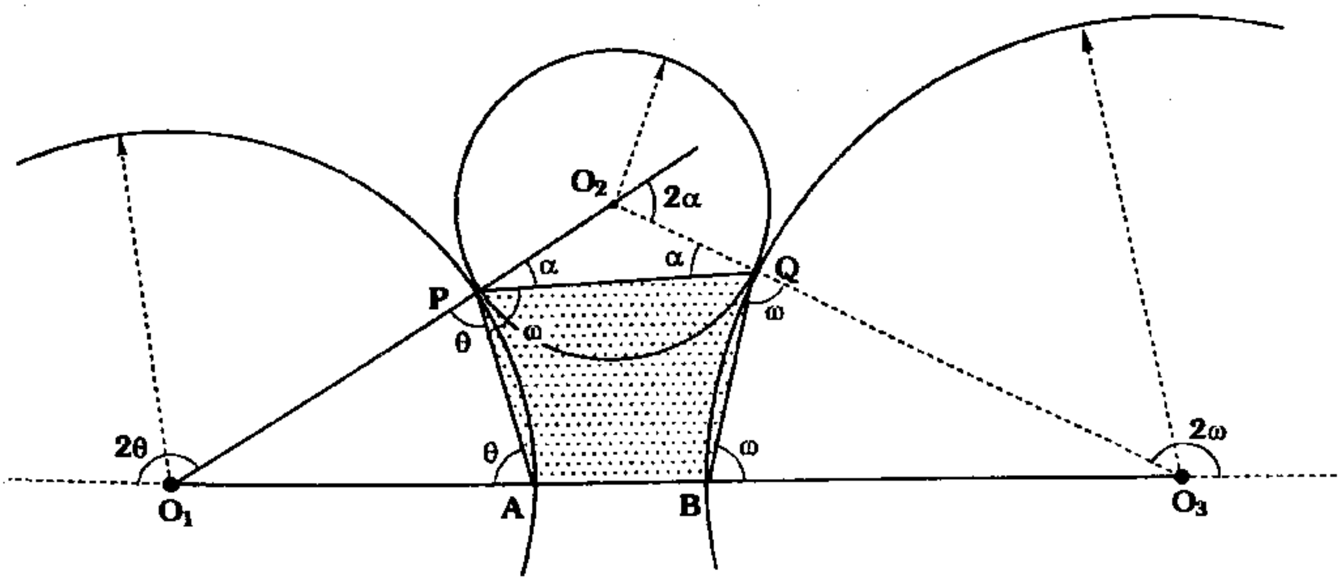
La prueba se deja como ejercicio para el lector.

◆ En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia



Se cumple que el $\triangle$APQB es inscriptible

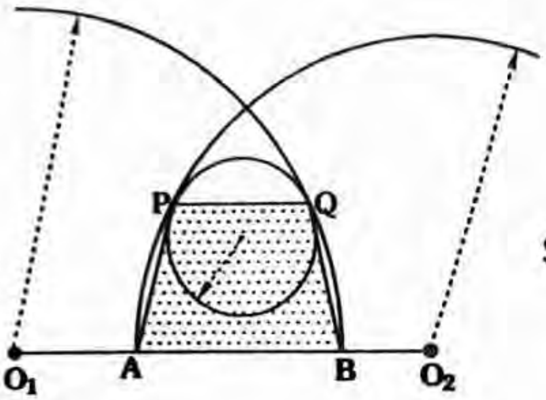
Prueba



- Se sabe que O_1, P y O_2 son colineales, lo mismo que O_2, Q y O_3.
- En $\Delta O_1O_2O_3$: $2\theta+2\alpha+2\omega=360° \rightarrow \theta+\alpha+\omega=180°$
- Luego $m\measuredangle APQ=\omega$

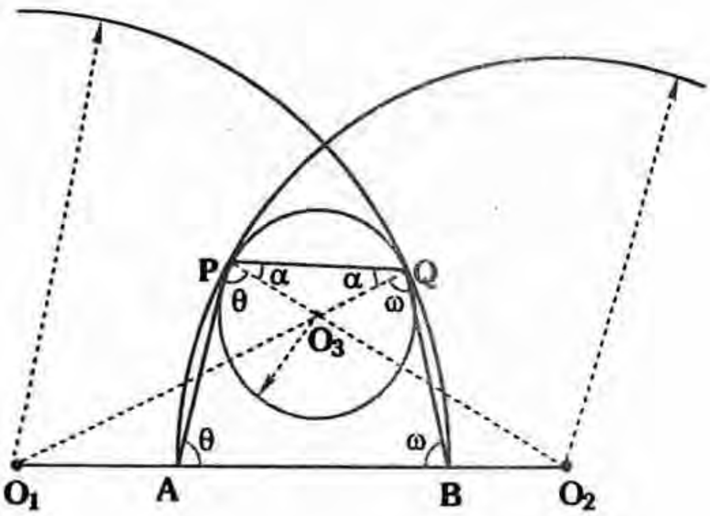
$\therefore$ ◻APQB es inscriptible

◆ P y Q son puntos de tangencia



Se cumple que el ◻APQB es inscriptible.

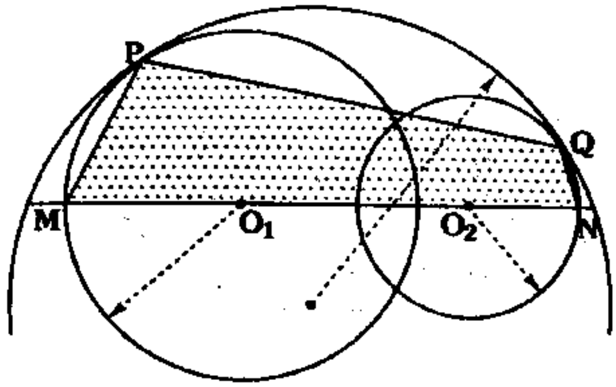
Prueba



- O_1, O_3 y Q: colineales
- P, O_3 y O_2 colineales
- ΔO_1QB, ΔAPO_2 y ΔPO_3Q: isósceles
- En ◻APQB: $2\theta+2\alpha+2\omega=360° \Rightarrow \theta+\alpha+\omega=180°$

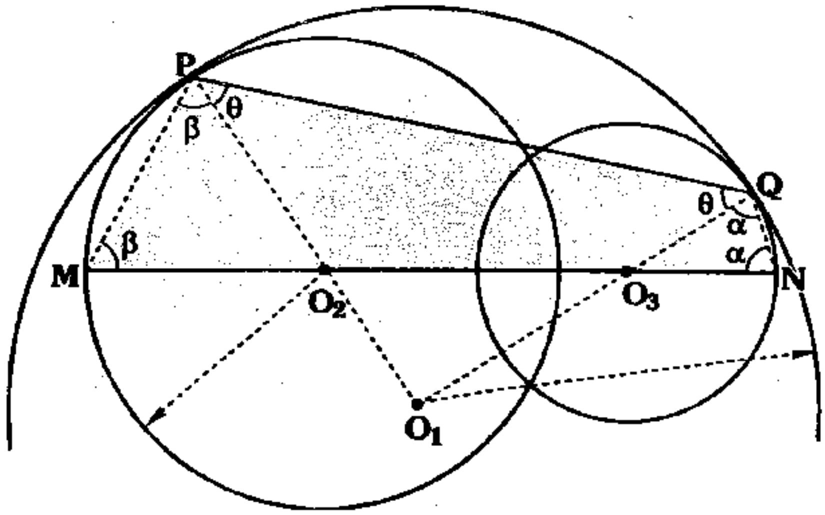
$\therefore$ ◻APQB es inscriptible

◆ P y Q son puntos de tangencia



Se cumple: ⏢MPQN es inscriptible.

Prueba:

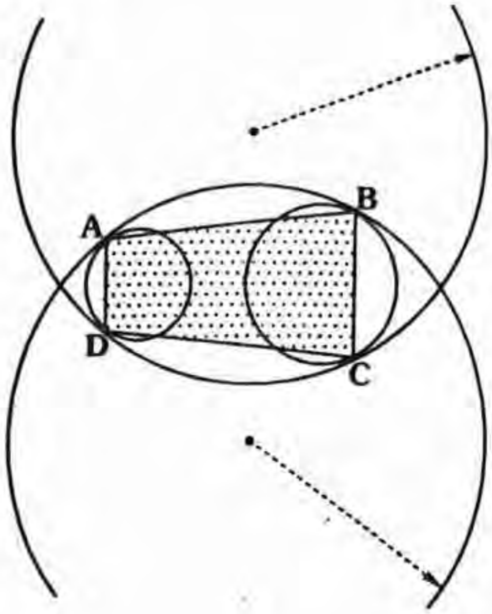


- O_1, O_2 y P son colineales lo mismo que O_1, O_3 y Q.
- ΔMO_2P, ΔO_1PQ y ΔO_3QN : son isósceles
- En ⏢MPQN:

$$2\beta + 2\theta + 2\alpha = 360° \rightarrow \beta + \theta + \alpha = 180°$$

$\therefore$ ⏢MPQN es inscriptible

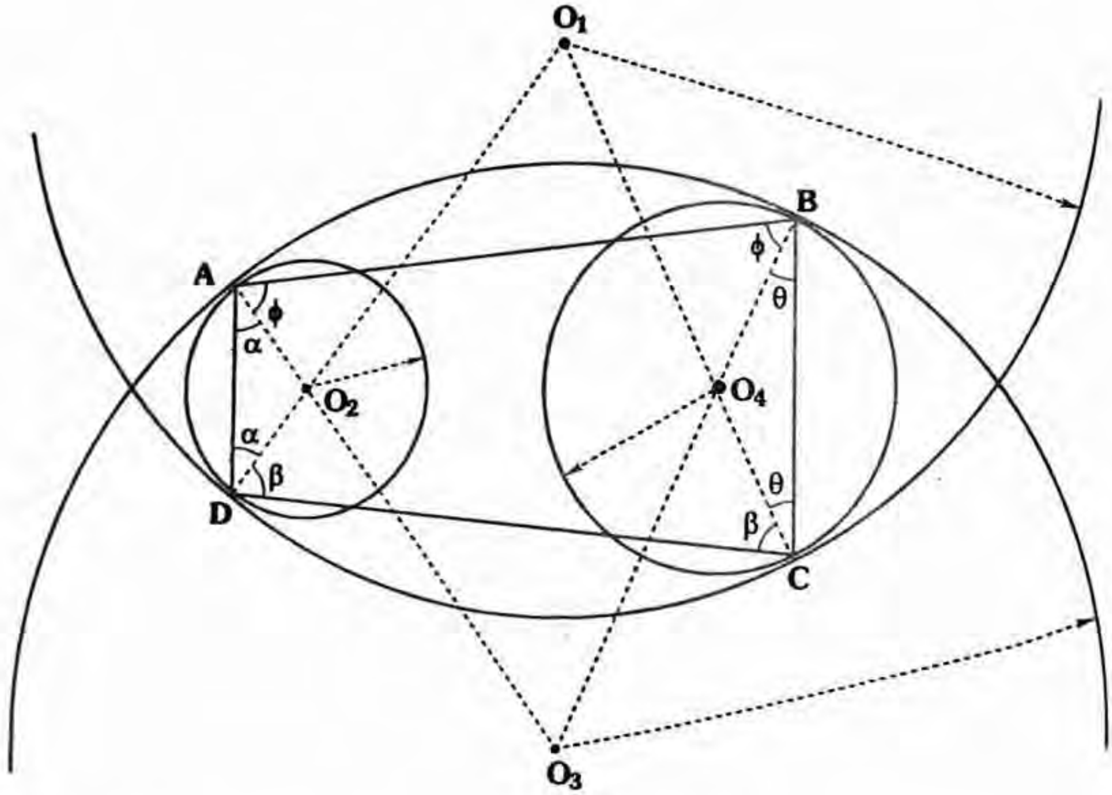
◆ En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.



Se cumple:

△ABCD es inscriptibles

Prueba



- La prueba no es difícil, basta ubicar los centros de las circunferencias y unirlos así: (O_3,O_2,A); (O_3,O_4,B); (O_1,O_2,B) y (O_1,O_4,C) las ternas indicadas son colineales.

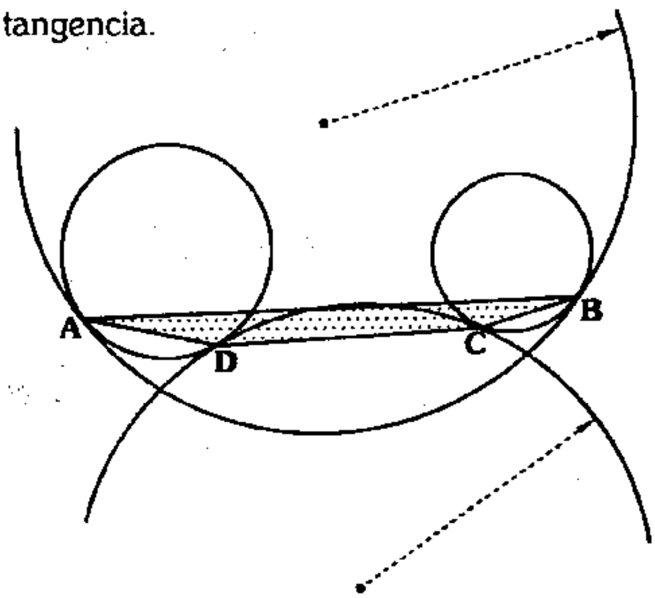
- Como los triángulos ADO_2, DCO_1, ABO_3 y BCO_4 son isósceles.
- En ⏢ABCD: $2\alpha+2\beta+2\theta+2\phi=360° \Rightarrow \alpha+\beta+\theta+\phi=180°$

Luego dicho ⏢ es incriptible.

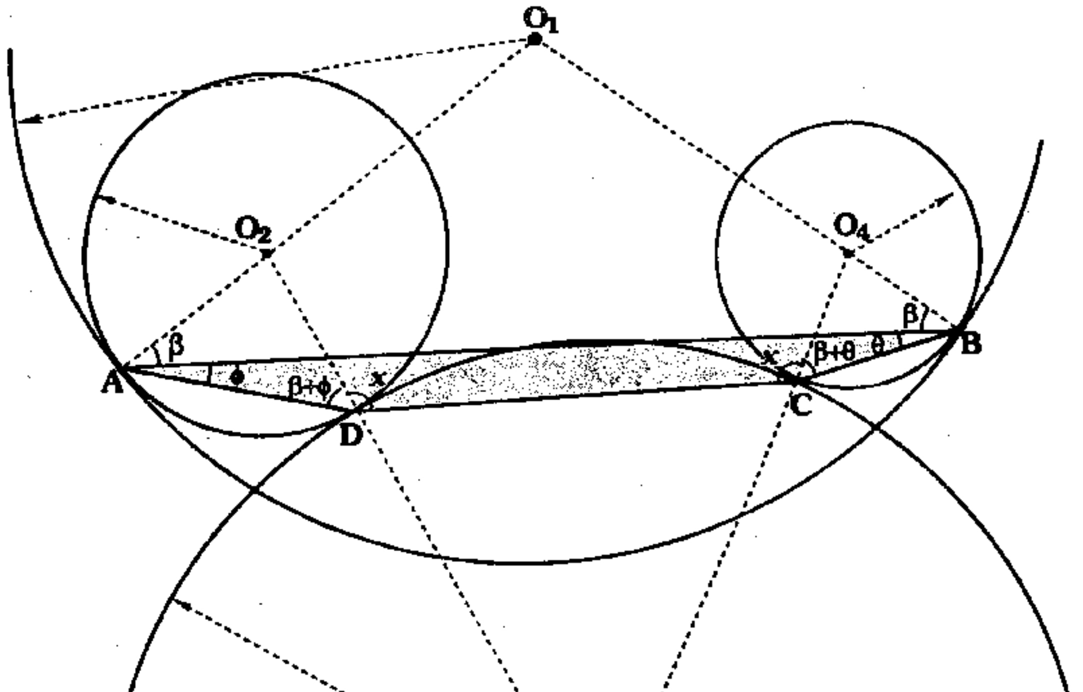
◆ En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Se cumple:

⏢ABCD es inscriptible



Prueba



• En forma análoga a la anterior notemos: ΔO_3DC, ΔAO_2D y ΔCBO_4 son isósceles

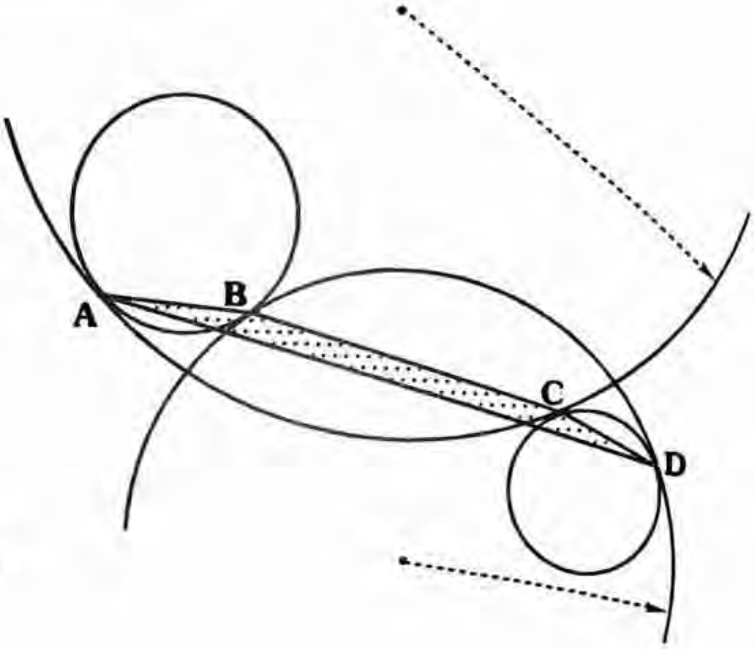
• ⏢ABCD: $2\theta+\beta+x+x+\phi+\beta+\phi=360^\circ \rightarrow \theta+\beta+x+\phi=180^\circ$

$\therefore$ ⏢ABCD es inscriptible

◆ En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Se cumple:

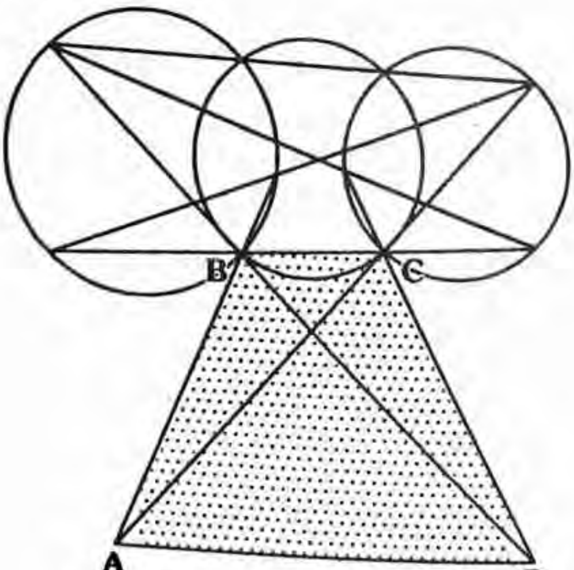
⏢ABCD es inscriptible



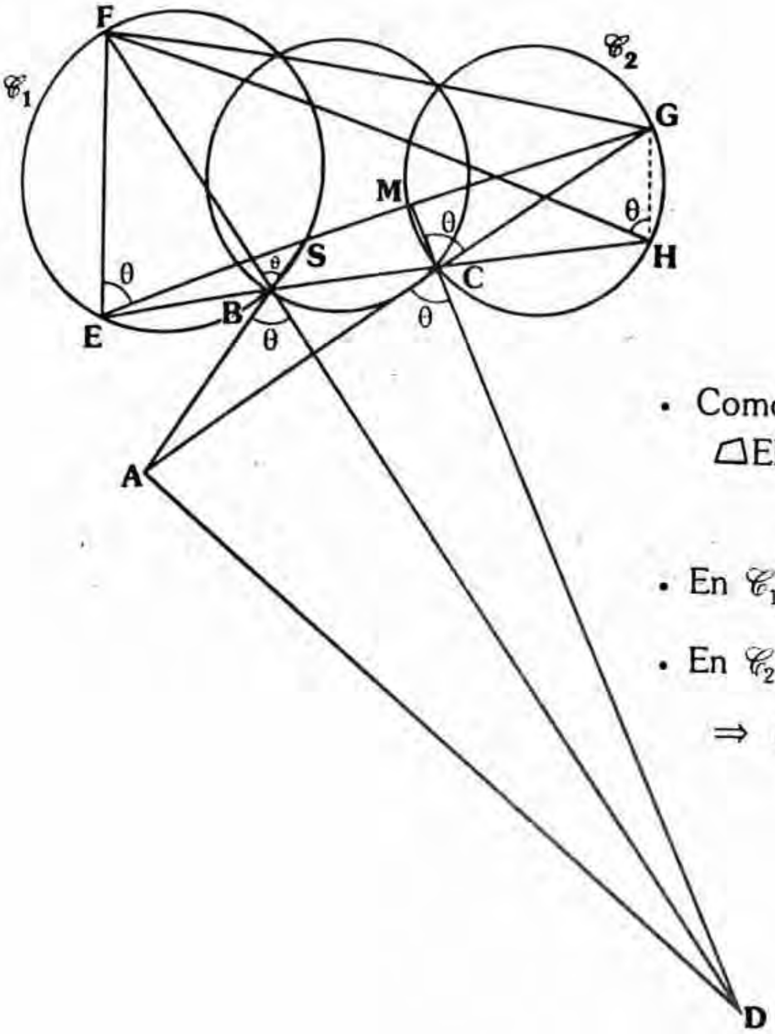
La prueba se deja como ejercicio.

◆ En el gráfico, se cumple:

⏢ABCD es inscriptible



Prueba



- Como aplicación de la página 60, el $\square$EFGH es inscriptible

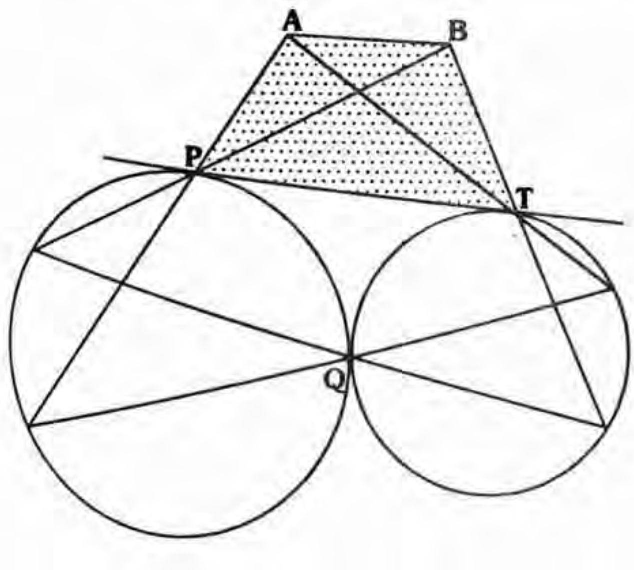
  $\Rightarrow$ m∢FEG=m∢FHG=θ

- En $\mathscr{C}_1$: m∢FBS=θ

- En $\mathscr{C}_2$: m∢ABD=m∢ACD

  $\Rightarrow$ $\square$ABCD es inscriptible

◆ En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia.



Se cumple:

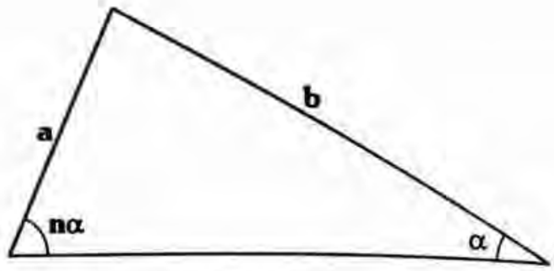
– $\square$ABTP es inscriptible
– m∢ PAT=m∢ PBT=90°

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

◆ En el gráfico, $n \in \mathbb{N}$ y $n>1$

Se cumple:

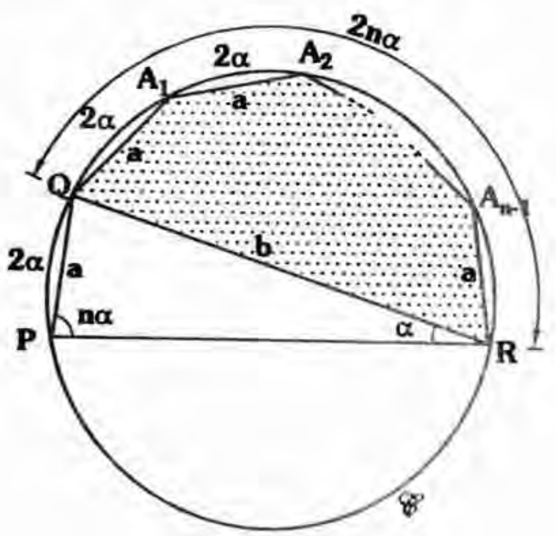
$b<na$



Prueba

En el capítulo de triángulos ya se demostró, pero con las herramientas dadas en circunferencia tendremos un mejor enfoque.

Veamos otra posibilidad:



- Se inscribe el ΔPQR en la circunferencia $\mathscr{C} \Rightarrow m\widehat{PQ}=2\alpha$ y

$$m\widehat{PQ}=2n\alpha \quad \Rightarrow \quad m\widehat{QR}=n\left(m\widehat{PQ}\right)$$

- Luego dividimos el arco QR en "n" Partes iguales

$$\Rightarrow QA_1=A_1A_2...=A_{n....}R=a$$

- En la región sombreada:

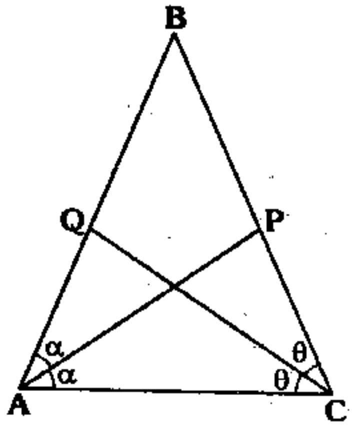
$$b<\underbrace{a+a+...+a}_{n\ veces}$$

$$\therefore \ b<na$$

(*Prueba por* R.Ch.S)

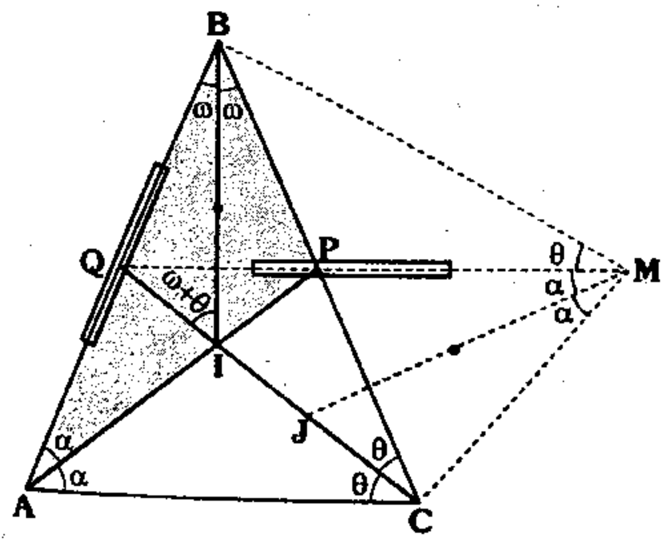
TEOREMA DE STEINER - LEHMUS

Todo triángulo que tenga dos bisectrices interiores de igual longitud es un triángulo isósceles. El teorema fue por primera vez mencionado en 1840 en una carta escrita por C.L. Lehmus enviada por C. Sturm, en la cual pidió una prueba puramente geométrica a C. Sturm, el cual pasó la petición a otros matemáticos y Jakob Steiner fue uno de los primeros en ofrecer una solución.



Si $AP=CQ \Rightarrow AB=BC$

Prueba



- Como $AP=QC$ entonces construye el triángulo QMC congruente con APB talque $AB=QM$ y $BP=CM$

  $\Rightarrow m\sphericalangle ABP = m\sphericalangle QMC$

  $\Rightarrow$ ⊡QBMC: inscriptible

- En los triángulos ABP y QMC: $\overline{BI}$ y $\overline{MJ}$ son bisectrices homólogas entonces $BI=MJ$

- Luego: ⊡IBMJ es trapecio isósceles

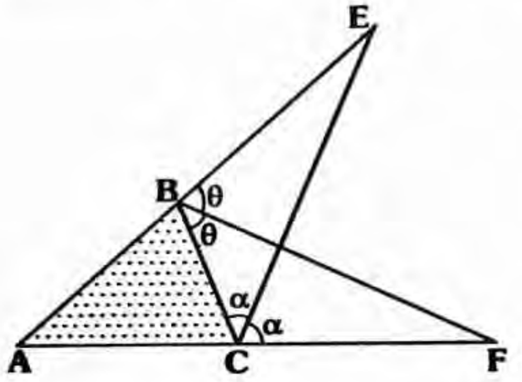
$\Rightarrow$ ⊡IBMJ es trapecio isósceles

$\Rightarrow \underbrace{QM}=BC$

$\therefore AB=BC$

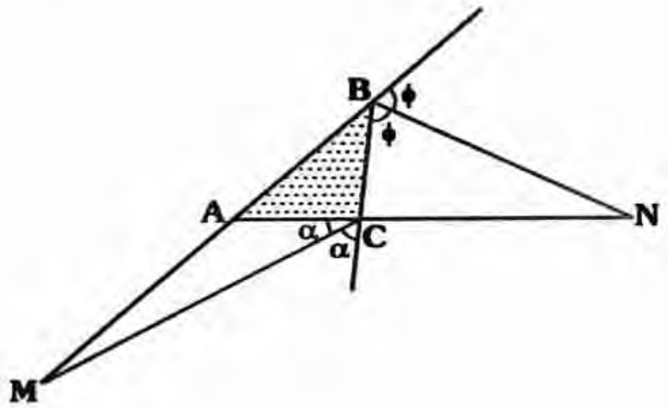
Nota

Veamos que si dos bisectrices exteriores son de igual longitud, entonces el triángulo no necesariamente es triángulo es isósceles.



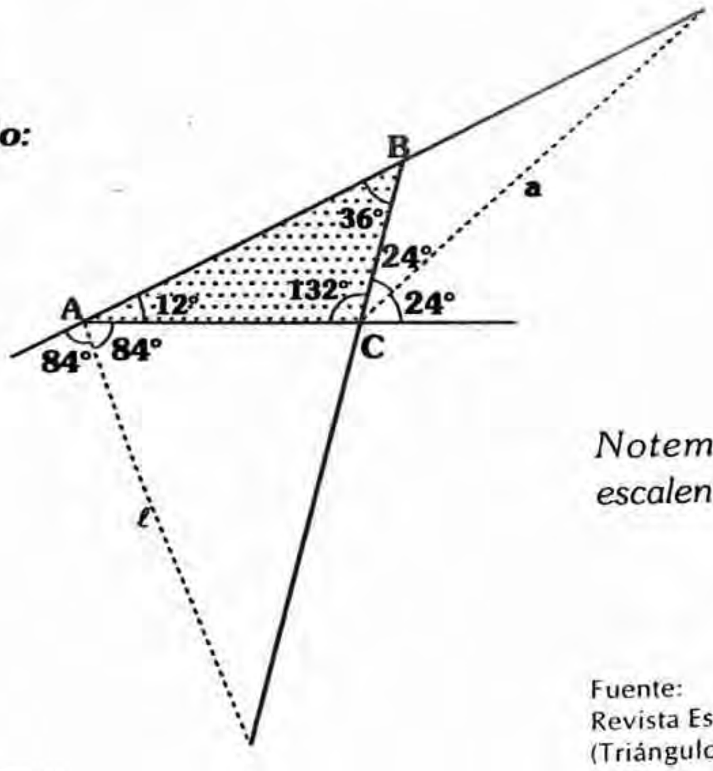
Si : BF=CE

$\Rightarrow$ AB=AC



Si CM=BN *entonces* AC *y* BC *no son iguales necesariamente.*

Ejemplo:



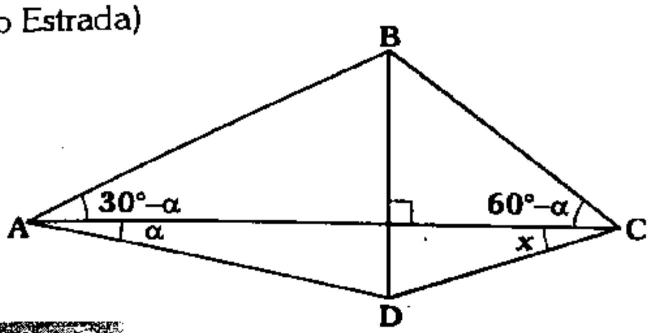
Notemos que el ΔABC *es escaleno, sin embargo:*

$a = \ell$

Fuente:
Revista Escolar Iberoamericana de Matemáticas
(Triángulos especiales - Bellot Rosado)

TEOREMA

(Casos genéricos de cuadriláteros convexos de diagonales perpendiculares - Por Diego Bravo Estrada)



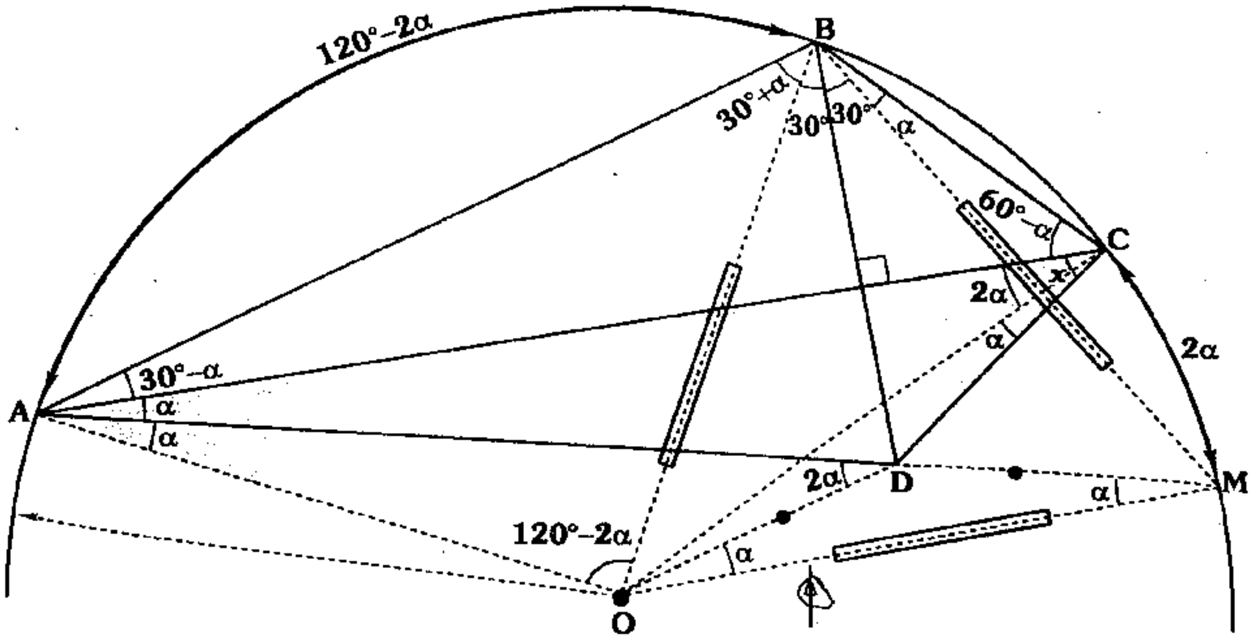
En el gráfico, $\alpha < 30°$

Se cumple:

$x = 3\alpha$

Prueba

- Se traza la circunferencia que pasa por A, B y C de centro O.



- La prolongación a $\overline{AD}$ corta a la circunferencia en M entonces Δ es equilátero.
- Notemos: $m\sphericalangle MBC = \alpha$ y $m\overset{\frown}{AB} = 120° - 2\alpha \Rightarrow m\sphericalangle OAM = \alpha \Rightarrow m\sphericalangle ABO = 30° + \alpha$
- ΔAOC : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle OCA = 2\alpha$
- ΔAOM : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle OMA = \alpha$
- En ΔOBM equilátero, como $m\sphericalangle OBD = m\sphericalangle DBM = 30° \Rightarrow OD = DM$

$$\Rightarrow m\sphericalangle DOM = \alpha \Rightarrow m\sphericalangle ODA = 2\alpha$$

- Como $m\sphericalangle ACO = m\sphericalangle ADO$ entonces ⏢AODC: inscriptible entonces $m\sphericalangle DCO = \alpha$

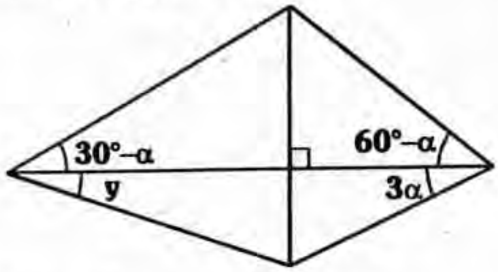
$$\therefore \ x = 3\alpha$$

Observaciones

- *La prueba anterior es equivalente a la propiedad trigonométrica*

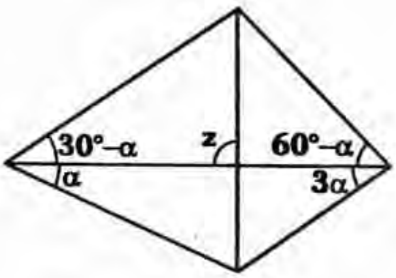
$$\boxed{tg(3\alpha)=tg\alpha\, tg(60^\circ-\alpha)\, tg(60^\circ+\alpha)}$$

La propiedad anterior, es recíproca (Veamos algunos casos)



Se cumple

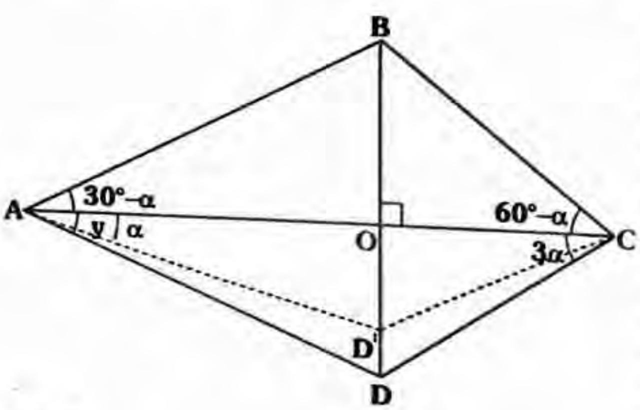
$$y=\alpha$$



Se cumple

$$z=90^\circ$$

◆ Para la prueba optemos por el metódo del absurdo.



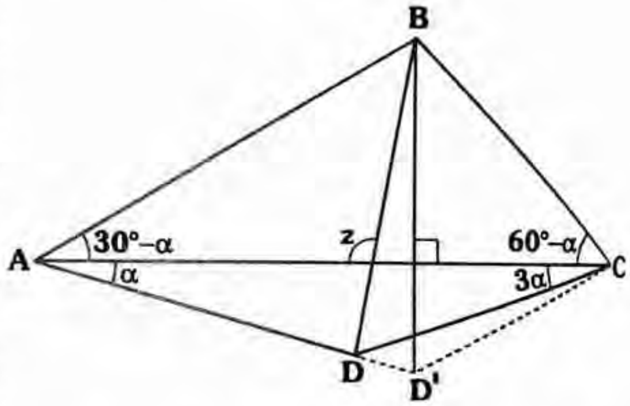
- Supongamos que $y\neq\alpha$, entonces se ubica D' en $\overleftrightarrow{OD}$ tal que $m\measuredangle CAO=\alpha$
- Por teorema:

$$m\measuredangle ACO=3\alpha \ (\Rightarrow \ \Leftarrow)$$

pues $m\measuredangle ACD=3\alpha$

$$\therefore \ y=\alpha$$

◆ Para la demostración de la segunda parte, en forma similar (por el absurdo supongamos que $z\neq 90^\circ$.



- Sea D" en $\overline{AD}$ tal que $\overline{BD"}\perp\overline{AC}$ entonces por teorema anterior:

$$m\measuredangle ACD"=3\alpha$$

- Pero: $m\measuredangle ACD=3\alpha \quad (\Rightarrow \ \Leftarrow)$

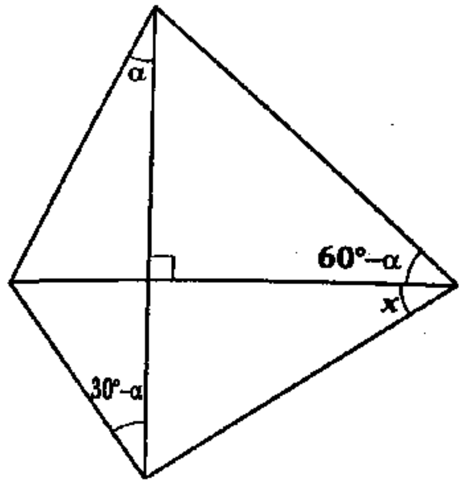
$$\therefore \ D=D"$$

$$\therefore \ z=90^\circ$$

Prueba

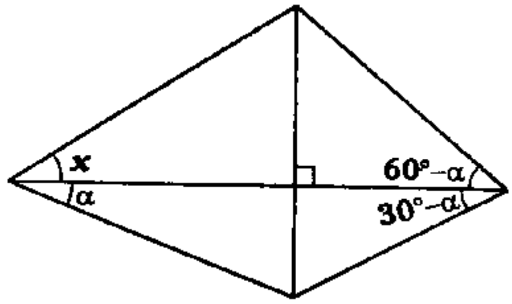
- Las siguientes propiedades son consecuencias de la anterior (estas a su vez son recíprocas).

Se cumple:



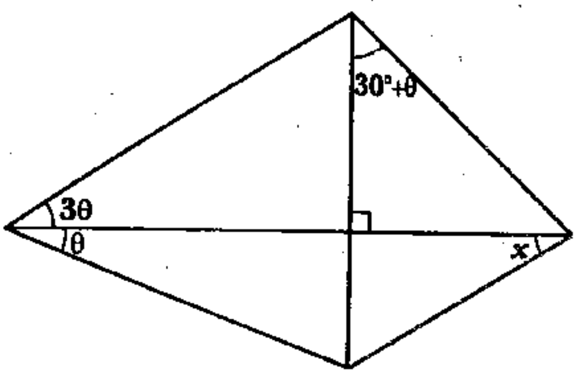
$x=3\alpha$

Se cumple:



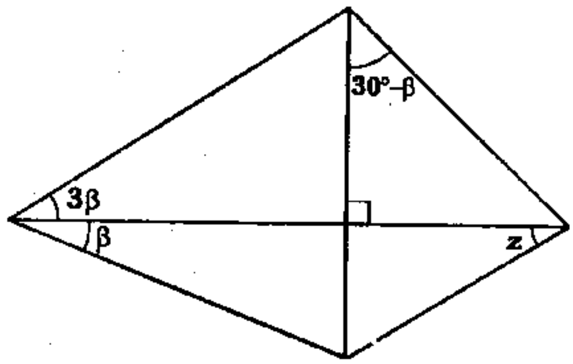
$x=3\alpha$

Se cumple:



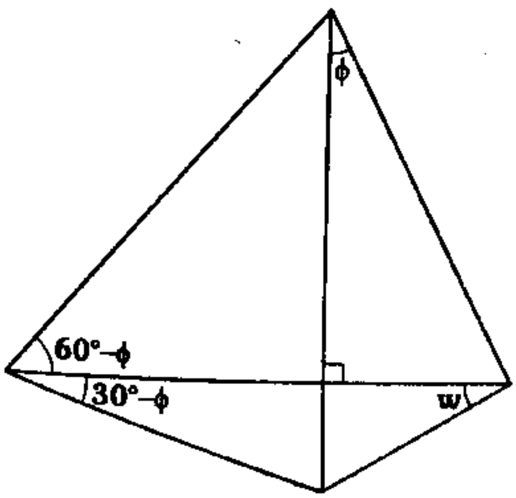
$x=30°-\theta$

Se cumple:



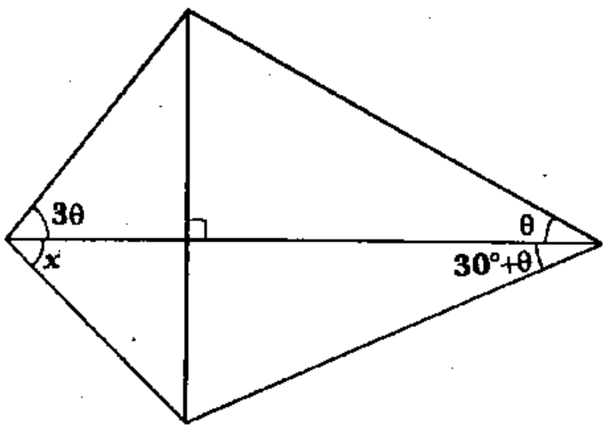
$z=30°+\beta$

Se cumple:



$w=3\phi$

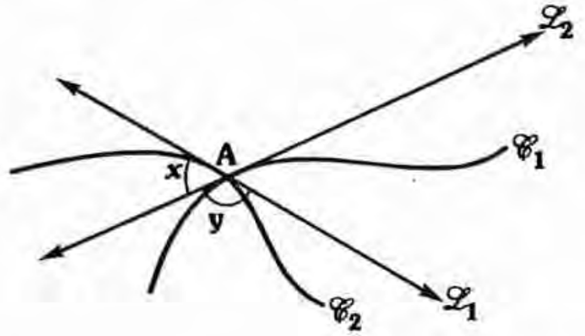
Se cumple:



$x=60°+\theta$

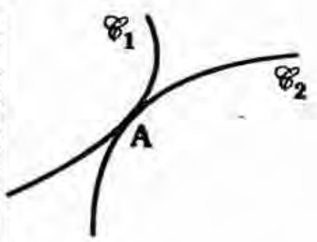
ÁNGULO ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

ÁNGULO ENTRE CURVAS

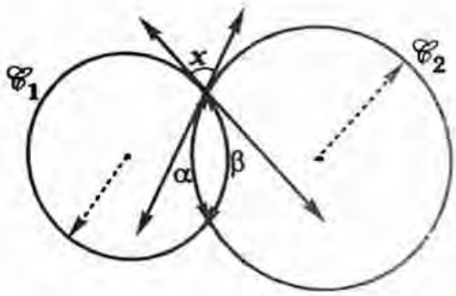


- Sea $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ secante en A $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son tangentes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en A.
- x ó y: Medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$
- Donde: $x + y = 180°$

Veamos algunos casos partículares

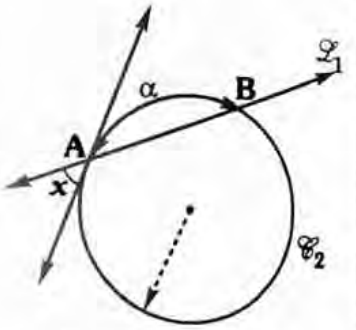


Si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes la medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ es 0° ó 180°



x : medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

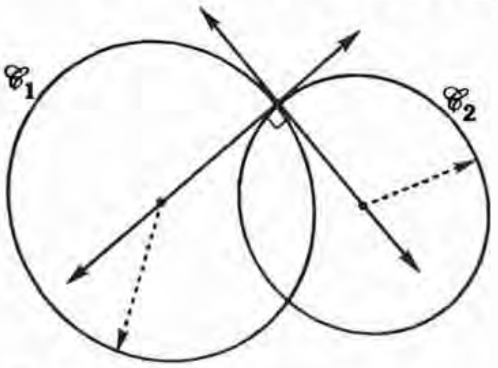
$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\alpha + \beta}{2}}$$



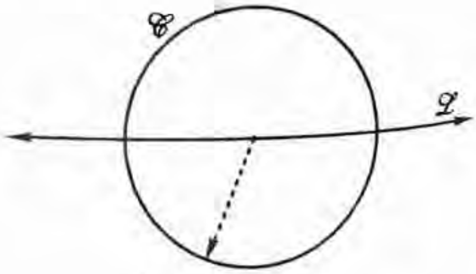
$x = \dfrac{\alpha}{2}$: Medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Observaciones

- Si $x = 90° \rightarrow \mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales (*curvas ortogonales*).



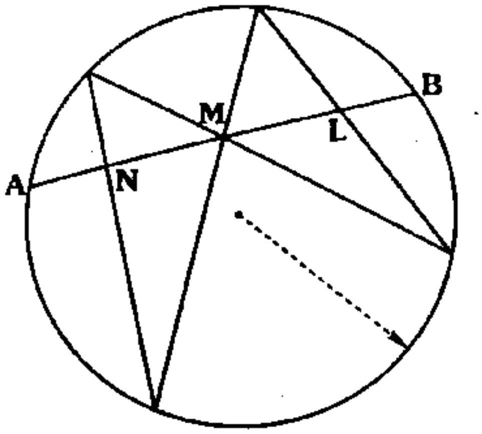
$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$: ortogonales



$\mathscr{C}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: ortogonales

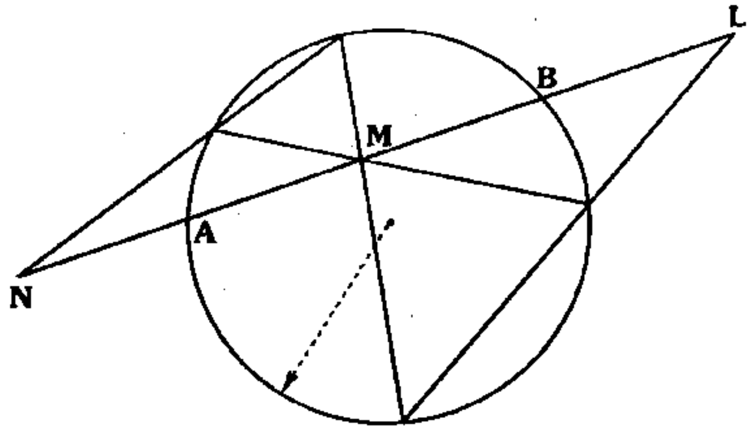
TEOREMAS DE PAPILON

Tenemos los siguientes casos (*todos se prueban en forma similar*).



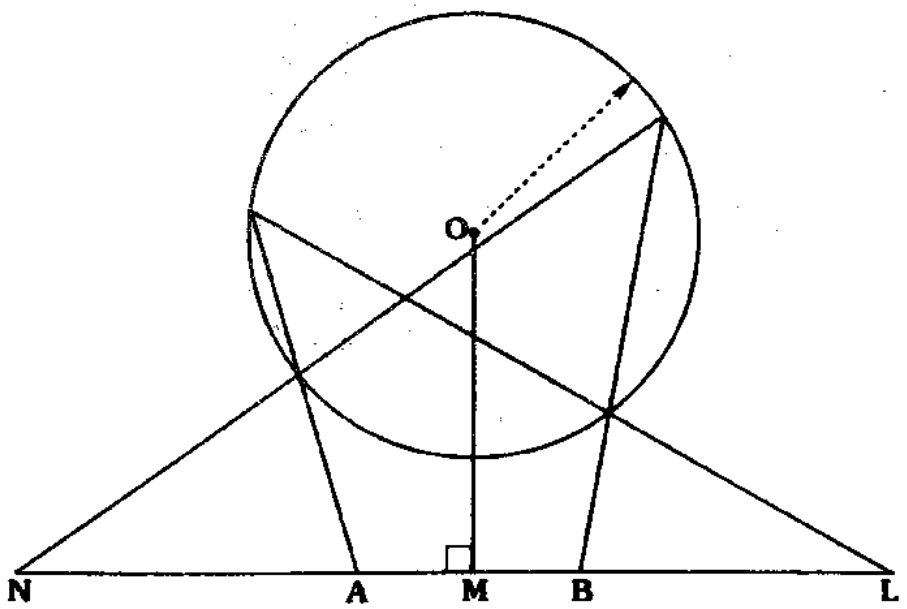
Si AM=MB, se cumple:

NM=ML



Si AM=MB, se cumple

MN=ML



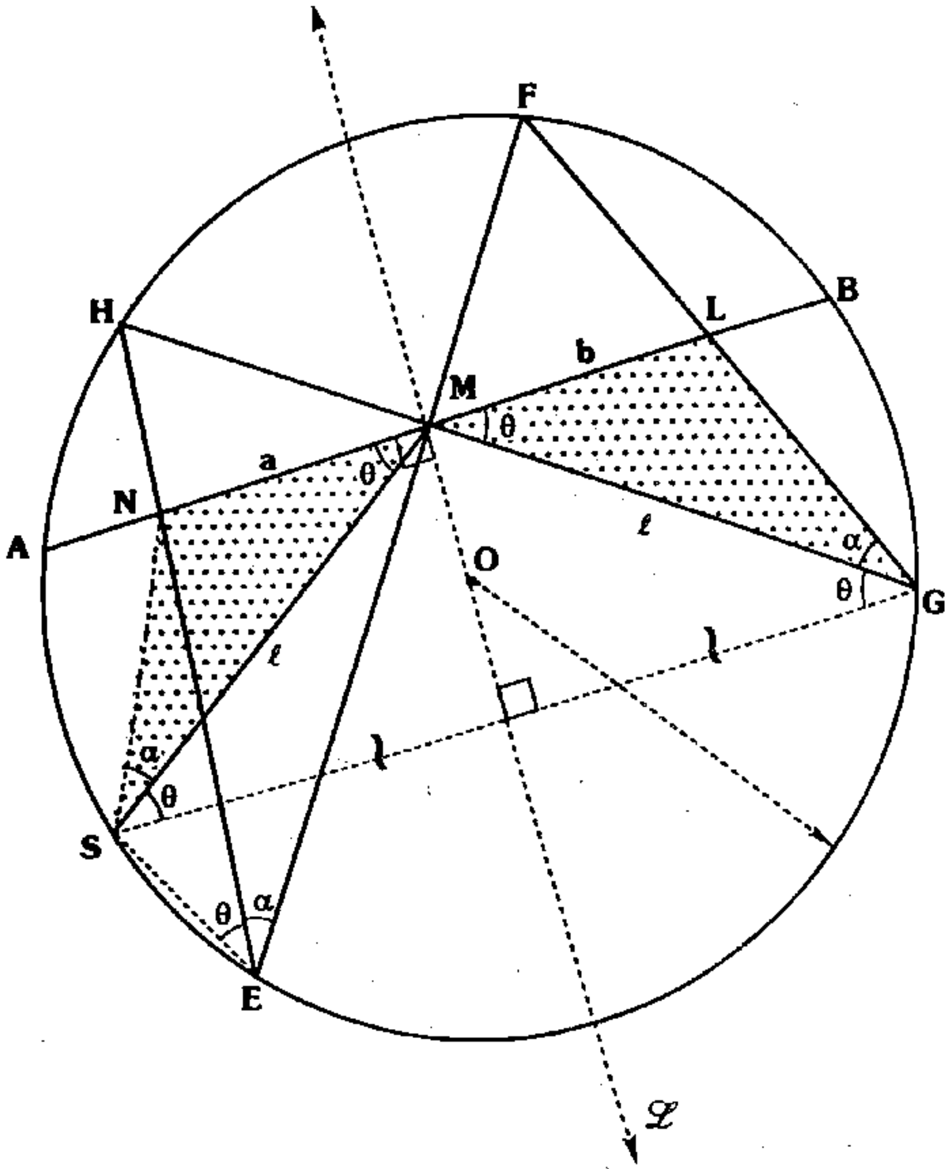
Si AM=MB, se cumple:

NM=ML

Pruebas

Las tres pruebas son similares

Caso (1) :

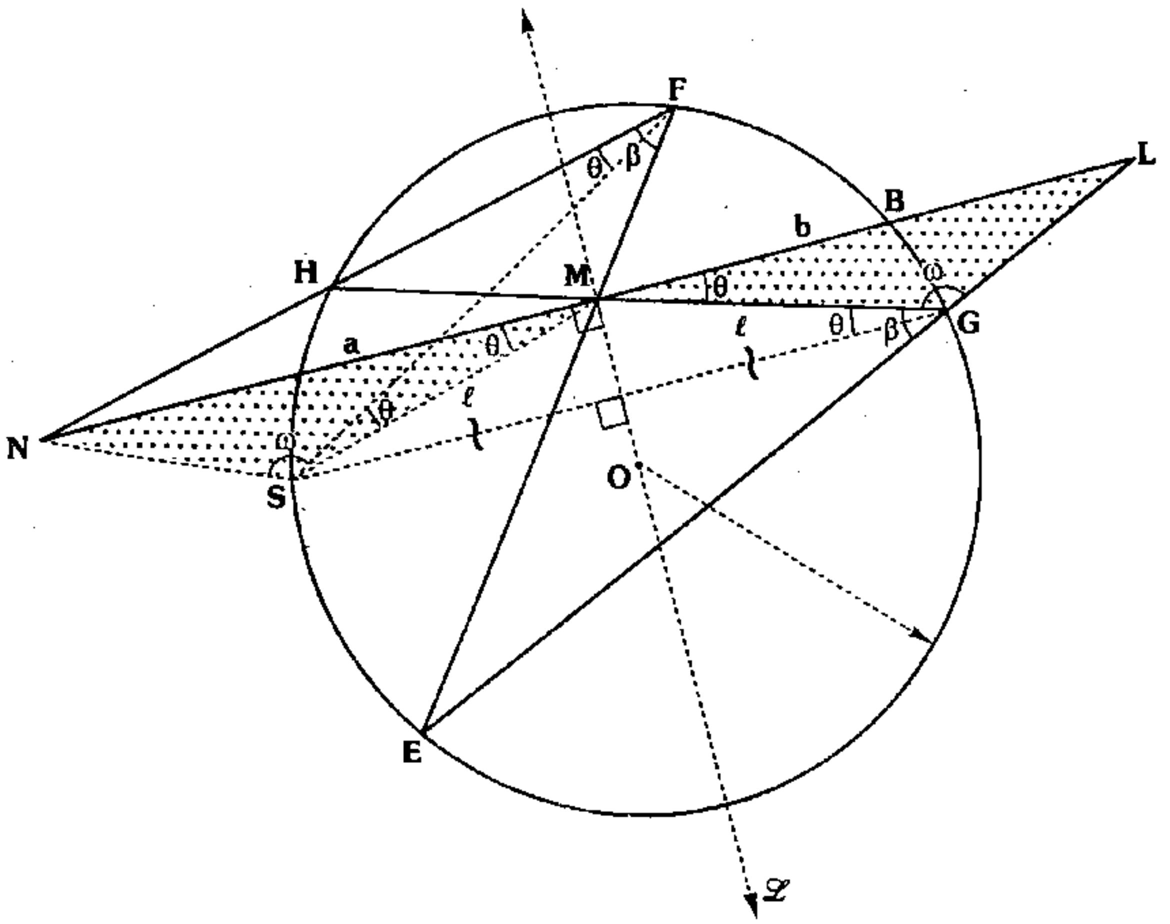


- Como AM = MB → $\overline{OM} \perp \overline{AB}$
- Se traza $\overline{GS} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \Rightarrow$ MS = MG
- ΔSMG : isósceles $\Rightarrow$ m∢MSG = m∢SGM
- Por ángulo inscrito: m∢SEH = θ $\Rightarrow$ ⏢SNME: inscriptible

  $\Rightarrow$ m∢NSM = m∢NEM = α
- ΔSMN ≅ ΔGML (ALA)

∴ **a = b**

Caso (2) :



Con la misma idea anterior:

- Se ubica S en la circunferencia tal que $\overline{SG} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$
- También:

  – ΔSMG : isósceles

  – Como $m\measuredangle HFS = m\measuredangle SMN = \theta$

- Entonces ⌂NFMS: inscriptible, luego:

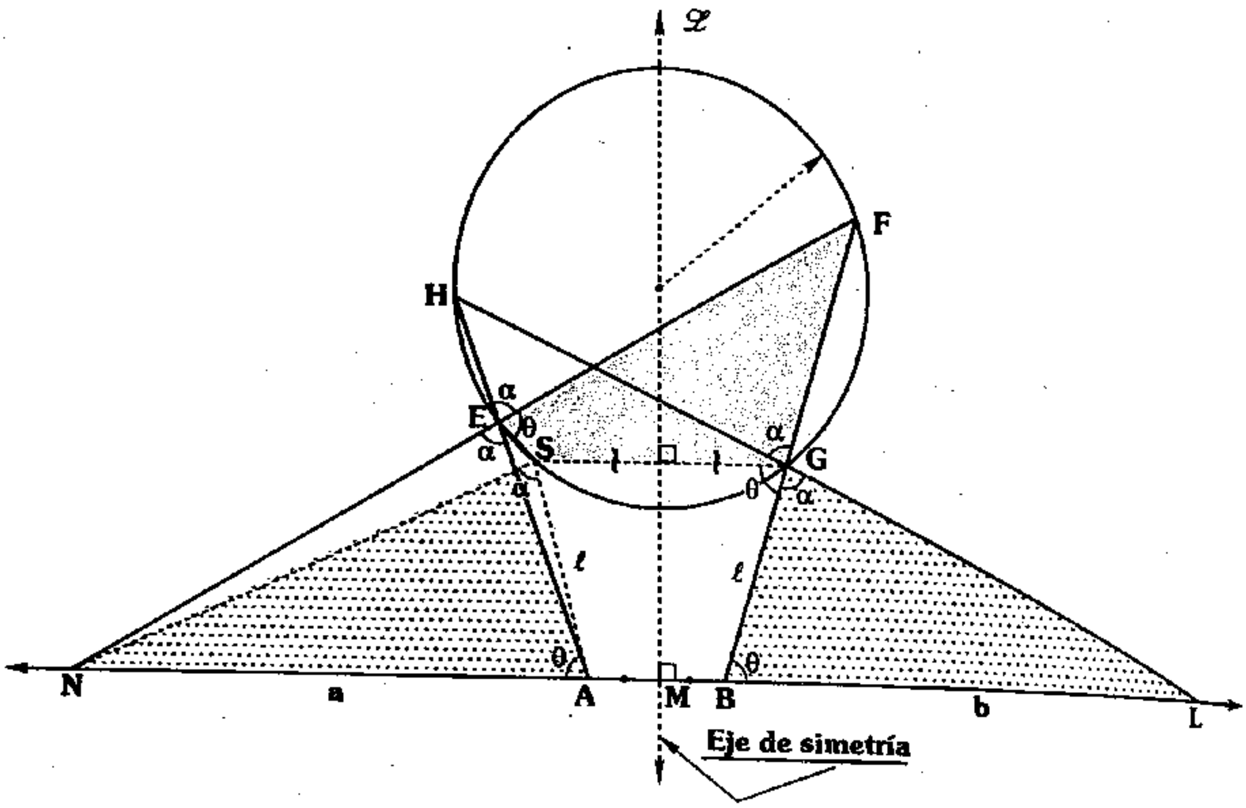
$$\underbrace{m\measuredangle NFM}_{\beta} = \underbrace{m\measuredangle NSM}_{\omega} = 180°$$

– Como: $m\measuredangle HGE = \beta \rightarrow m\measuredangle MGL = \omega$

– $\Delta SMN \cong \Delta MGL$ (ALA)

$$\therefore\ \mathbf{a = b}$$

Caso (3) :



- Se traza la cuerda SG, tal que $\overline{SG} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \rightarrow$ BG = AS
- También:

$$m\measuredangle GBL = m\measuredangle SGB = m\measuredangle SAN = \theta$$

- Como ⏢SEFG es inscrito

$$\rightarrow m\measuredangle SEF = \theta$$

Entonces ⏢NESA es inscriptible

$$\rightarrow m\measuredangle NEA = \alpha$$

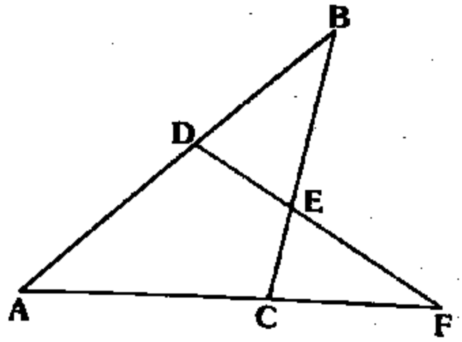
- $\Delta NSA \cong \Delta LGB$ (ALA)

$$\therefore \ \mathbf{a = b}$$

APLICACIONES DE LOS CUADRILÁTEROS INSCRIPTIBLES

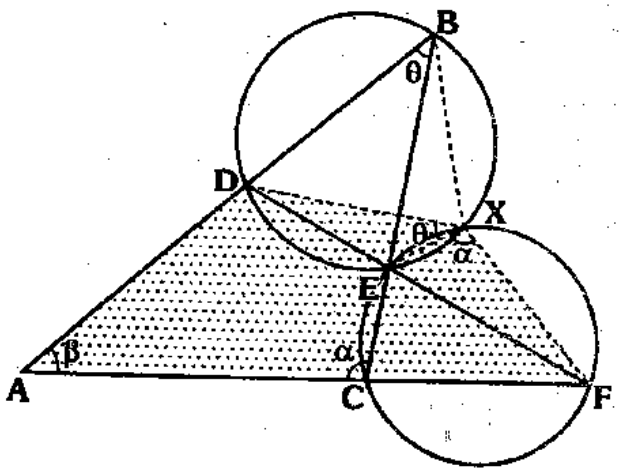
Una de las aplicaciones de los cuadriláteros inscriptible es la aplicación para la concurrencia de circunferencias.
Veamos algunos casos:

TEOREMA



En la gráfica las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC, ADF, DEB y CEF son concurrentes.

Prueba

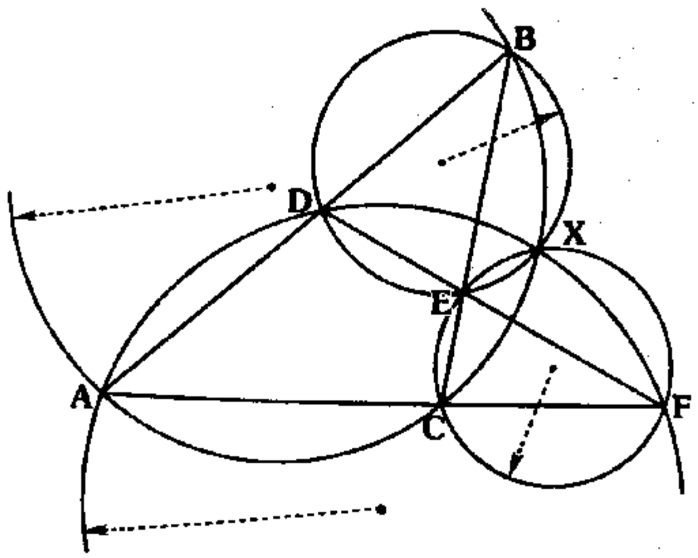


- Trazamos las circunferencias circunscritas a los triángulo DEB y CEF secantes en E y X.
- Sea $m\sphericalangle BAC = \beta$, $m\sphericalangle ABC = \theta$ y

  $m\sphericalangle ACB = \alpha \rightarrow \alpha + \beta + \theta = 180°$
- En los cuadriláteros DBDXE y CEXF:
  $m\sphericalangle DXE = \theta$ y $m\sphericalangle EXF = \alpha$

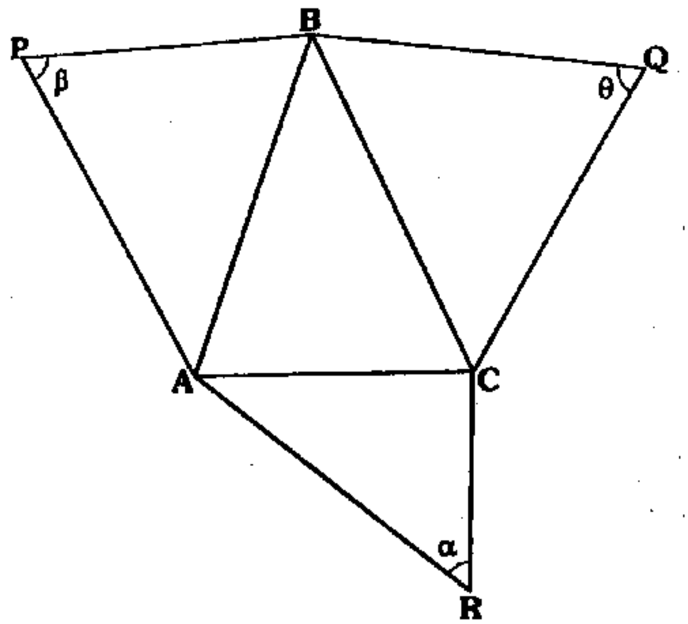
  $\rightarrow$ ⌂ADXF es inscriptible.
- Análogamente se prueba que el ⌂ABXC es inscriptible

La figura quedaría así:



Las circunferencias concurren en X.

TEOREMA

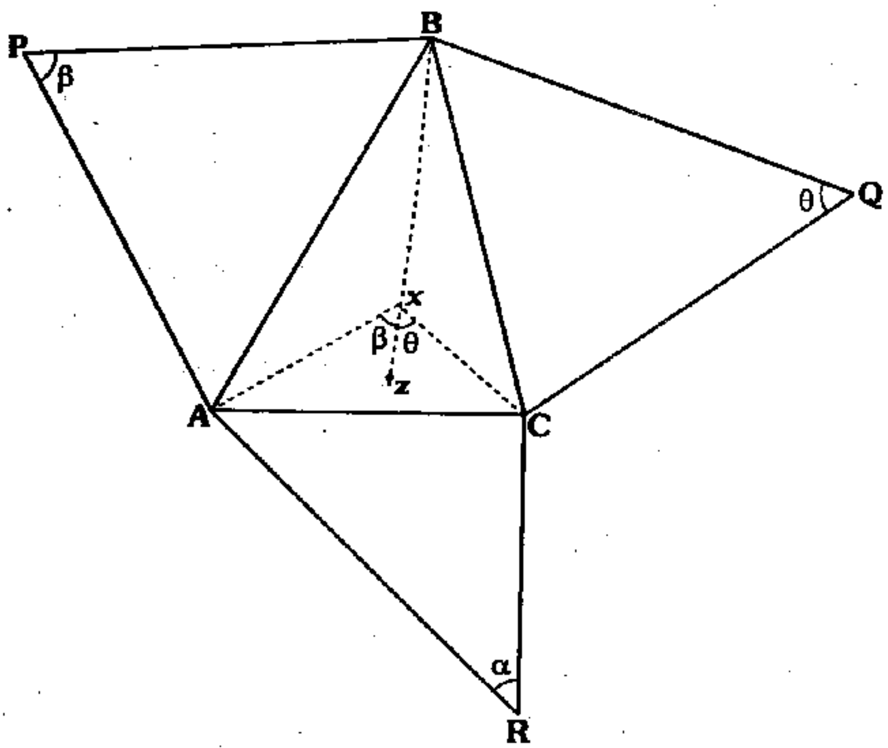


En el gráfico, si $\alpha+\beta+\theta=180°$

Se cumple:

Las circunferencias circunscritas a los triángulos APB, BQC y ACR son concurrentes.

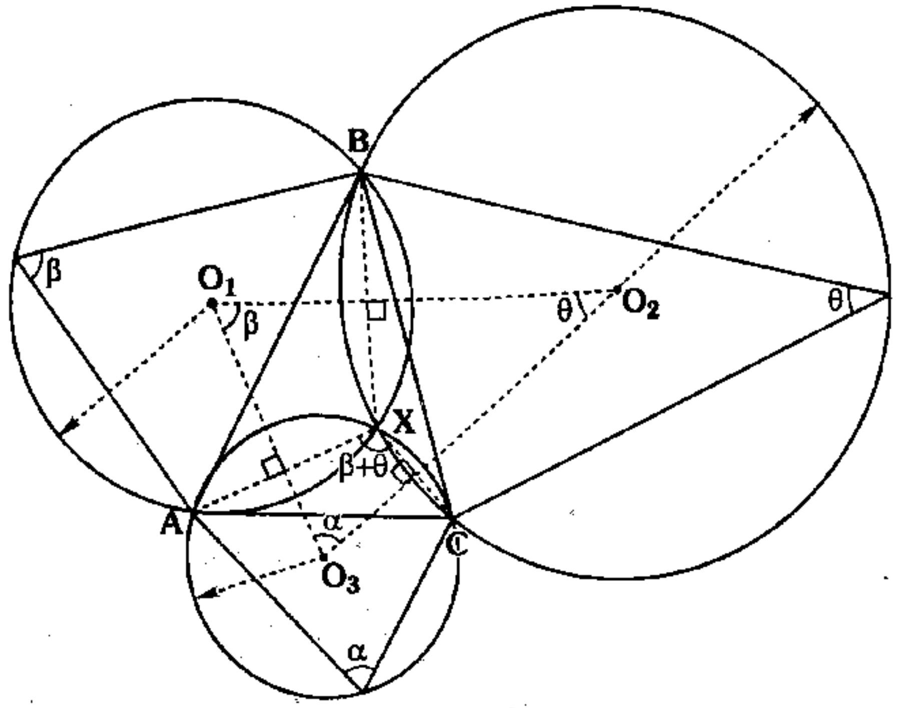
Prueba



- Sean B y X los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas a los triángulos ABP y BQC, entonces los cuadriláteros APBX y CQBX son inscriptibles
- Luego: $m\measuredangle AXZ=\beta$ y $m\measuredangle CXZ=\theta$
- Podemos afirmar que el cuadrilátero AXCR es inscriptible.

$\therefore$ Las circunferencias a los triángulos APB, BQC y ACR concurren en X.

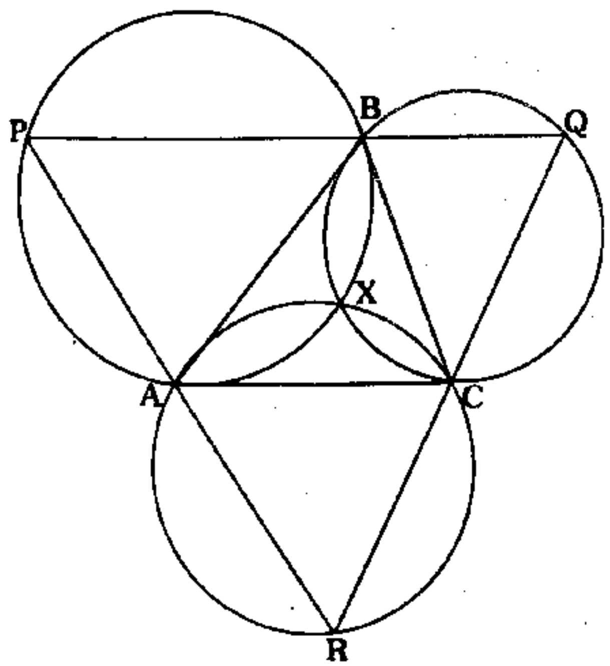
La figura, quedaría así:

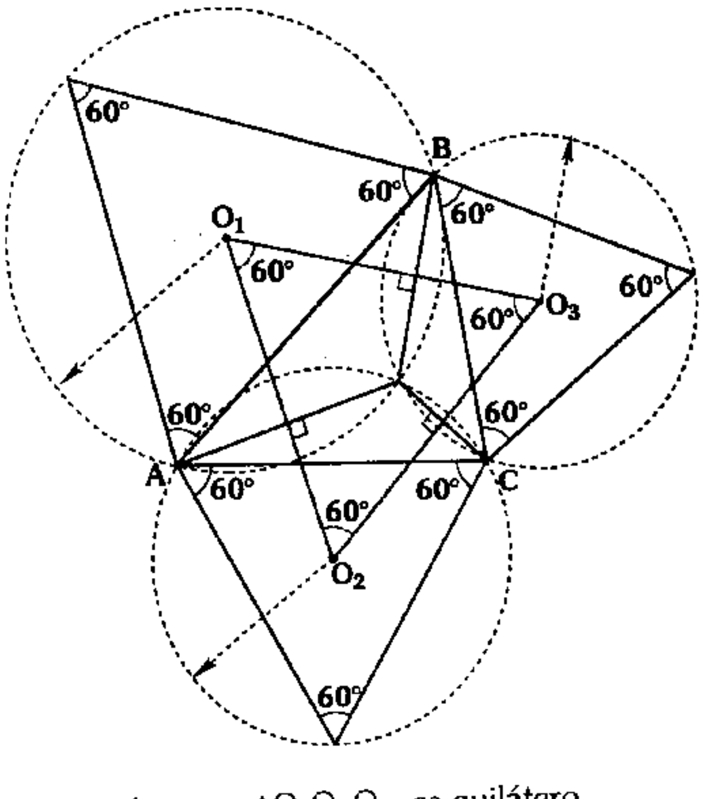


Es fácil ver que el triángulo que tiene vértices los centros de las circunferencias tiene sus ángulos internos de medidas: α, β y θ

Observación

Veamos algunos casos particulares.

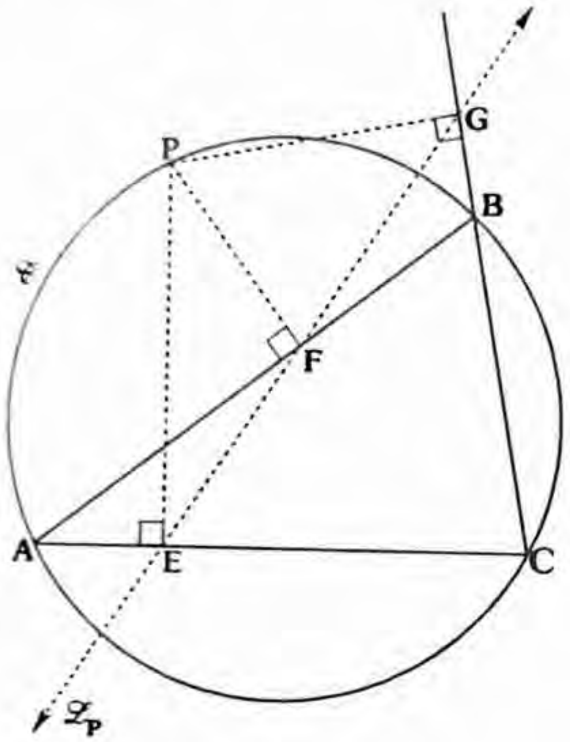




Se cumple que: $\Delta O_1O_2O_3$ es quilátero

RECTA DE SIMSON – WALLACE

En todo triángulo, las proyecciones ortogonales de un punto de la circunferencia circunscrita hacia los lados, son colineales. La recta que contiene a dichos puntos se llama recta de Simson – Wallace.



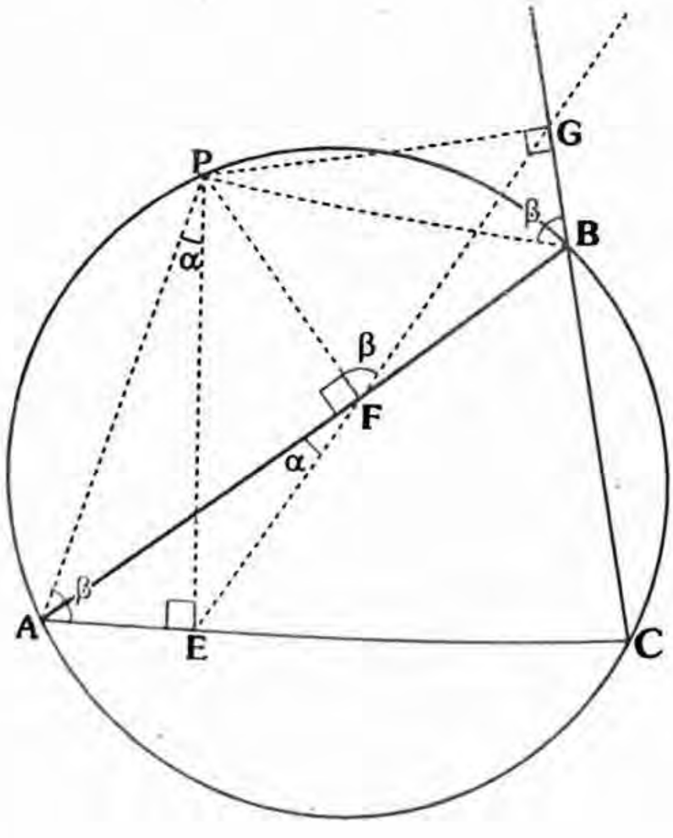
Se cumple:

$P \in \mathscr{C}$

E, F y G: colineales

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_P}$: Recta de Simson del punto P.

Prueba



- Sea $m\sphericalangle AFE = \alpha$ y $m\sphericalangle PFG = \beta$
- Vamos a demostrar: $\alpha + \beta = 90°$
- Como los cuadriláteros APFE y PFBG son inscriptible, entonces:

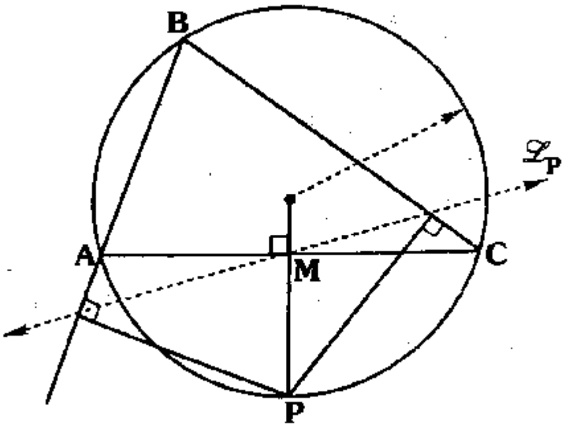
$$m\sphericalangle APE = \alpha \quad y \quad m\sphericalangle PBG = \beta$$

- En $\triangle$APBC: $m\sphericalangle PAC = \beta$
- En $\triangle$AEP: $\beta + \alpha = 90° \Rightarrow m\sphericalangle EFA + m\sphericalangle AFG = 180°$

$\therefore$ E, F y G son colineales.

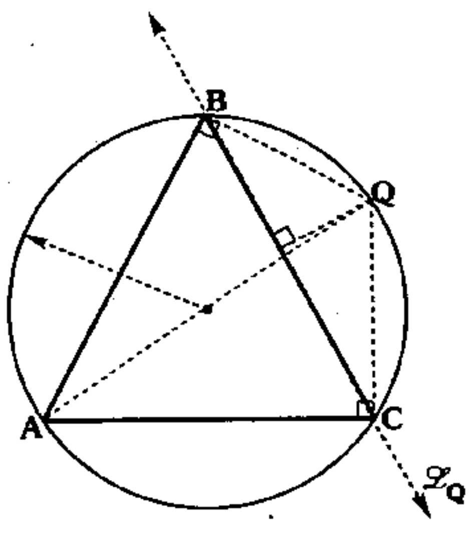
Observación

Veamos algunos casos de la recta de Simson



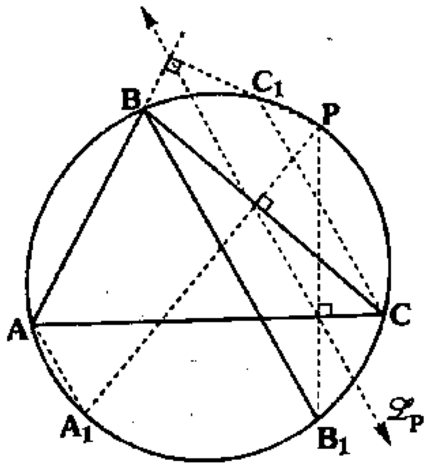
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_P}$: Recta de Simson del punto P respecto del ΔABC

Notemos que la recta de Simson para este caso pasa por el punto medio de un lado



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_Q}$: Recta de Simson de Q respecto del ΔABC

Notemos que la recta de Simson pueda estar sobre un lado



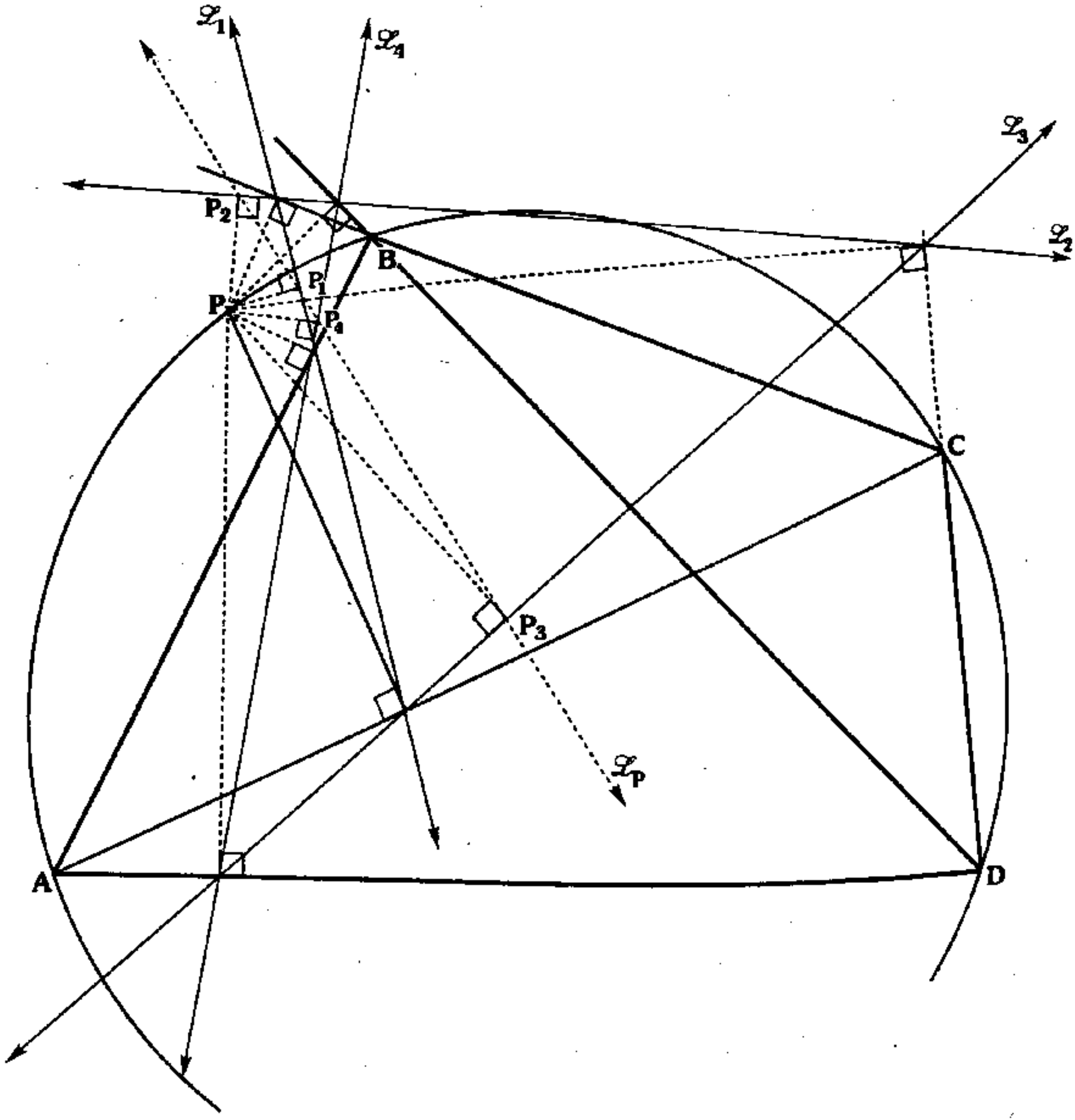
Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_P}$: recta de Simson del punto P

Se cumple:

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_P} // \overline{AA_1} // \overline{BB_1} // \overline{CC_1}$$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

RECTA DE SIMSON PARA EL CUADRILÁTERO

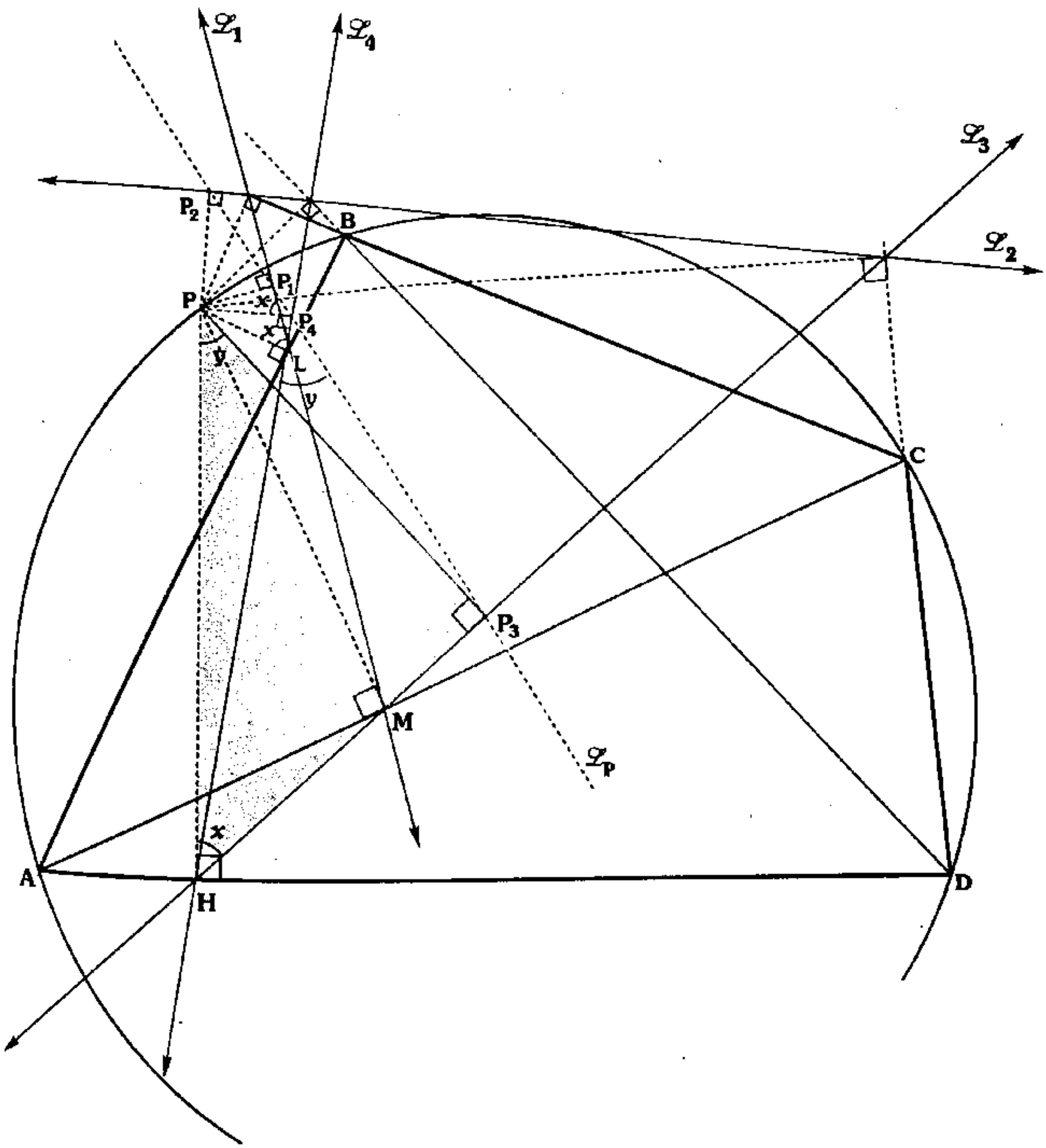


Se da el cuadrilátero inscrito ABCD:

- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$: Recta de Simson de P respecto al ΔABC
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: Recta de Simson de P respecto al ΔBCD
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$: Recta de Simson de P respecto al ΔACD
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$: Recta de Simson de P respecto al ΔABD

Se cumple: P_1, P_2, P_3 y P_4 : colineales y la recta que los contiene se denomina: recta de Simson de P respecto del cuadrilátero ABCD.

Prueba



- Sea:

$$m\sphericalangle PP_4P_1 = x \quad y$$

$$m\sphericalangle HP_4P_3 = y$$

- Vamos a demostrar que:

$$x + y = 90°$$

- $\triangle PP_4P_3H$: inscriptible

$$\rightarrow \ m\sphericalangle HPP_3 = y$$

- $\triangle PP_1P_4L$: inscriptible

$$\rightarrow \ m\sphericalangle PLP_1 = x$$

- Como los puntos P, L, M, H y A son cíclicos.
- $\triangle PLMH$: inscriptible

$$\rightarrow \ m\sphericalangle PHM = x$$

- En $\triangle HP_3P$: $x + y = 90°$

$$\rightarrow \ P_3,\ P_4 \text{ y } P_1 : \text{colineales.}$$

Geometría

ENUNCIADO DE LOS
PROBLEMAS RESUELTOS

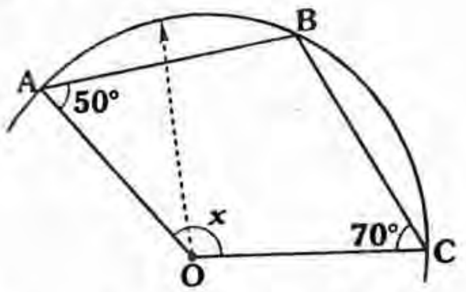
- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

CIRCUNFERENCIA

Problemas Resueltos
Ciclo Anual

PROBLEMA Nº 1

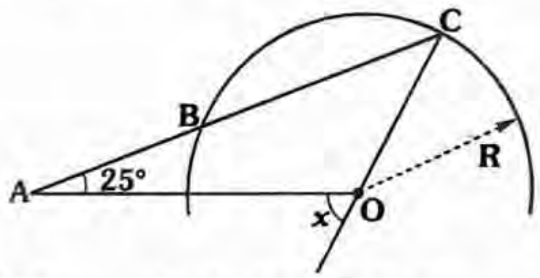
En el gráfico, calcule "x".



A) 90° B) 100° C) 110°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº 2

En el gráfico, AB=R. Calcule "x".



A) 50° B) 60° C) 65°
D) 75° E) 80°

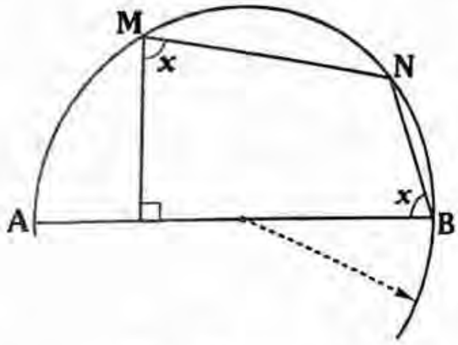
PROBLEMA Nº 3

Se tienen los puntos consecutivos A, T, C y D sobre una recta, tal que AT=3 y TC=2, con centro en A y radio AT se traza la circunferencia $\mathscr{C}$. Desde C, se traza la tangente $\overline{CM}$ (*M es punto de tangencia*). Calcule m∢MCD.

A) 120° B) 127° C) 143°
D) 121° E) 105°

PROBLEMA Nº 4

En el gráfico, $m\widehat{AM}=60°$, calcule "x".



A) 60° B) 75° C) 80°
D) 50° E) 70°

PROBLEMA Nº 5

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I) La unión de todos los puntos que equidistan de un punto fijo, forman una circunferencia.

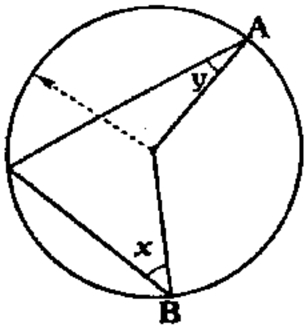
II) Si una recta coplanar a un circunferencia se intersecan en un punto entonces la recta es tangente a dicha circunferencia.

III) Si una recta coplanar a un arco de circunferencia la corta en un solo punto es tangente a dicho arco.

A) VFV B) FVF C) FFF
D) VVV E) VVF

PROBLEMA Nº 6

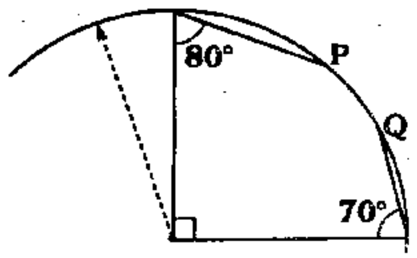
Si $m\widehat{AB}=100°$. Calcule $x+y$



A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 7

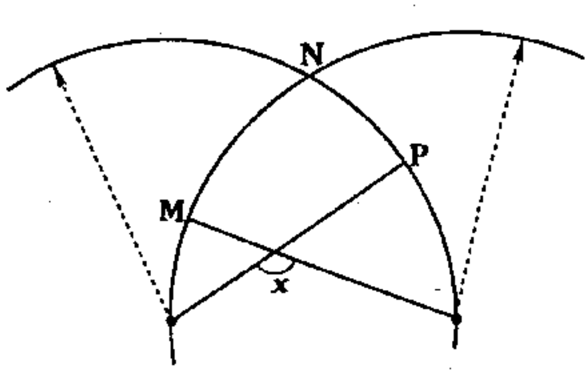
En el gráfico, calcule $m\widehat{PQ}$.



A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 8

Si $m\widehat{MN}+m\widehat{NP}=50°$, calcule "x".



A) 110° B) 140° C) 150°
D) 170° E) 135°

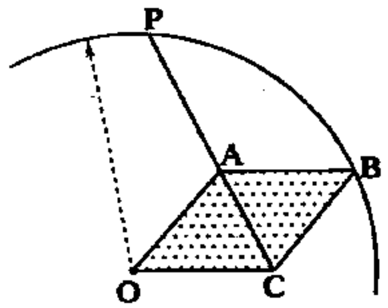
PROBLEMA Nº 9

Se tiene una circunferencia de diámetro $\overline{FG}$ y centro O, $\overline{AM}$ es una cuerda secante a $\overline{FG}$, con F en $\widehat{AM}$. Si $m\widehat{FM}=65°$ y $m\measuredangle OAM=40°$. Calcule $m\widehat{AG}$.

A) 130° B) 135°
C) 140° D) 145°
E) 155°

PROBLEMA Nº 10

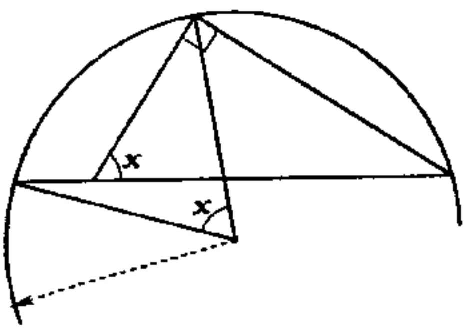
En el gráfico, OABC es un rombo.
Calcule $m\widehat{BP}$



A) 30° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 60°

PROBLEMA Nº 11

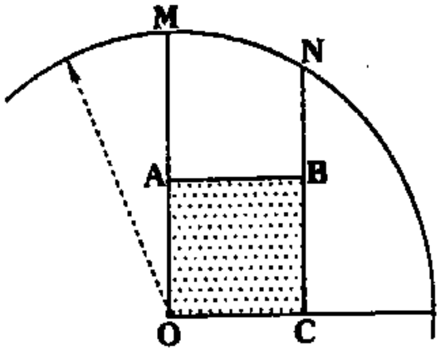
Calcule x.



A) 72° B) 60°
C) 45° D) 36°
E) 30°

PROBLEMA Nº 12

En el gráfico, OABC es un cuadrado y OA=AM. Calcule $m\overset{\frown}{MN}$.



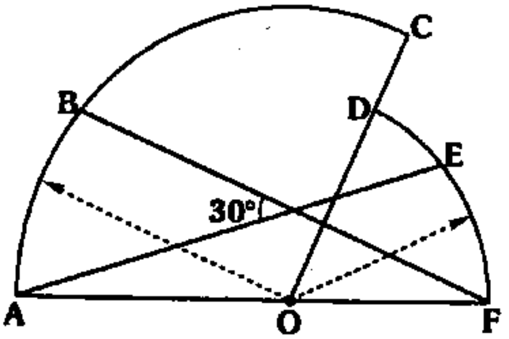
A) $\frac{53°}{2}$ B) $\frac{37°}{2}$ C) 30°

D) 37° E) 14°

PROBLEMA Nº 13

En el gráfico, $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{EF}$.

Calcule $m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{DE}$.



A) 150° B) 140° C) 120°

D) 100° E) 145°

PROBLEMA Nº 14

En el gráfico, OP=PM. Calcule $m\overset{\frown}{SM}$.

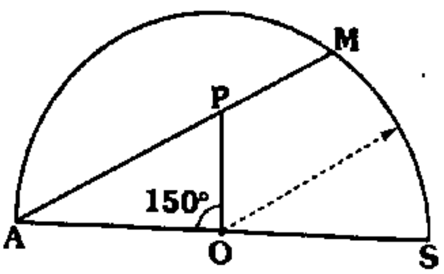
A) 10°

B) 18°

C) 20°

D) 25°

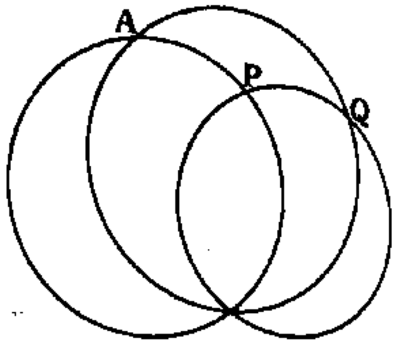
E) 30°



PROBLEMA Nº 15

En el gráfico, $m\overset{\frown}{AP} = 40°$ y $m\overset{\frown}{PQ} = 30°$

Calcule $m\overset{\frown}{AQ}$.

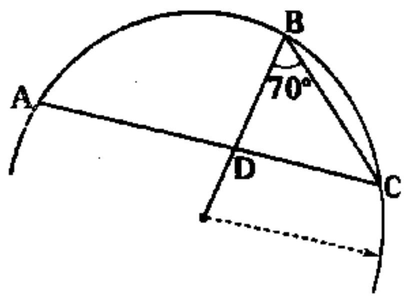


A) 60° B) 50° C) 70°

D) 35° E) 80°

PROBLEMA Nº 16

En el gráfico, BC=CD. Calcule $m\overset{\frown}{ABC}$.



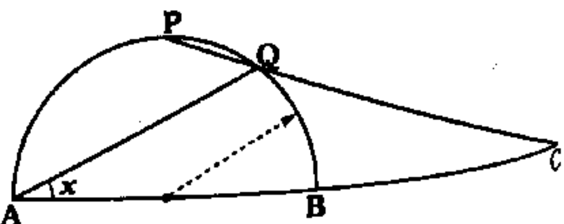
A) 110° B) 120° C) 130°

D) 140° E) 150°

PROBLEMA Nº 17

En el gráfico, AB=BC y $m\overset{\frown}{AP} = m\overset{\frown}{PQB}$.

Calcule "x".



A) 16° B) 18°30' C) 15°

D) 26°30' E) 22°30'

PROBLEMA Nº 18

En una circunferencia se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tal que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Si BQ=3, QD=2 y $m\measuredangle DBC = m\widehat{AD}$.

Calcule $m\widehat{AD}$. $\left(\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{Q\}\right)$

A) 37° B) 53° C) 74°

D) 60° E) $\dfrac{127°}{2}$

PROBLEMA Nº 19

En la semicircunferencia de diámetro AE se ubican los puntos B y D (B en $\widehat{AD}$), las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ se cortan en C. Si AB=BC y $m\measuredangle ACE = 70°$.

Calcule $m\widehat{ED}$.

A) 140° B) 130°

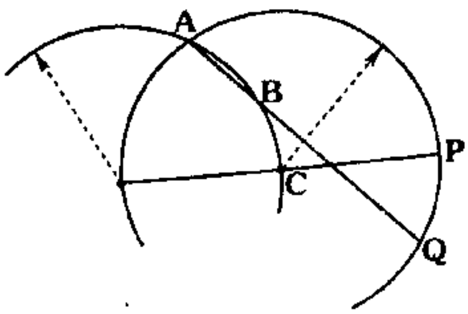
C) 120° D) 110°

E) 100°

PROBLEMA Nº 20

En el gráfico, $m\widehat{AB} = 2\left(m\widehat{BC}\right)$.

Calcule $m\widehat{PQ}$.



A) 60° B) 45°

C) 40° D) 30°

E) 35°

PROBLEMA Nº 21

En el gráfico, O es punto de tangencia y $m\widehat{OP} = 140°$. Calcule $m\widehat{PQ}$.

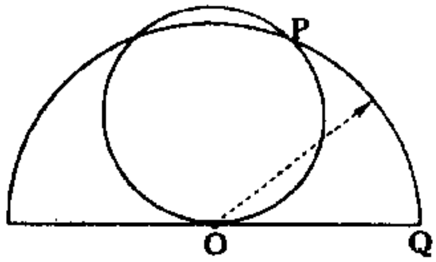
A) 40°

B) 50°

C) 60°

D) 70°

E) 80°



PROBLEMA Nº 22

En el gráfico, ABCO es un paralelogramo, P es punto de tangencia. Calcule "x".

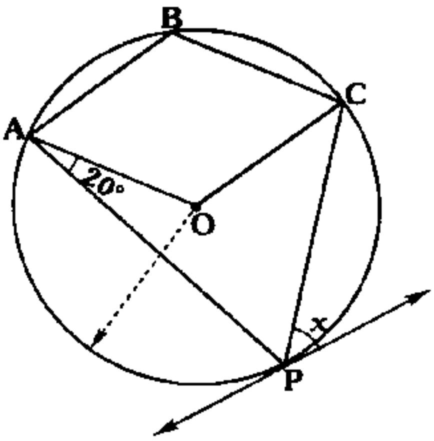
A) 60°

B) 70°

C) 80°

D) 50°

E) 40°



PROBLEMA Nº 23

En el gráfico, T es punto de tangencia. Calcule: $m\widehat{TDC} + m\widehat{AB} + m\widehat{AET}$

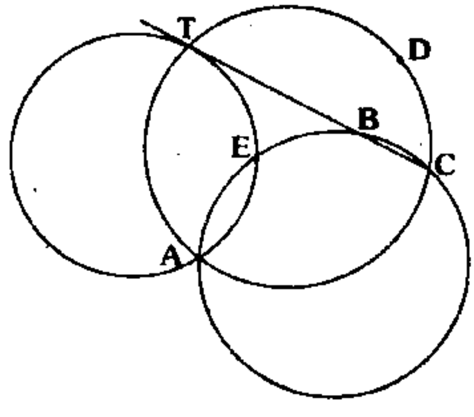
A) 180°

B) 270°

C) 360°

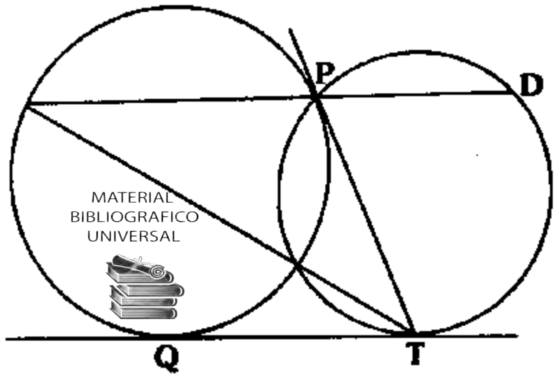
D) 450°

E) 330°



PROBLEMA Nº 24

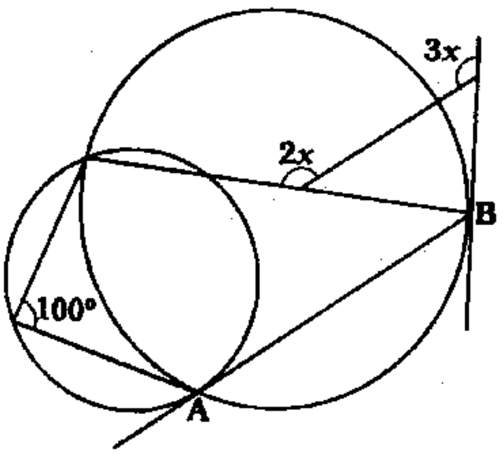
En el gráfico, P, T y Q son puntos de tangencia. Si $m\widehat{PD}=80°$, calcule $m\widehat{TD}$.



A) 100° B) 120° C) 140°
D) 160° E) 150°

PROBLEMA Nº 25

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".



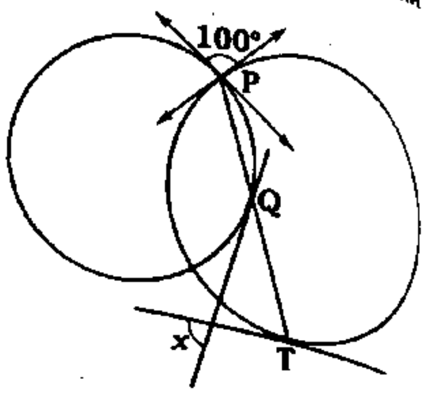
A) 40° B) 56° C) 54°
D) 44° E) 52°

PROBLEMA Nº 26

En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia.

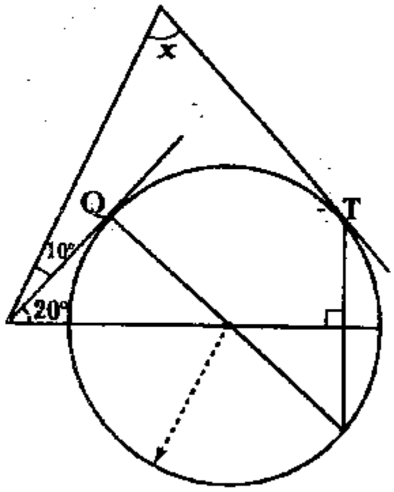
Calcule "x".

A) 55°
B) 110°
C) 70°
D) 80°
E) 65°



PROBLEMA Nº 27

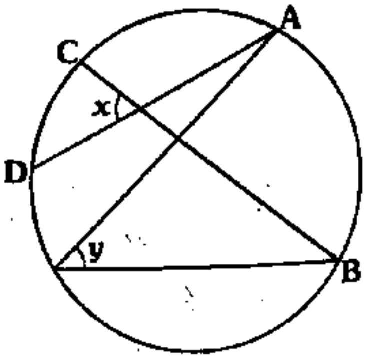
En el gráfico, Q y T son puntos de tangencia. Calcule "x".



A) 100° B) 120° C) 130°
D) 140° E) 110°

PROBLEMA Nº 28

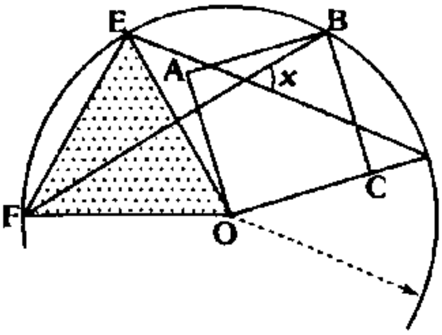
En el gráfico, $m\widehat{AB}=100°$ y $m\widehat{CD}=20°$. Calcule $x+y$.



A) 100° B) 105° C) 110°
D) 120° E) 130°

PROBLEMA Nº 29

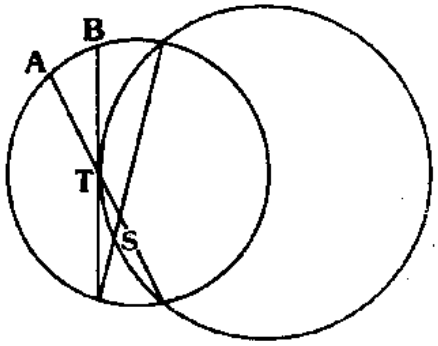
En el gráfico, las regiones sombreadas son regulares. Calcule "x".



A) 60°
B) 67,5°
C) 52,5°
D) 37,5°
E) 77,5°

PROBLEMA Nº 30

En el gráfico, T es punto de tangencia y $m\widehat{AB}=40°$. Calcule $m\widehat{TS}$.

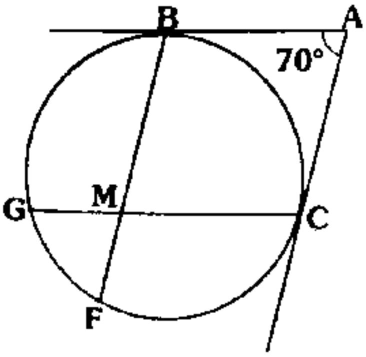


A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA Nº 31

En el gráfico, B y C son puntos de tangencia y MBAC es un paralelogramo.

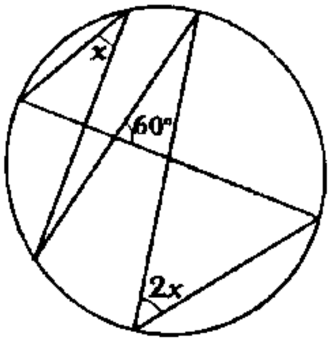
Calcule $m\widehat{FG}$.



A) 20° B) 30° C) 40°
D) 45° E) 50°

PROBLEMA Nº 32

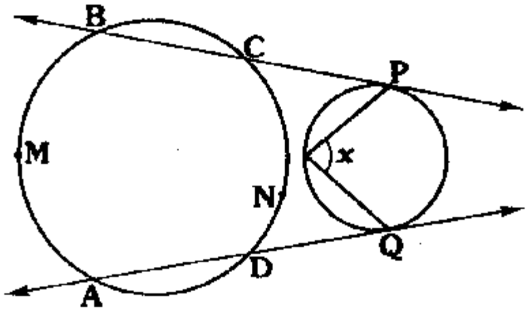
Calcule "x", en:



A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 25°

PROBLEMA Nº 33

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AMB}=200°$ y $m\widehat{CND}=100°$. Calcule "x".

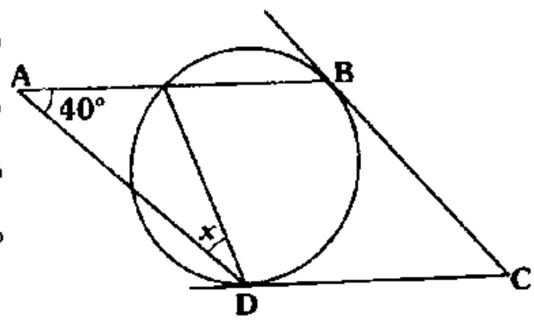


A) 30° B) 50° C) 65°
D) 45° E) 75°

PROBLEMA Nº 34

En el gráfico, B y D son puntos de tangencia y ABCD es un paralelogramo.

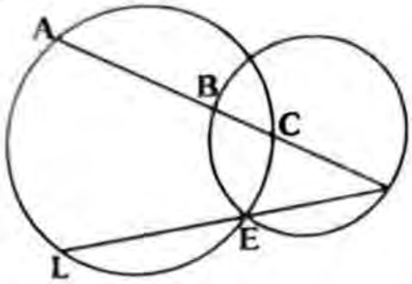
Calcule "x".



A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 35°
E) 40°

PROBLEMA Nº 35

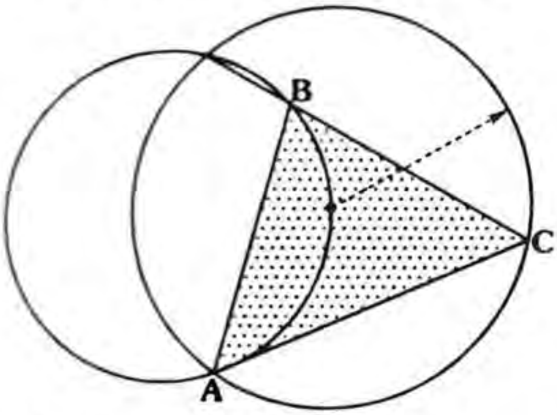
En el gráfico, $m\widehat{BE}=2(m\widehat{EC})$ y $m\widehat{AL}+m\widehat{BE}+m\widehat{EC}=240°$. Calcule $m\widehat{BE}$.



A) 40°
B) 70°
C) 80°
D) 100°
E) 120°

PROBLEMA Nº 36

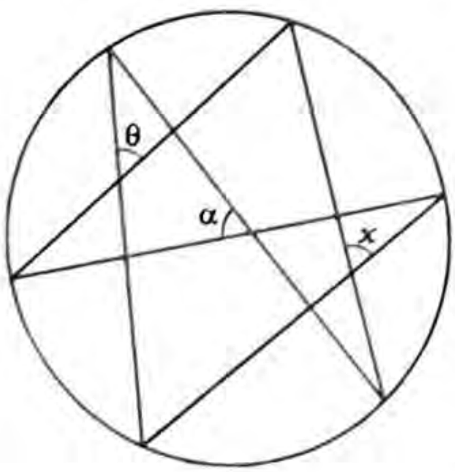
Indique que tipo de triángulo es ABC.



A) Escaleno
B) Rectángulo
C) Equilátero
D) Acutángulo
E) Isósceles

PROBLEMA Nº 37

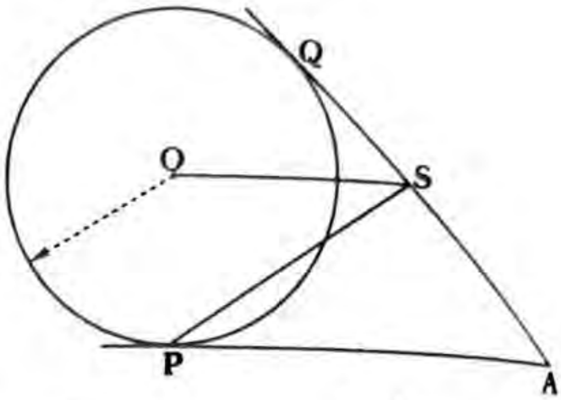
Si $\alpha+\theta=100°$. Calcule "x".



A) 50°
B) 40°
C) 80°
D) 70°
E) 60°

PROBLEMA Nº 38

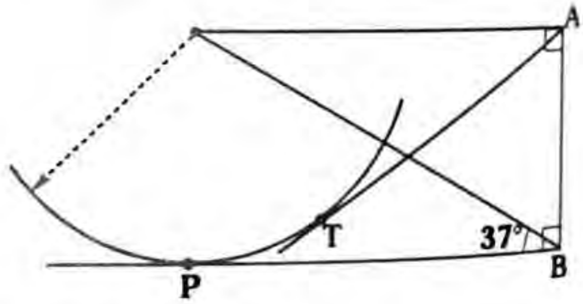
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si $\overline{OS}//\overline{PA}$, QS=a y AS=b. Calcule SP.



A) $\sqrt{ab}$
B) $\frac{a+b}{2}$
C) $\sqrt{b^2+a^2}$
D) $\sqrt{2b^2+a^2}$
E) $\sqrt{2b^2-a^2}$

PROBLEMA Nº 39

En el gráfico, P y T son puntos de tangencia. Si PB=4, calcule AT.

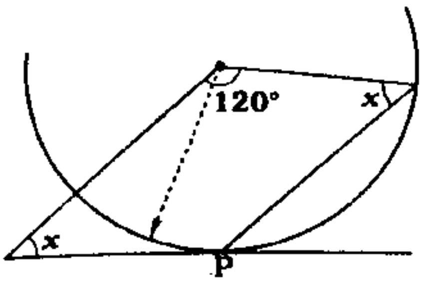


A) 5
B) $\sqrt{29}$
C) $\sqrt{34}$
D) $\sqrt{30}$
E) $\sqrt{7}$

PROBLEMA Nº 40

En el gráfico, P es punto de tangencia. Calcule "x".

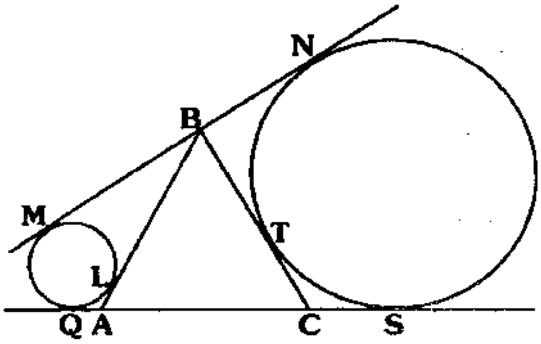
A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 36°



PROBLEMA Nº 41

En el gráfico, M, N, L, T, S y Q son puntos de tangencia.

Si el triángulo ABC es equilátero, calcule: $\frac{MN}{AB}$.



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1,5

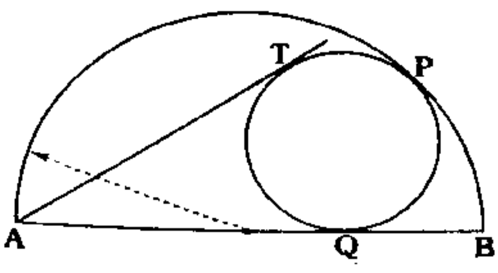
D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

PROBLEMA Nº 42

En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia. Si $m\overset{\frown}{TQ}+m\overset{\frown}{PB}=200°$.

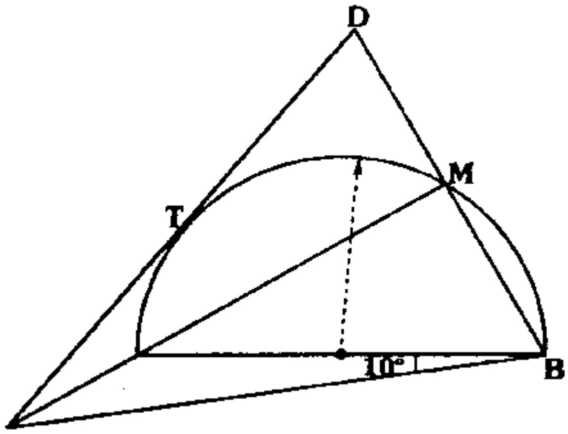
Calcule $m\overset{\frown}{TP}$.

A) 70°
B) 75°
C) 60°
D) 80°
E) 120°



PROBLEMA Nº 43

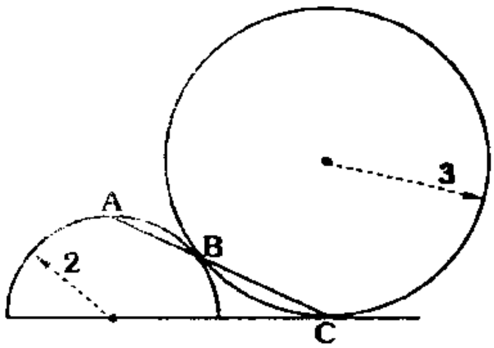
En el gráfico, T es punto de tangencia y BM=MD. Calcule $m\overset{\frown}{MT}$.



A) 90° B) 80° C) 50°
D) 70° E) 60°

PROBLEMA Nº 44

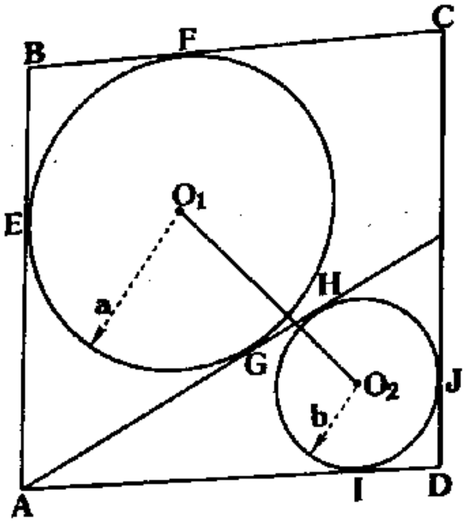
B y C son puntos de tangencia.
Calcule $m\overset{\frown}{AB}$.



A) 37° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 30°

PROBLEMA Nº 45

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y E, F, G, H, I y J son puntos de tangencia.
Si $a^2+b^2=100$, calcule O_1O_2.



A) 10

B) $5\sqrt{2}$

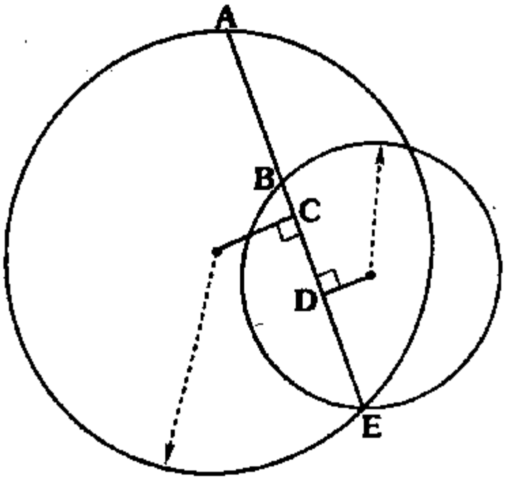
C) $10\sqrt{2}$

D) 15

E) 12,5

PROBLEMA Nº 46

En el gráfico, AB=10. Calcule CD.



A) 10 B) 7,5 C) 5
D) 6,5 E) 8

PROBLEMA Nº 47

En el gráfico, calcule $m\widehat{AB}$. Si ABCD es un cuadrado.

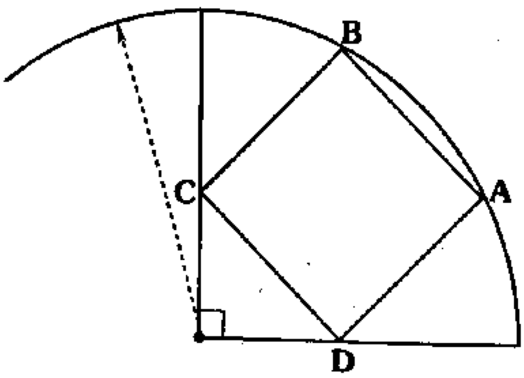
A) 30°

B) 53°

C) 37°

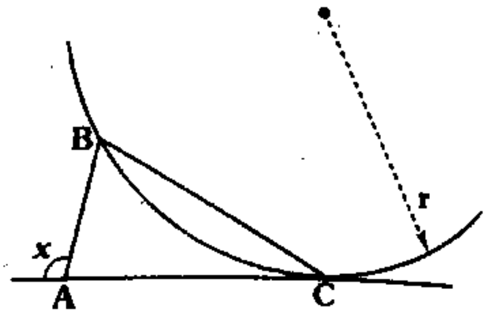
D) 28°

E) 16°



PROBLEMA Nº 48

En el gráfico, C es punto de tangencia. Si AC=BC=r, calcule "x".

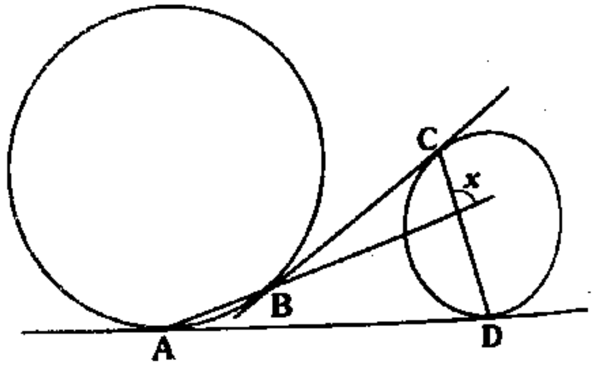


A) 90° B) 75° C) 84°
D) 105° E) 115°

PROBLEMA Nº 49

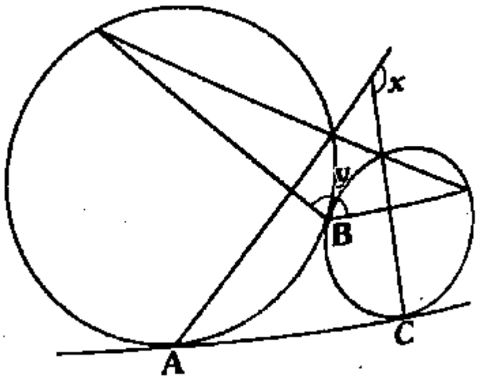
En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Demostrar que $x = 90°$.



PROBLEMA Nº 50

En el gráfico, A, B y C son puntos de tangencias. Indique la relación entre x e y.



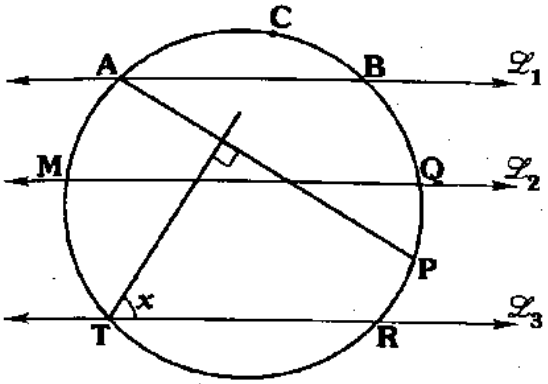
A) $x=y$ B) $x+y=180°$

C) $y=90°+x$ D) $x+y=270°$

E) $y=45°+x$

PROBLEMA Nº 51

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, $m\overset{\frown}{QP}=m\overset{\frown}{PR}$ y $m\overset{\frown}{ACB}+m\overset{\frown}{MTR}=160°$. Calcule "$x$".

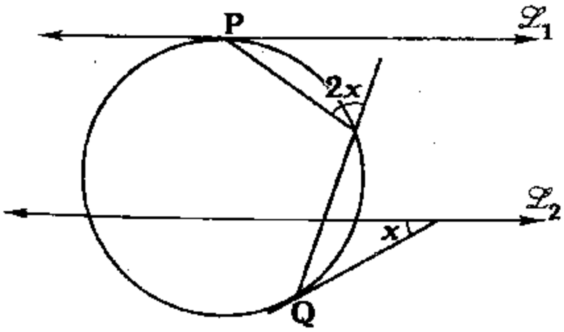


A) 60° B) 65° C) 70°

D) 40° E) 80°

PROBLEMA Nº 52

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Calcule "$x$".

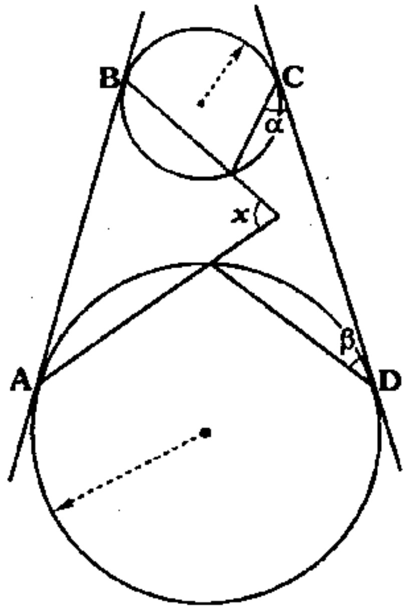


A) 30° B) 18° C) 36°

D) 35° E) 40°

PROBLEMA Nº 53

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si $\alpha+\beta=86°$. Calcule "x".



A) 94° B) 104° C) 86°

D) 152° E) 133°

PROBLEMA Nº 54

En una circunferencia se ubican los puntos consecutivos A, P, B, Q y S, las tangentes en P y Q son perpendiculares y $m\measuredangle ABS=80°$. Calcule la medida del menor ángulo entre $\overleftrightarrow{PS}$ y $\overleftrightarrow{AQ}$.

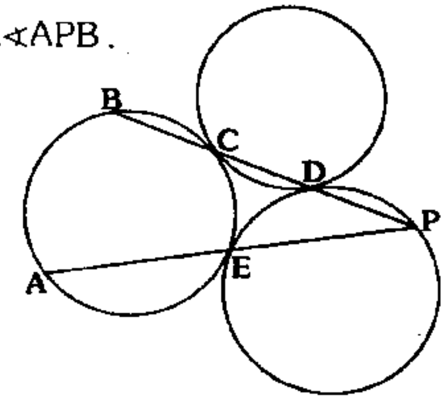
A) B) 80° C) 65°

D) 55° E) 75°

PROBLEMA Nº 55

En el gráfico, C, D y E son puntos de tangencia. Si $m\overset{\frown}{AE}-m\overset{\frown}{BC}=40°$.

Calcule $m\measuredangle APB$.



A) 10°

B) 20°

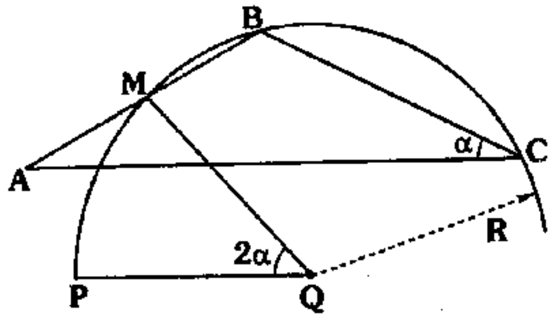
C) 30°

D) 40°

E) 50°

PROBLEMA Nº 56

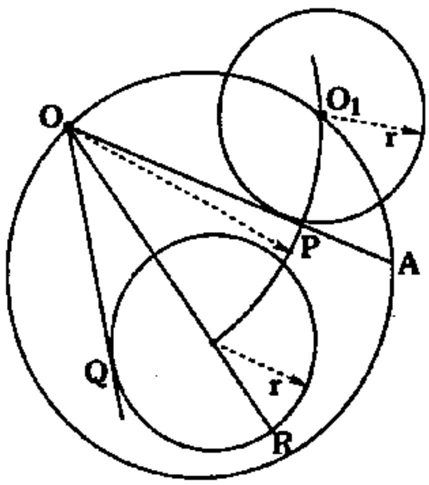
En el gráfico, AM=MB, $\overline{AC} // \overline{PQ}$ y R=4. Calcule AC.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

PROBLEMA Nº 57

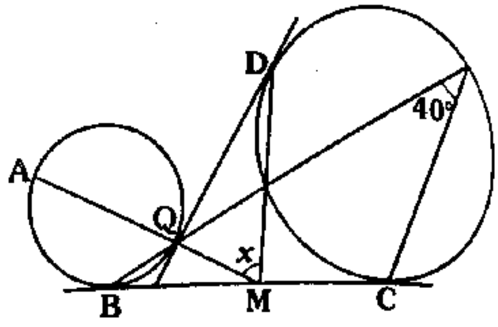
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia y $m\widehat{O_1A} = 2\alpha$. Calcule $m\widehat{QR}$.



A) 2α B) $90° - \alpha$
C) $90° + \alpha$ D) $90° - 2\alpha$
E) $90° + 2\alpha$

PROBLEMA Nº 58

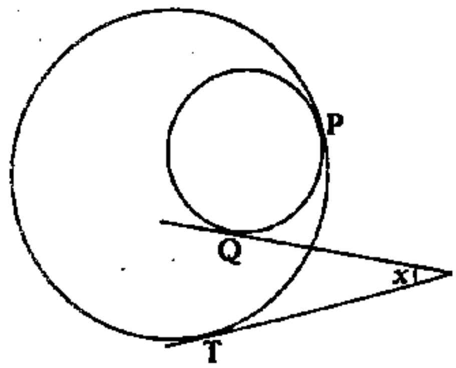
Calcule "x", si $m\widehat{AB} = 80°$ (B, Q, D y C son puntos de tangencia).



A) 90° B) 40° C) 50°
D) 80° E) 70°

PROBLEMA Nº 59

En el gráfico, calcule "x", si $m\widehat{PQ} - m\widehat{PT} = 40°$. (P, Q y T son puntos de tangencia).



A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 60

En el gráfico, calcule x/y (A, B, C y D son puntos de tangencia).

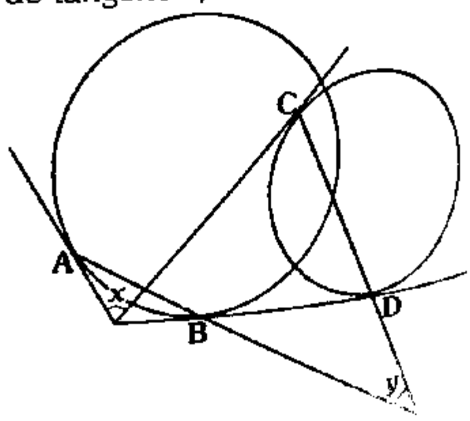
A) 1

B) 2

C) $\frac{1}{2}$

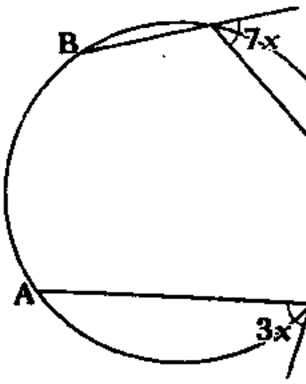
D) $\frac{1}{3}$

E) $\frac{2}{3}$



PROBLEMA Nº 61

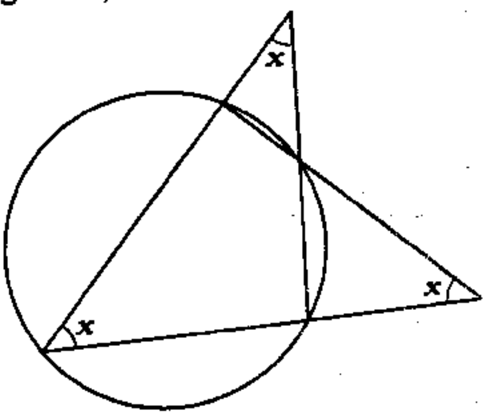
En el gráfico, $m\widehat{AB}=120°$. Calcule "x".



A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 62

En el gráfico, calcule "x".

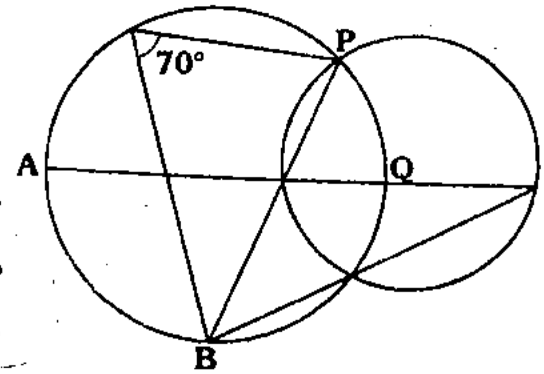


A) 30° B) 45° C) 60°
D) 36° E) 72°

PROBLEMA Nº 63

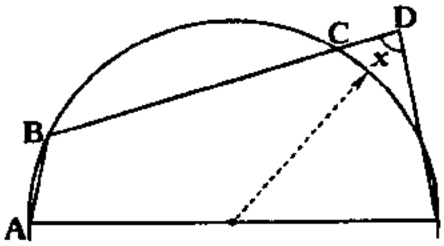
En el gráfico, calcule $m\widehat{AB}+m\widehat{PQ}$.

A) 140°
B) 150°
C) 160°
D) 120°
E) 110°



PROBLEMA Nº 64

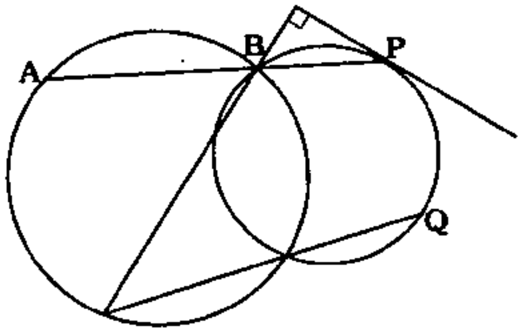
En el gráfico, AB=CD, $m\widehat{AB}=20°$ y $m\widehat{BC}=100°$. Calcule "x".



A) 60° B) 70° C) 80°
D) 100° E) 65°

PROBLEMA Nº 65

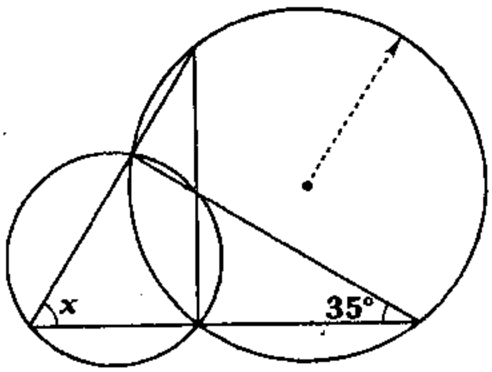
P es punto de tangencia y $m\widehat{PQ}=80°$. Calcule $m\widehat{AB}$.



A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 66

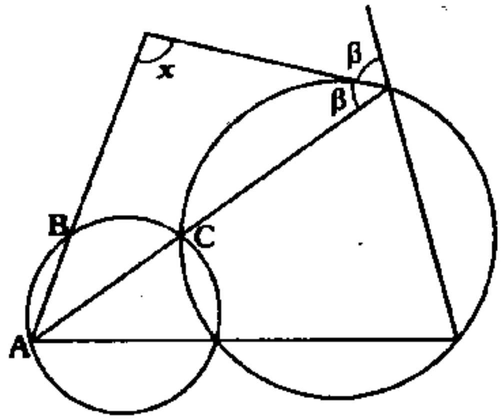
Calcule "x", en:



A) 35° B) 55° C) 70°
D) 80° E) 65°

PROBLEMA Nº 67

Si $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{BC}$. Calcule "x" en:

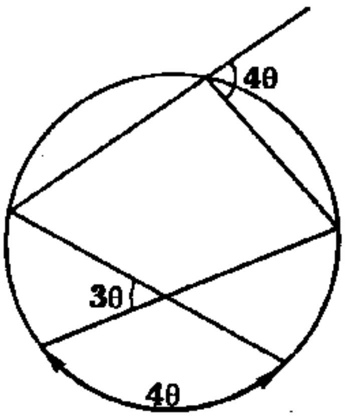


A) 60° B) 90° C) 120°
D) 75° E) 65°

PROBLEMA Nº 68

En el gráfico, calcule "θ".

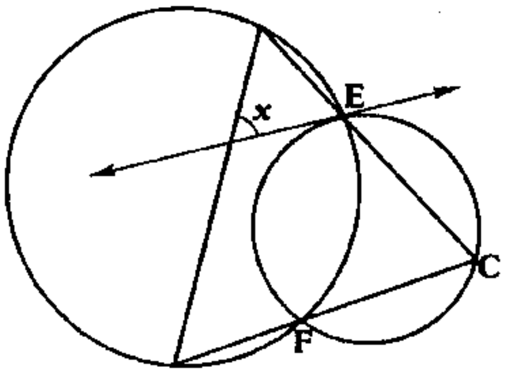
A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



PROBLEMA Nº 69

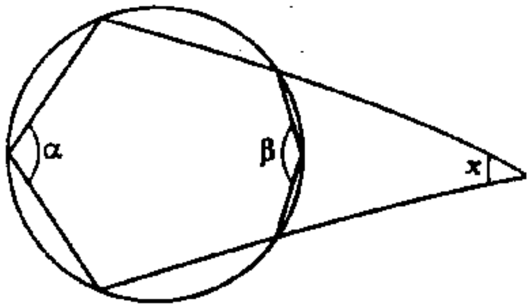
En el gráfico, E es punto de tangencia y $m\overset{\frown}{EFC} = 230°$. Calcule "x".

A) 70°
B) 60°
C) 55°
D) 65°
E) 50°



PROBLEMA Nº 70

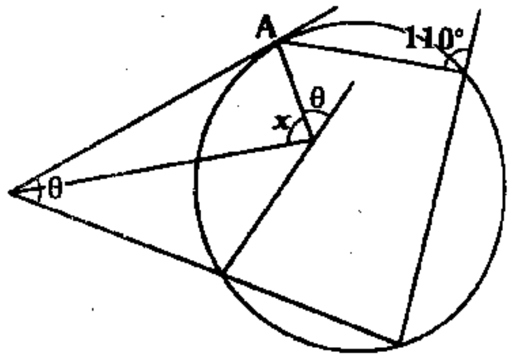
En el gráfico, $\beta - \alpha = 40°$. Calcule "x".



A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 80°

PROBLEMA Nº 71

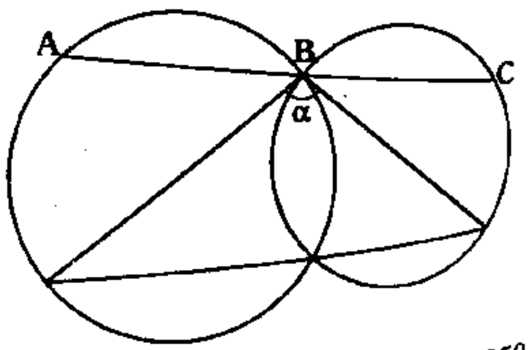
A es punto de tangencia. Calcule "x".



A) 55° B) 70° C) 80°
D) 100° E) 90°

PROBLEMA Nº 72

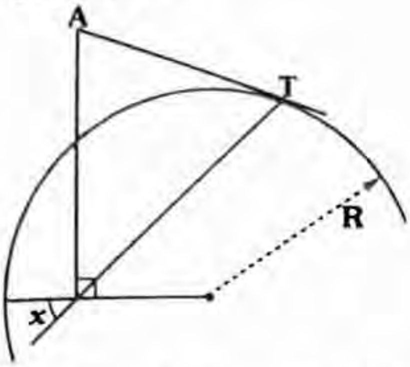
En el gráfico, $m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} = 210°$. Calcule "x".



A) 150° B) 75° C) 105°
D) 100° E) 90°

PROBLEMA Nº 73

En el gráfico, T es punto de tangencia y AT=R. Calcule "x".



A) 30° B) 53° C) 60°

D) 45° E) $\dfrac{127°}{2}$

PROBLEMA Nº 74

En el gráfico, $m\widehat{AB}=50°$. Calcule "x".

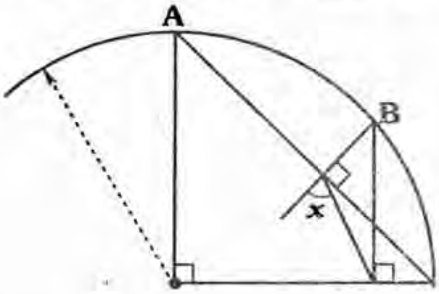
A) 50°

B) 40°

C) 65°

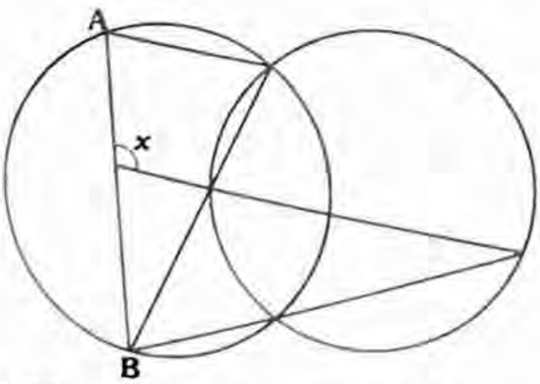
D) 75°

E) 70°



PROBLEMA Nº 75

Si $m\widehat{AB}=160°$, calcule "x".

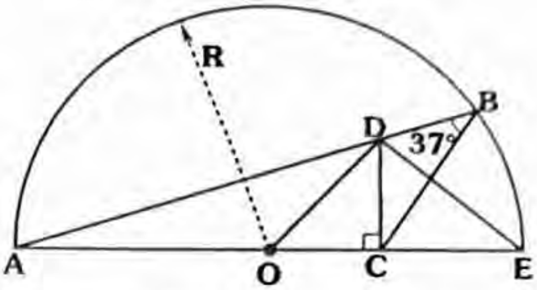


A) 100° B) 80° C) 160°

D) 140° E) 120°

PROBLEMA Nº 76

En el gráfico, DE=5 y R=7, calcule OD.

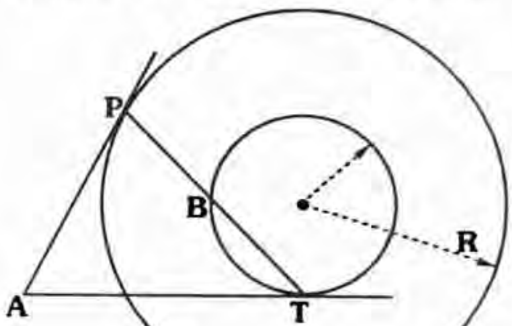


A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) 4

D) 3 E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 77

En el gráfico, P y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{BT}=74°$ y AP=6. Calcule R.



A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 78

Si BPQR y NLRM son cuadrados y $m\widehat{AP}=40°$. Calcule "x".

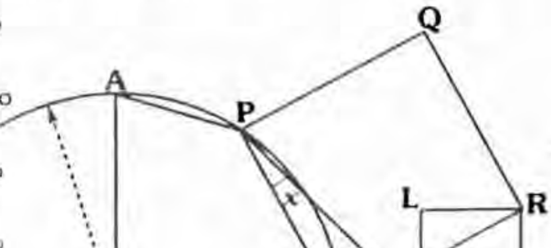
A) 15°

B) 20°

C) 25°

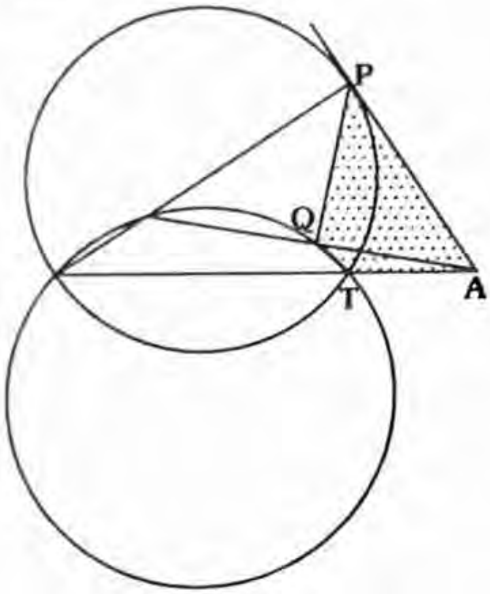
D) 30°

E) 35°



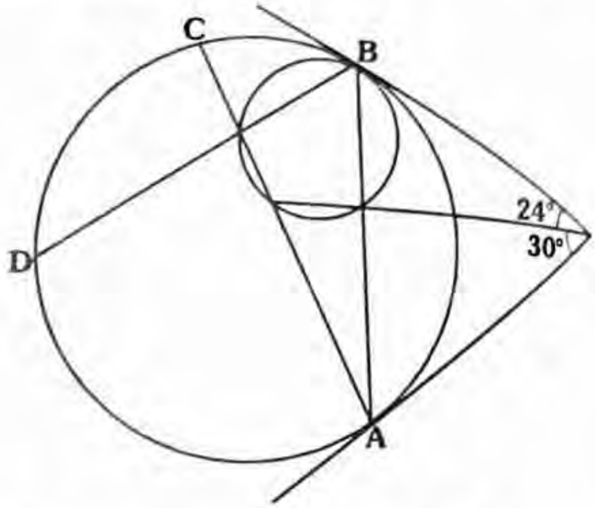
PROBLEMA Nº 79

En el gráfico, P es punto de tangencia. Demostrar que el cuadrilátero ATQP es inscriptible.



PROBLEMA Nº 80

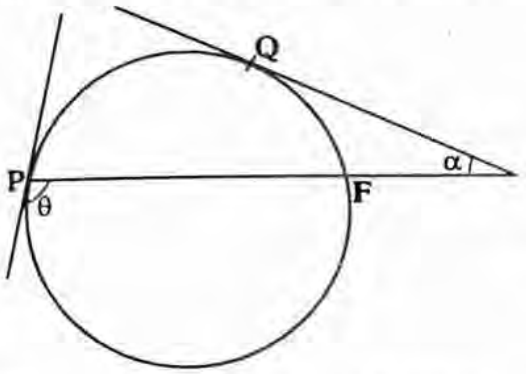
En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Calcule $m\overset{\frown}{CD}$.



A) 40° B) 50° C) 60°
D) 48° E) 68°

PROBLEMA Nº 81 **(Seminario)**

En la figura adjunta, P y Q son puntos de tangencia, $\alpha+\theta=150^\circ$. Halle $m\widehat{QF}$.



A) 26° B) 28° C) 30°
D) 32° E) 34°

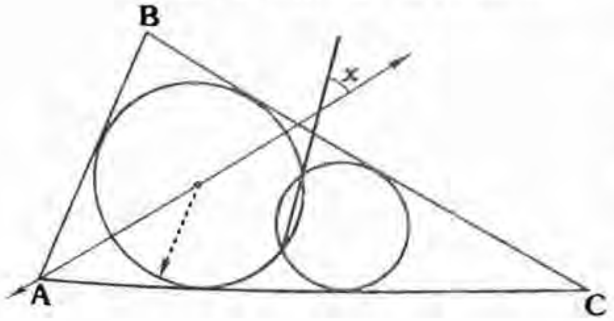
PROBLEMA Nº 82 **(Seminario)**

Dos circunferencias congruentes contenidas en el mismo plano, no puede tener solamente el siguiente número de tangentes comunes:

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) N.A

PROBLEMA Nº 83 **(Seminario)**

En un triángulo ABC; $m\sphericalangle B=\beta$. Halle: "x".



A) $\frac{\beta}{4}$ B) $\frac{\beta}{2}$ C) β

D) $90-\beta$ E) $90-\frac{\beta}{2}$

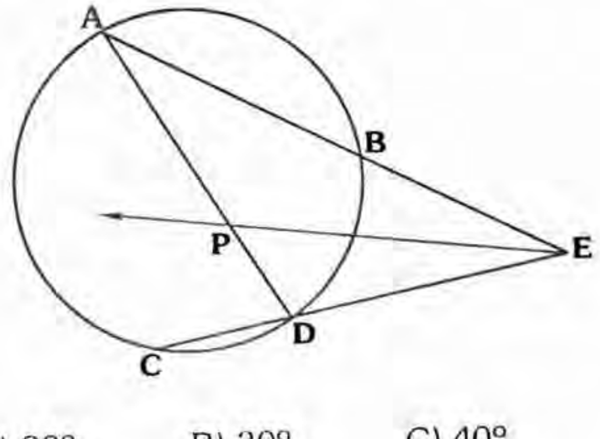
PROBLEMA Nº 84 **(Seminario)**

Dadas dos circunferencias tangentes exteriores de radios congruentes y centro O y O' respectivamente. Si desde O y O' se trazan las tangentes a la otra circunferencia determinando un ángulo que mide 5X, luego el mayor valor de X es:

A) 12° B) 15° C) 18°
D) 21° E) 24°

PROBLEMA Nº 85 **(Seminario)**

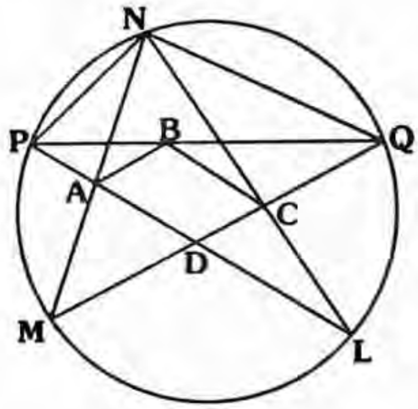
En la figura mostrada $m\widehat{AB}+m\widehat{CD}=120^\circ$ y $m\sphericalangle AEP=m\sphericalangle PED$. Calcule la medida del ángulo agudo determinado por $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{EP}$.



A) 20° B) 30° C) 40°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 86 (PRÁCTICA CALIFICADA)

En la figura mostrada ABCD es un paralelogramo y $m\widehat{PNQ}=160°$. Calcule la medida del ángulo MNL.



A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA Nº 87 (Seminario)

Se tienen las circunferencias exteriores con diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (B y C en $\overline{AD}$), en $\overline{BC}$ se ubica el punto P y en una recta tangente común exterior se ubican los puntos M y N tal que $\overline{MP}$ y $\overline{NP}$ son tangentes a las circunferencias en los puntos Q y T respectivamente y $m\measuredangle DPT=m\measuredangle QPA$.

Si PQ=a y PT=b entonces, la longitud de $\overline{MN}$ es:

A) $a+b$ B) $\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{a^2+b^2}$

D) $\dfrac{ab}{a+b}$ E) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

PROBLEMA Nº 88 (Seminario)

Sea ABC un triángulo rectángulo; $m\measuredangle B=90$. La circunferencia ex–inscrita relativa al cateto $\overline{BC}$, determina los puntos de tangencia: Q en $\overline{BC}$ y M, N en las prolongaciones de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, se traza $\overline{QJ}\perp\overline{MN}$ (J en $\overline{MN}$). Halle $m\measuredangle CJB$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

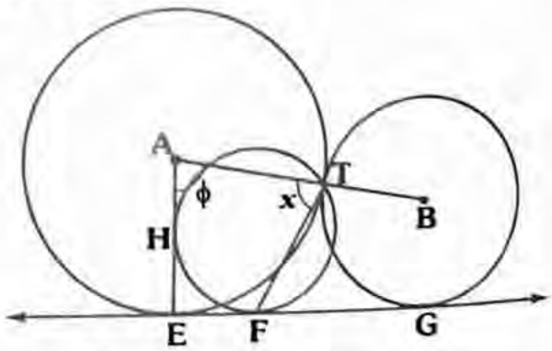
PROBLEMA Nº 89 (Seminario)

ABCD es un trapecio de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ inscrito en una circunferencia talque AD=2BC, CH es altura y su prolongación intercepta a la circunferencia en G. Si DG=BD y AD=8. Halle CH.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 90 (Seminario)

En la figura A, B son centros de las circunferencias: E, F, G, H y T son puntos de tangencia. Halle x, si dos circunferencias son de igual radio.



A) $90°+\dfrac{\phi}{2}$ B) $180°-2\phi$

C) $180°-\dfrac{3}{2}\phi$ D) $90°-\dfrac{\phi}{2}$

E) $180°-\dfrac{\phi}{2}$

PROBLEMA Nº 91 (Seminario)

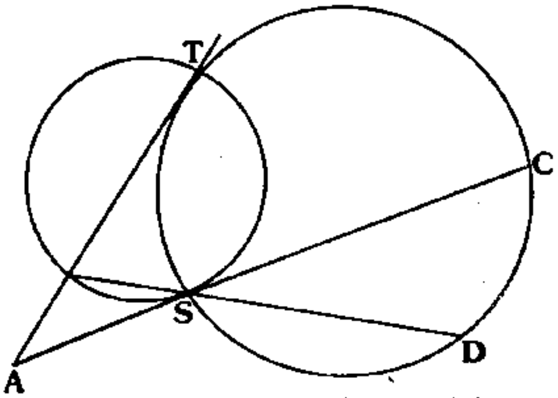
Una circunferencia $\mathscr{C}_2$ contiene al centro O de la circunferencia $\mathscr{C}_1$ y la interseca en A y B; si en $\mathscr{C}_2$ se trazan las cuerdas perpendi-

culares $\overline{OP}$ y $\overline{AQ}$ de modo $m\widehat{PQ}=120°$.
Calcule la $m\widehat{AB}$ en $\mathscr{C}_1$.

A) 100° B) 110°
C) 120° D) 130°
E) 140°

PROBLEMA Nº 92 **(Seminario)**

En la figura $m\widehat{DC}=80°$, $m\widehat{DS}=40°$ y T y S son puntos de tangencia, halle $m\sphericalangle TAS$.



A) 20° B) 30° C) 35°
D) 40° E) 60°

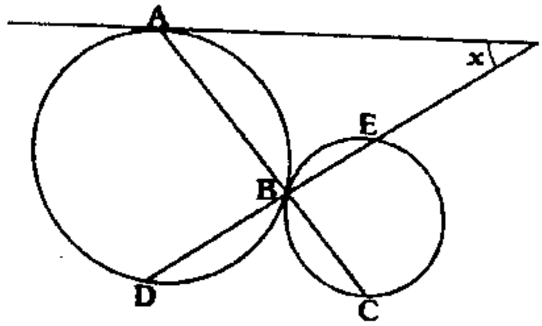
PROBLEMA Nº 93 **(Seminario)**

Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se interceptan en los puntos P y Q. En los arcos mayores PQ de cada circunferencia se ubican los puntos A y B respectivamente. Si $m\widehat{AP}=40°$, $m\widehat{PB}=50°$ y la suma de las medidas de los arcos menores PQ es 110°. Halle $m\sphericalangle APB$.

A) 90° B) 95° C) 100°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA Nº 94 **(Seminario)**

En la figura A, B, son puntos de tangencia y $m\widehat{BD}=102°$ y $m\widehat{BC}=114°$.
Halle "x".



A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº 95 **(Seminario)**

Dos circunferencias congruentes se intersectan en C y E. Si en una de ellas se eligen los puntos A y B tal que $\overline{AE}\cap\overline{BC}=\{D\}$ y D pertenece a la otra circunferencia. Si $m\widehat{AB}=122°$.
Calcule $m\sphericalangle CDE$.

A) 110° B) 118,5° C) 120,5°
D) 135° E) 140°

PROBLEMA Nº 96 **(Seminario)**

Dos circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes exteriores y la recta que pasa por el punto de tangencia E intercepta a $\mathscr{C}_1$ en A a $\mathscr{C}_2$ en B. Si $\overline{AF}$ es cuerda en $\mathscr{C}_1$, $\overline{BG}$ es cuerda en $\mathscr{C}_2$, $\overleftrightarrow{FG}$ es tangente común y los rayos AX y BY forman con AB ángulos de medidas "α" y "ω", siendo 2α y 2ω las medidas de los ángulos que forman FA con AX y GB con BY; calcule la medida del menor ángulo que determinan AX con BY.

A) 30° B) 70° C) 75°
D) 90° E) A y D

PROBLEMA Nº 97 **(Seminario)**

$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias tangentes exteriores en P, desde un punto exterior Q se

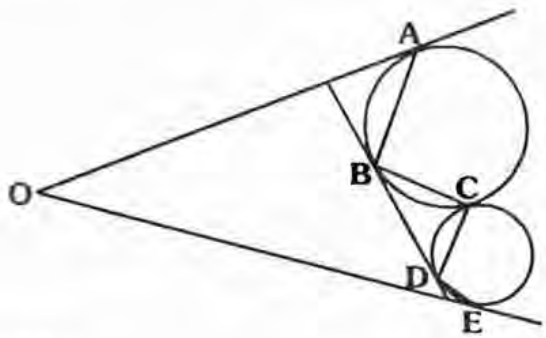
trazan una recta tangente a cada circunferencia en T y S ($T \in \mathscr{C}_1$ y $S \in \mathscr{C}_2$). Si $m\sphericalangle TQS = 80°$.

Halle la medida del ángulo agudo que forman las rectas PS y TP.

A) 40° B) 45° C) 50°
D) 55° E) 60°

PROBLEMA Nº 98 **(Seminario)**

En la figura mostrada los puntos A, B, C, D y E son de tangencia. Si $m\sphericalangle AOE = 2°$, entonces $m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle CDE$ es:



A) 179° B) 180°
C) 181° D) 182°
E) 190°

PROBLEMA Nº 99 **(Seminario)**

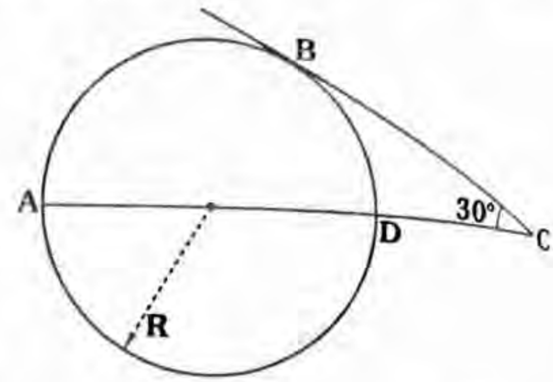
Desde un punto C exterior a una circunferencia se trazan la tangente $\overline{CT}$ y la secante $\overline{CBA}$. En la prolongación de la cuerda TB se ubica el punto D tal que la $m\sphericalangle BDC = 40°$. En la prolongación del segmento CT se ubica el punto E y en la prolongación del segmento DC se ubica el punto F. Si $m\sphericalangle ATE = m\sphericalangle TCF$.

Halle $m\sphericalangle ACT$.

A) 20° B) 40° C) 45°
D) 60° E) 80°

PROBLEMA Nº 100 **(Seminario)**

En la figura mostrada, calcular el radio de una circunferencia que equidista de A, B, C y D.



A) R B) 2R C) $\frac{3R}{2}$
D) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2R}{3}$

PROBLEMA Nº 101 **(Seminario)**

En un cuadrado ABCD se traza la circunferencia inscrita determinando los puntos de tangencia P y T con los lados $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Si $\overline{AP}$ y $\overline{BD}$ intersecan a la circunferencia, y al arco menor PT en los puntos M y N respectivamente, calcule $m\widehat{MN}$.

A) 80° B) 82° C) 84°
D) 86° E) 88°

PROBLEMA Nº 102 **(Seminario)**

En un triángulo ABC, $m\sphericalangle A = 30°$ y $m\sphericalangle B = 96°$, $E \in \overline{AB}$. Si AE=BC.

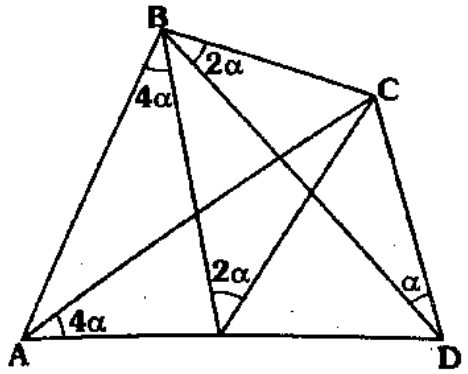
Calcule la $m\sphericalangle ACE$.

A) 15° B) 18° C) 20°
D) 24° E) 30°

PROBLEMA Nº 103 **(Seminario)**

En la figura adjunta, AB=AD.

Halle el valor de "α".



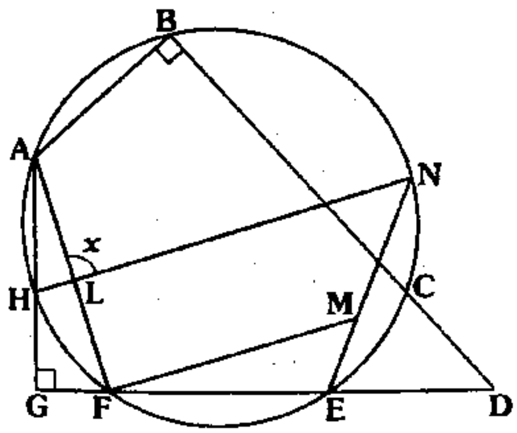
A) 6° B) 8° C) 10°
D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 104 **(Seminario)**

En la figura adjunta:

$$m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle AGD = 90°$$

MN=ME, $NC \cong CE$, $m\sphericalangle MGE = 20°$, Halle el valor de X.



A) 60° B) 70° C) 80°
D) 90° E) 100°

PROBLEMA Nº 105 **(Seminario)**

Las circunferencias que tienen como diámetros las tres cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ de una circunferencia dada, se intersecan por pares en los puntos P, Q, y R respectivamente, luego podemos afirmar que:

A) $m\sphericalangle BCD = 120°$
B) $m\sphericalangle PCD = 90°$
C) P, Q y R son colineales
D) $m\sphericalangle PQD = 120°$
E) Todas las proposiciones son falsas.

PROBLEMA Nº 106 **(Seminario)**

En un triángulo ABC, se circunscribe una circunferencia, se traza la cuerda $\overline{DE}$ que intersecta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos P y Q respectivamente, $BD \cong BE$, la $m\sphericalangle ABC = 10°$, la $m\sphericalangle PCB = 5°$.

Halle la $m\sphericalangle AQC$.

A) 10 B) 15 C) 18
D) 20 E) 25

PROBLEMA Nº 107 **(Seminario)**

ABCD es un cuadrilátero bicentrico: I es el centro de la circunferencia inscrita $\mathscr{C}_1$. O es el centro de la circunferencia circunscrita $\mathscr{C}_2$ la recta IO interseca a las circunferencias $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_1$, en los puntos consecutivos P, Q, S y T. Si PQ=a, ST=b y b>a, halle OI. (P y T en $\mathscr{C}_2$ y Q y S en $\mathscr{C}_1$).

A) $\dfrac{b-a}{2}$ B) $\dfrac{a+b}{2}$ C) $a-b+1$
D) $\sqrt{ab}$ E) $\dfrac{2b-a}{2}$

PROBLEMA Nº 108 **(Seminario)**

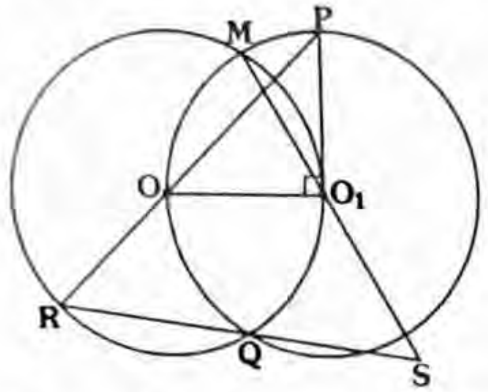
En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BQ}$. Si $\overline{AB} \cong \overline{QC}$ y $m\sphericalangle A = 80°$ y $m\sphericalangle ABQ = 70°$.

Halle $m\sphericalangle BCA$

A) 15° B) 18° C) 20°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA Nº 109 **(Seminario)**

En la figura mostrada, las circunferencias son congruentes. O y O_1 son los centros $m\measuredangle OO_1P = 90$. Halle la $m\measuredangle RSM$.



A) 30° B) 36° C) 80°
D) 45° E) 52,5°

PROBLEMA Nº 110 **(Seminario)**

En un triángulo ABC, demostrar que la circunferencia circunscrita al triángulo biseca al segmento que une el incentro con el excentro.

PROBLEMA Nº 111 **(Seminario)**

En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AQ}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CP}$.

Si $m\measuredangle BAC = \alpha$, $m\measuredangle ABC = \beta$ y $m\measuredangle BCA = \gamma$, entonces demostrar que:

A) $m\measuredangle PQF = 180° - 2\alpha$

B) $m\measuredangle PFQ = 180° - 2\beta$

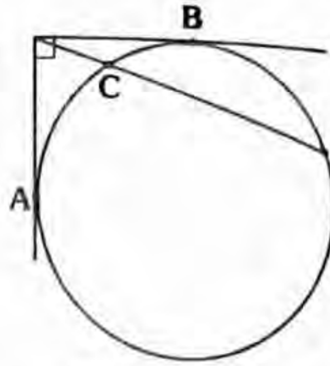
C) $m\measuredangle QPF = 180° - 2\gamma$

D) $m\measuredangle QPF = 170° - 4\gamma$

E) $m\measuredangle QPF = 184° - 2\theta$

PROBLEMA Nº 112 **(Práctica)**

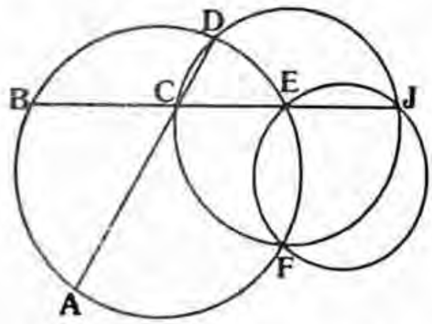
En la figura, A y B son puntos de tangencia, $m\widehat{AC} = m\widehat{BD}$, halle $m\widehat{BD}$.



A) 30° B) 43° C) 45°
D) 60° E) 53°

PROBLEMA Nº 113 **(Seminario)**

En la figura, $m\widehat{EJ} = 50°$. Hallar $m\widehat{AB}$

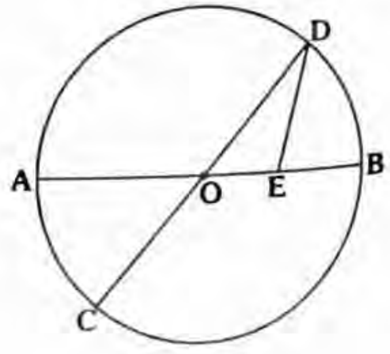


A) 50° B) 40° C) 130°
D) 65° E) 75°

PROBLEMA Nº 114 **(Seminario)**

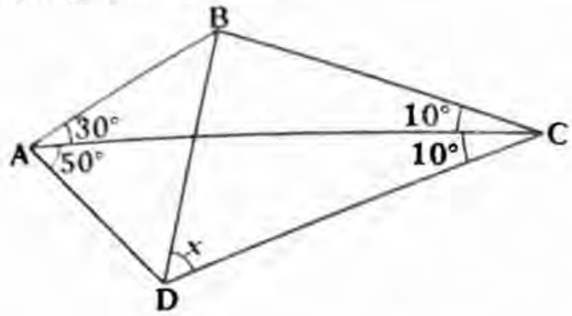
Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ diámetro de la circunferencia, si DE=5u y $2(m\measuredangle CDE) + 3(m\measuredangle DOB) = 180°$, entonces la longitud (en u) de $\overline{AC}$ es.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



PROBLEMA Nº 115 **(Seminario)**

En la figura, hallar "x".



A) 30° B) 45° C) 49°
D) 55° E) 60°

PROBLEMA Nº 116 **(Seminario)**

Indicar el valor de verdad de:

I. Todo diámetro que biseca a una cuerda es perpendicular a dicha cuerda.

II. Si dos circunferencias son secantes, entonces el segmento que une los centros intercepta a la cuerda común.

III. La mediatriz de una cuerda contiene al centro de la circunferencia.

A) FFV B) VVF C) FVV
D) FFF E) VVV

PROBLEMA Nº 117 **(Seminario)**

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Dos puntos distintos de una circunferencia determinan un solo arco.

II. Si un segmento intercepta a una circunferencia en un punto, entonces es tangente.

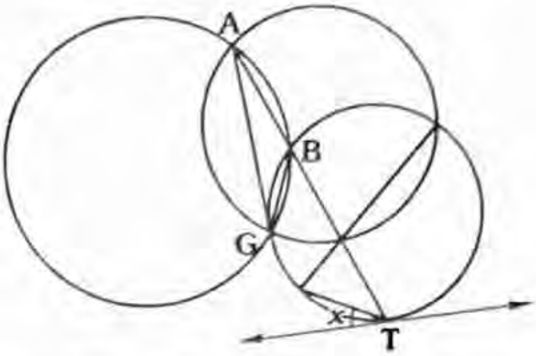
III. Si dos circunferencias coplanares, no tienen un punto común, entonces son exteriores.

A) FFV B) VVF C) FVV
D) FFF E) VVV

PROBLEMA Nº 118 **(Seminario)**

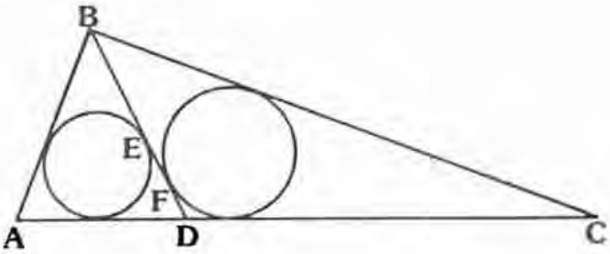
Se tienen tres circunferencias que pasan por el punto G, siendo $m\measuredangle AGB = 50°$; calcule "x". (T es punto de tangencia)

A) 45°
B) 25°
C) 65°
D) 50°
E) 75°



PROBLEMA Nº 119 **(Seminario)**

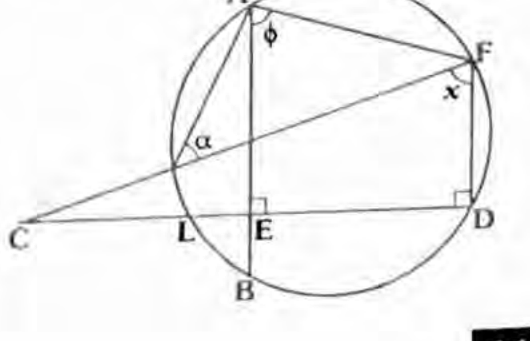
En el triángulo rectángulo ABC, E y F son puntos de tangencia $BE - FD = 8$, halle la longitud del inradio de ABC.



A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 120 **(Seminario)**

En la figura mostrada, R es radio de la circunferencia CL=2R. Hallar "x".



A) $90°+\alpha-\phi$ B) $90°+\phi-\alpha$

C) $90°+\frac{1}{2}(\alpha-\phi)$ D) $90°+\frac{1}{2}(\phi-\alpha)$

E) $90°+\frac{1}{4}(\alpha-\phi)$

PROBLEMA Nº 121 **(Seminario)**

Indique cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas:

I. Sean A y B dos puntos de una circunferencia de centro O, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta que contiene a los puntos medios de la cuerda $\overline{AB}$ y del arco $\widehat{AB}$. Entonces $O \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

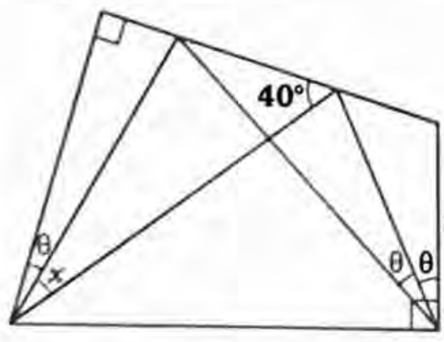
II. El teorema de Pithot, se aplica a un polígono circunscrito de número par de lados.

III. Todo paralelogramo es inscriptible.

A) I B) II C) I y II
D) I y III E) III

PROBLEMA Nº 122 **(Seminario)**

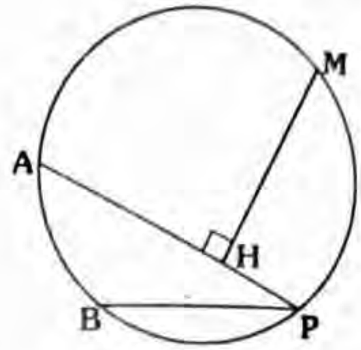
En la figura, hallar "x".



A) 20° B) 40° C) 50°
D) 70° E) 25°

PROBLEMA Nº 123 **(Seminario)**

En la figura: $m\widehat{AM}=m\widehat{MB}$ y $AH=5$. Halle el valor de $HP+PB$.



A) 3 B) 3,5 C) 4
D) 4,5 E) 5

PROBLEMA Nº 124 **(Seminario)**

En un triángulo ABC $m\measuredangle A=30°$ y $m\measuredangle C=20°$. Se ubica F en $\overline{AC}$ talque AF=BC. Halle $m\measuredangle FBC$.

A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

PROBLEMA Nº 125 **(Seminario)**

En un cuadrilátero inscrito ABCD se ubica M en el arco BC, tal que las prolongaciones de $\overline{BM}$ y $\overline{DC}$ se interceptan en N. Si $\overline{AB}//\overline{DN}$ y $m\measuredangle ADM=50$, halle $m\measuredangle DNB$.

A) 30° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 50°

PROBLEMA Nº 126 **(Práctica)**

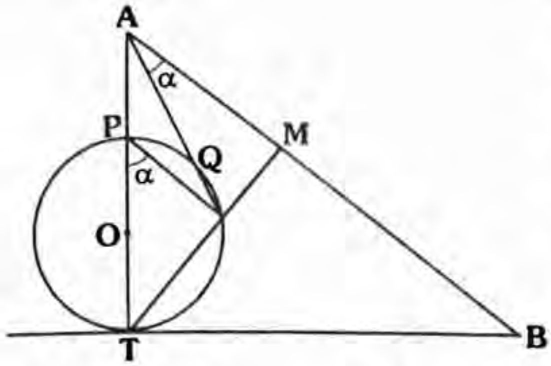
En un triángulo rectángulo ABC se trazan la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{BM}$ y se circunscribe una circunferencia al triángulo BHM. Si $m\widehat{HM}=\theta$, halle $m\measuredangle C$.

A) $30°-\frac{\theta}{2}$ B) $75°-\frac{\theta}{4}$ C) $60°-\frac{\theta}{4}$

D) $30°-\frac{\theta}{4}$ E) $45°-\frac{\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 127 (Seminario)

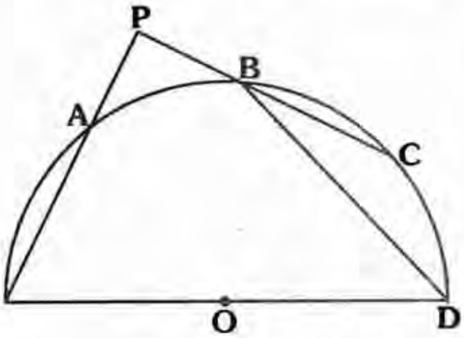
En la figura adjunta, AM=MB y $m\widehat{PQ} = 24$. Halle el valor de "α", siendo O el centro y T el punto de tangencia.



A) 30°
B) 32°
C) 34°
D) 36°
E) 40°

PROBLEMA Nº 128 (Seminario)

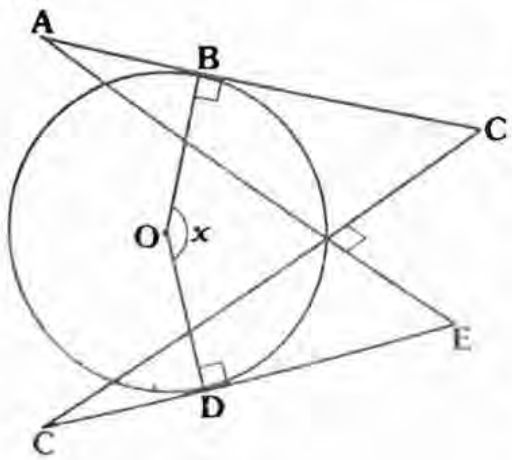
En la figura adjunta, BD=2(AP) y O es centro y $m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$. Halle $m\widehat{AB}$.



A) 40° B) 45° C) 50°
D) 55° E) 60°

PROBLEMA Nº 129 (Seminario)

En la figura, AB=BC y CD=DE. Halle "x". (O es centro).



A) 100°
B) 110°
C) 115°
D) 120°
E) 130°

PROBLEMA Nº 130 (Seminario)

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{CE}$ y $\overline{BF}$ que se interceptan en I. La circunferencia inscrita en el cuadrilátero AFIE es tangente a $\overline{FI}$ en P, a $\overline{IE}$ en Q y en M a $\overline{AE}$. Si $m\sphericalangle A = 2m\sphericalangle PMQ$, halle $m\sphericalangle BIC$.

A) 110° B) 120° C) 130°
D) 140° E) 150°

PROBLEMA Nº 131 (Seminario)

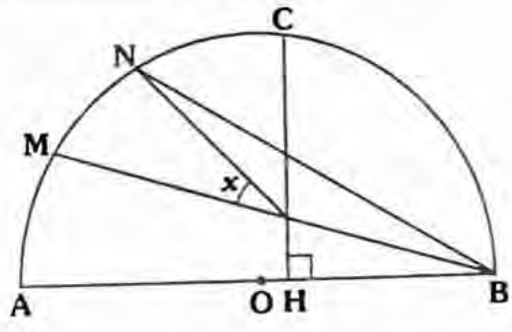
Se tienen dos circunferencias de centros O_1 y O_2 secantes en B y D en cada circunferencia se toman los puntos A y C de manera que $m\widehat{ABD} = 120°$ y $m\widehat{CBD} = 150°$. Hallar la $m\sphericalangle ABC$.

A) 30° B) 60° C) 75°
D) 135° E) 120°

PROBLEMA Nº 132 (Seminario)

En la figura, $m\widehat{AM} = 40°$, $m\widehat{MN} = 20°$, $m\widehat{BC} = 80°$ y $\overline{CH}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{AB}$ es diámetro (AO=OB).

A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 35°
E) 40°



PROBLEMA Nº 133 (Seminario)

En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tales que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sean diámetros de dos semicircunferencias que se interceptan en M. Por M se traza una secante que determinan los puntos E y F en las semicircunferencias.

Si $m\widehat{EM} + m\widehat{MF} = \theta$, halle $m\measuredangle BMC$.

A) $90° - \frac{\theta}{3}$ B) $90° - \frac{\theta}{4}$ C) $90° + \frac{\theta}{2}$

D) $90° - \frac{\theta}{2}$ E) $90° - \frac{\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 134 **(Seminario)**

Se tienen tres circunferencias $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ secantes dos a dos que se interceptan $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ se cortan en A y B; $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_3$ en A y C; $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ en A y D. La prolongación de $\overline{BC}$ intercepta a $\mathscr{C}_3$ en F y a $\mathscr{C}_2$ en E, la prolongación de $\overline{DE}$ corta a $\mathscr{C}_3$ en Q. Si $m\widehat{BC} = 2\alpha$, halle $m\widehat{QF}$.

A) α B) 3α C) $90-2\alpha$

D) 2α E) $90°-\alpha$

PROBLEMA Nº 135 **(Seminario)**

En un triángulo ABC, $m\measuredangle A = 96°$ y $m\measuredangle C = 30°$. Si se traza la ceviana $\overline{BQ} / \overline{AB} \cong \overline{QC}$, halle $m\measuredangle QBC$.

A) 18° B) 20° C) 22° D) 24° E) 28°

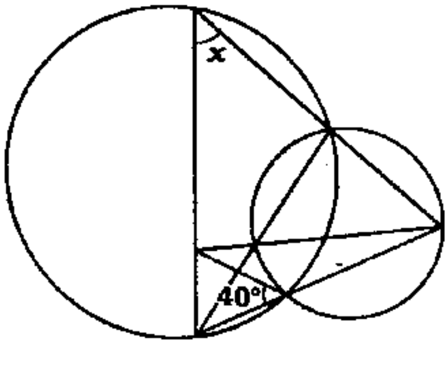
PROBLEMA Nº 136 **(Seminario)**

Desde un punto A exterior a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y la secante $\overline{APQ}$; tal que $m\widehat{CQ} = 2(m\widehat{CP})$ y $m\measuredangle BAC = 90°$. Calcular $m\measuredangle PAC$

A) 15° B) 30° C) 45° D) 18° E) 22°30'

PROBLEMA Nº 137 **(Seminario)**

En la figura adjunta, halle "x".



A) 40°

B) 30°

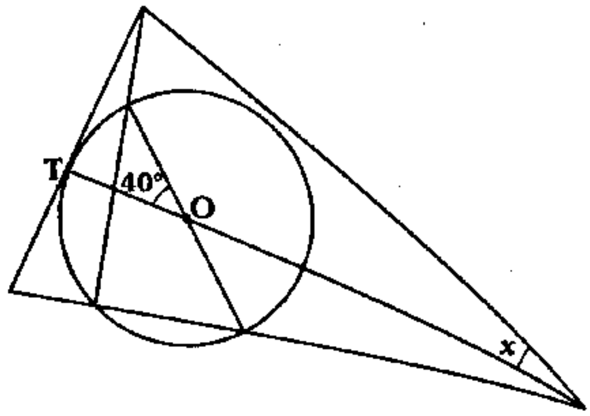
C) 20°

D) 50°

E) 80°

PROBLEMA Nº 138 **(Seminario)**

En la figura adjunta, O es el centro de la circunferencia, T es el punto de tangencia, halle el valor de "x".

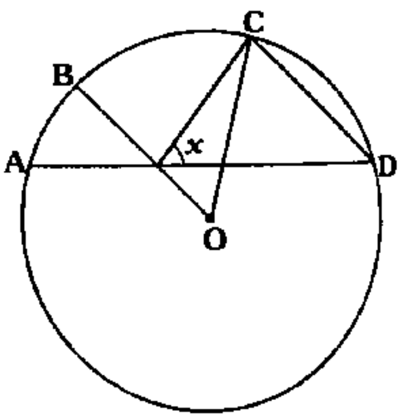


A) 10° B) 15° C) 20°

D) 25° E) 30°

PROBLEMA Nº 139 **(Seminario)**

En la figura adjunta: $\widehat{AB} \cong \widehat{BC}$, O es el centro y $m\measuredangle OCD = 70°$. Halle el valor de "x".



A) 30°

B) 25°

C) 40°

D) 45°

E) 60°

PROBLEMA Nº 140 **(Seminario)**

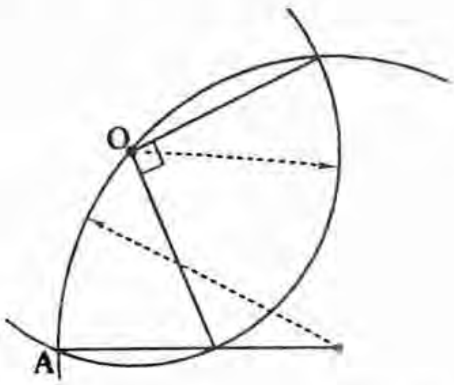
Se tienen dos circunferencias ortogonales $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ que se interceptan en M y N. En $\mathscr{C}_1$ se ubica un punto A y en $\mathscr{C}_2$ un punto B. Por A y B se trazan tangentes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ que se interceptan en C. Si MBA es una cuerda de $\mathscr{C}_1$, halle $m\measuredangle ACB$.

A) 45° B) 55° C) 75°

D) 80° E) 90°

PROBLEMA Nº 141

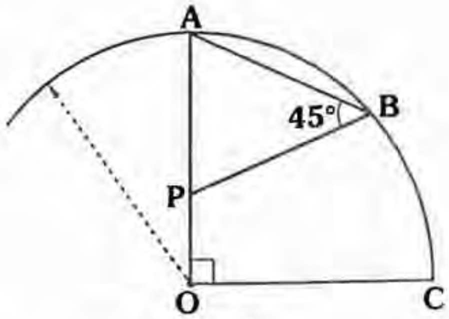
En el gráfico, calcule $m\widehat{AO}$.



A) 30° B) 36° C) 45°
D) 60° E) 54°

PROBLEMA Nº 142

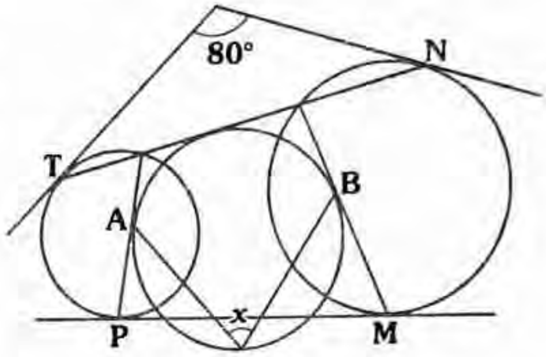
Si BC=4 y PC toma su menor valor entero. Calcule $m\widehat{BC}$.



A) 30° B) 53° C) 45°
D) 36° E) 37°

PROBLEMA Nº 143

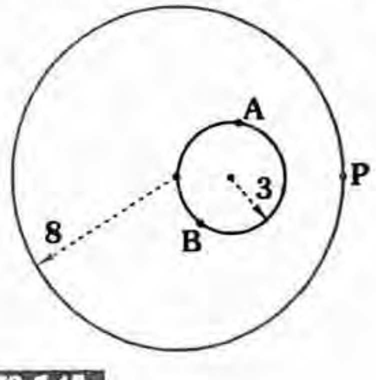
Si T, P, M, N, A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".



A) 40° B) 50° C) 65°
D) 80° E) 100°

PROBLEMA Nº 144

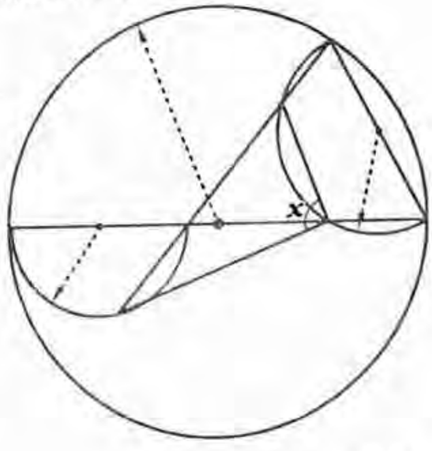
En el gráfico, A, B y P son puntos de tangencia. Calcule el mayor valor de $m\measuredangle APB$.



A) 45°
B) 60°
C) 74°
D) 53°
E) 106°

PROBLEMA Nº 145

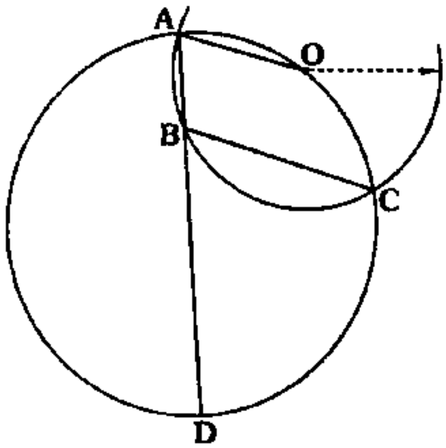
En el gráfico, calcule "x".



A) 60°
B) 75°
C) 106°
D) 90°
E) 180°

PROBLEMA Nº 146

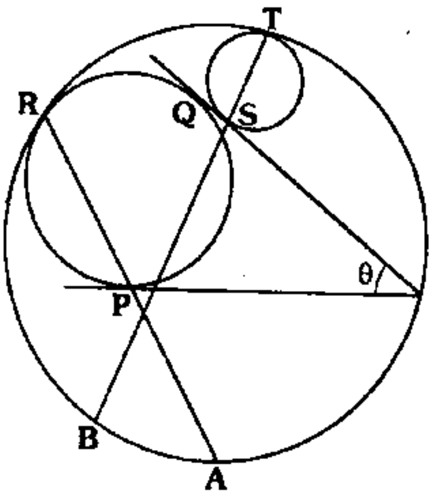
En el gráfico, $\overline{AO}//\overline{BC}$. Calcule $m\widehat{AD}$



A) 150° B) 120° C) 106°
D) 180° E) 205°

PROBLEMA Nº 147

En el gráfico, P, Q, R, S y T son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{AB}$.



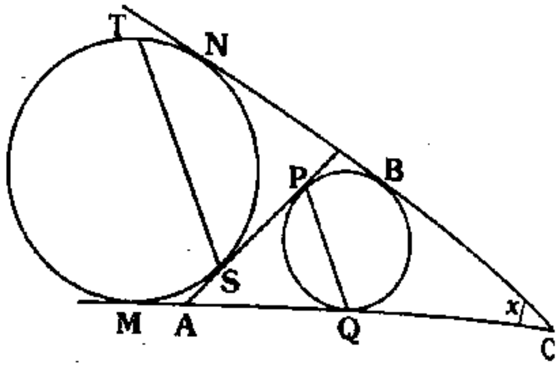
A) θ B) 2θ C) $\frac{3\theta}{2}$
D) 90°−θ E) 90°−2θ

PROBLEMA Nº 148

En una circunferencia de centro O, se ubican los puntos A, B y C. En $\overline{OB}$ se ubica P y D en $\overline{AC}$ tal que el cuadrilátero BPDC es inscriptible. Demuestre que $\overline{OB} \perp \overline{PD}$.

PROBLEMA Nº 149

En el gráfico, P, Q, R, M, L y N son puntos de tangencia, si $\overline{LS}//\overline{QP}$, calcule x en función de α.



A) α B) 2α C) 90°−α
D) 45°−α E) 60°−α

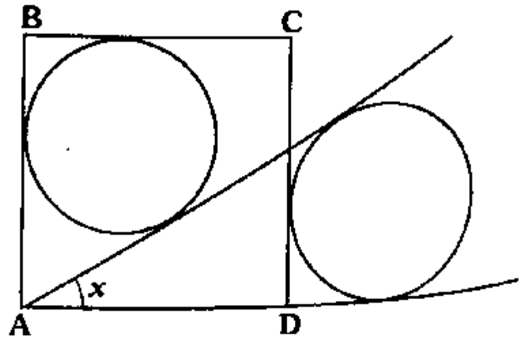
PROBLEMA Nº 150

Se tiene el cuadrado ABCD, se ubican M en $\overline{BC}$ y N en $\overline{AD}$, tal que BM=MC y DN=3(AN). Si $\overline{CN}$ y $\overline{DM}$ se cortan en P. Calcule m∢APN.

A) 10° B) 12°30' C) 11°30'
D) 13°30' E) 39°

PROBLEMA Nº 151

En el gráfico, las circunferencias son congruentes. Calcule "x".

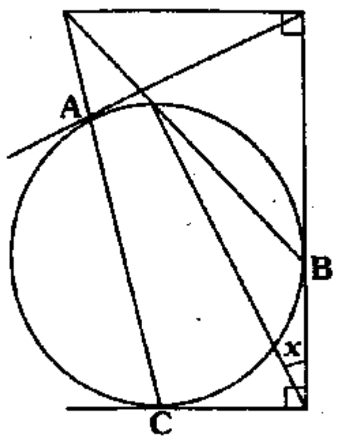


A) $\frac{53°}{2}$ B) $\frac{45°}{2}$ C) 30°

D) 23° E) 37°

PROBLEMA Nº 152

Si A, B y C son puntos de tangencia. Calcule "x".

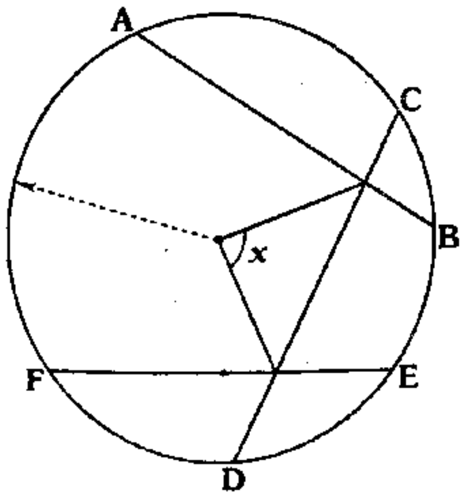


A) 37°/2 B) 15° C) 45°/2

D) 53°/2 E) 30°

PROBLEMA Nº 153

Si AB = CD = EF; $m\widehat{EB} = 40°$ y $m\widehat{CD} = 110°$. Calcule "x".

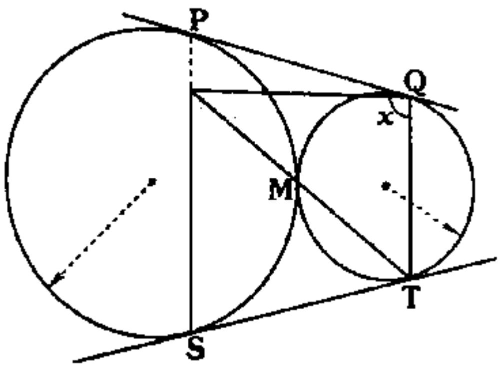


A) 15° B) 45° C) 67°

D) 70° E) 75°

PROBLEMA Nº 154

En el gráfico, P, Q, T, S y M son puntos de tangencia. Calcule *x*.

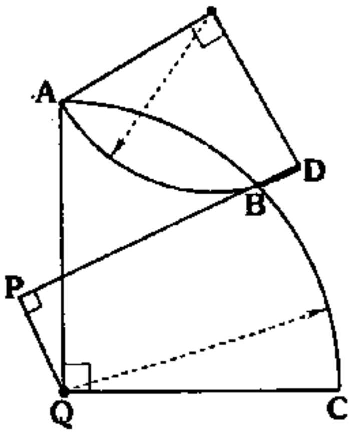


A) 90° B) 120° C) 60°

D) 135° E) 106°

PROBLEMA Nº 155

Si AB=2(PQ). Calcule $m\widehat{BC}$.



A) 30°

B) 60°

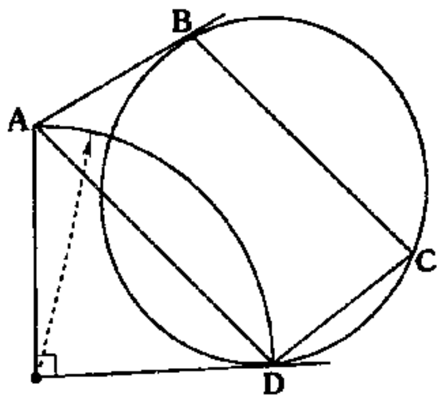
C) 45°

D) 53°

E) 37°

PROBLEMA Nº 156

Si ABCD es un romboide; B y D son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{CD}$.



A) 120°

B) 60°

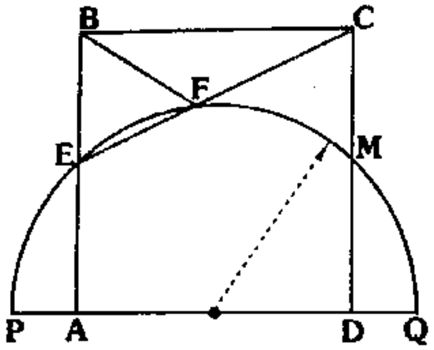
C) 150°

D) 90°

E) 175°

PROBLEMA Nº 157

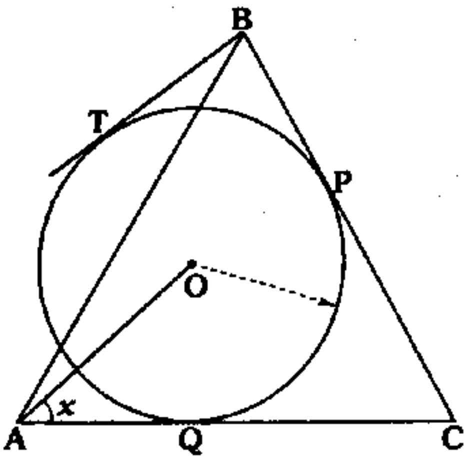
Si ABCD es un cuadrado, si AP=DQ; EB=BF. Calcule $m\widehat{FM}$.



A) 60° B) 75° C) 53°
D) 37° E) 45°

PROBLEMA Nº 158

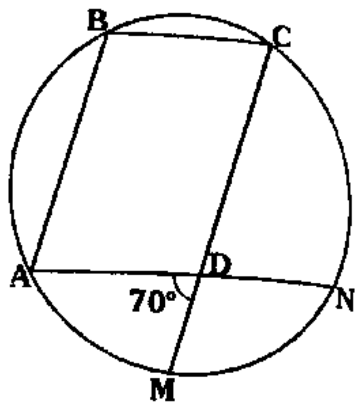
Si ABC es equilátero y $\overline{TB}//\overline{AO}$; T, P y Q son puntos de tangencia.
Calcule "x".



A) 40° B) 30° C) 20°
D) 50° E) 45°

PROBLEMA Nº 159

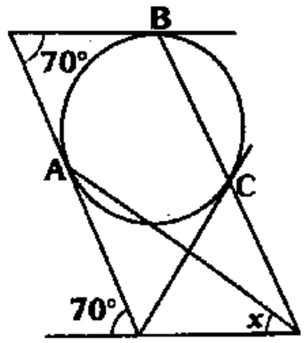
Si ABCD es un paralelogramo.
Calcule $m\widehat{MN}$.



A) 80° B) 60° C) 70°
D) 50° E) 40°

PROBLEMA Nº 160

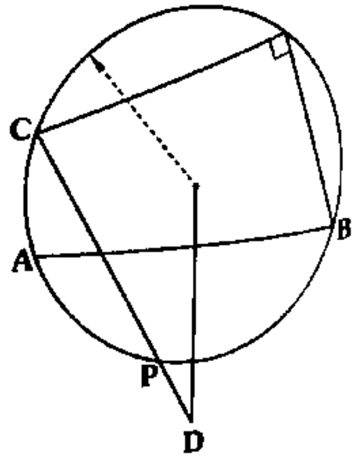
Si A, B y C son puntos de tangencia.
Calcule "x".



A) 45° B) 55° C) 35°
D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº 161

Si AB=CD. Calcule $m\widehat{AP}$.



A) 45°
B) 30°
C) 90°
D) 60°
E) 53°

PROBLEMA Nº 162

Si $\overline{PQ}//\overline{RS}$ y $\overline{AR}//\overline{QB}$. Calcule $m\widehat{RBS}$

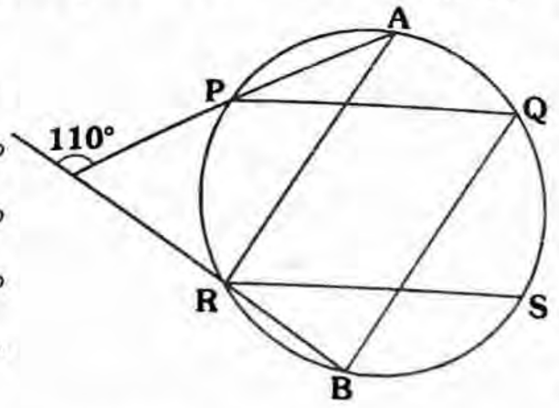
A) 70°

B) 140°

C) 110°

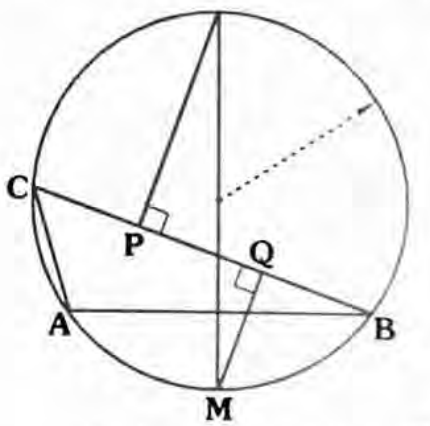
D) 120°

E) 130°



PROBLEMA Nº 163

Si $m\widehat{AM}=m\widehat{MB}$; AC=6. Calcule PQ.



A) 6 B) 4,5 C) $6\sqrt{2}$

D) 3 E) $6\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 164

Si T, P, Q y L son puntos de tangencia y MLPQ es un paralelogramo. Calcule α.

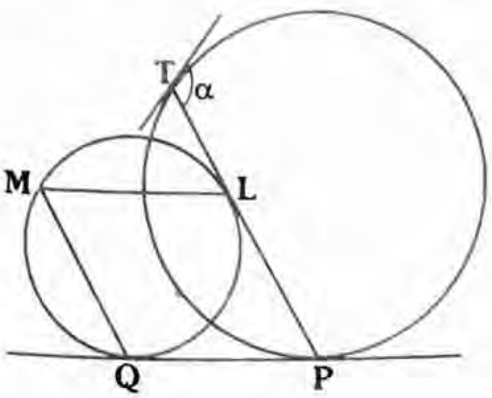
A) 150°

B) 135°

C) 143°

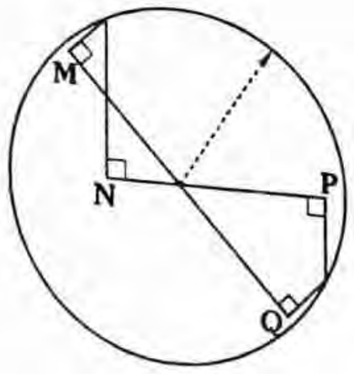
D) 120°

E) 127°



PROBLEMA Nº 165

Si PQ=1. Calcule MN.



A) 0,5 B) 1 C) 0,8

D) 1,2 E) 1,5

PROBLEMA Nº 166

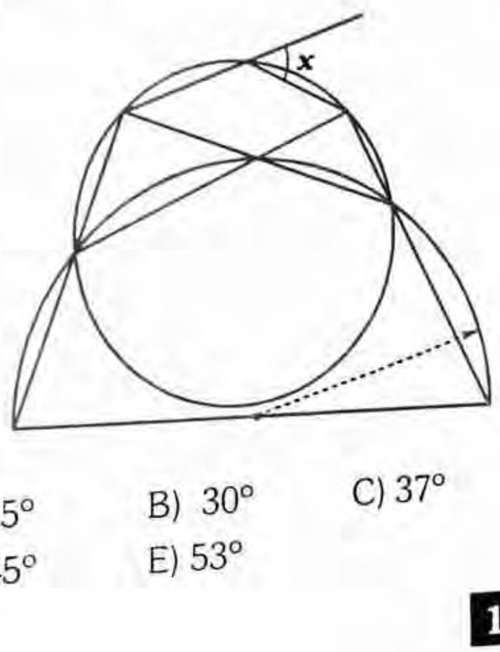
En una semicircunferencia de diametro $\overline{AB}$ se ubica el punto P y se traza $\overline{PH}\perp\overline{AB}$ (H en $\overline{AB}$). En $\widehat{PB}$ se ubica el punto Q tal que $m\measuredangle APH=m\measuredangle HPQ$; AQ=8. Calcule PH.

A) 2 B) 4 C) 6

D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 167

Calcule "x".

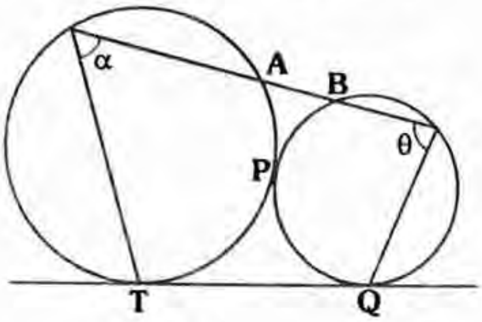


A) 15° B) 30° C) 37°

D) 45° E) 53°

PROBLEMA Nº 168

Si T, P y Q son puntos de tangencia; $\alpha+\theta=140^\circ$. Calcule m∢APB.

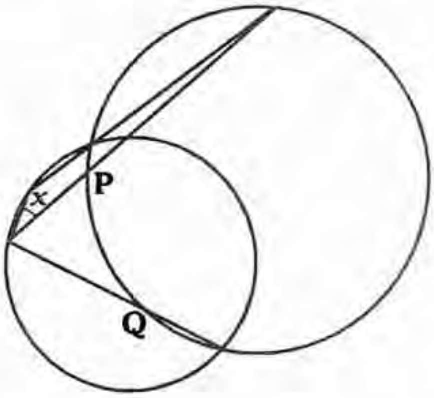


A) 40° B) 55° C) 50°
D) 35° E) 70°

PROBLEMA Nº 169

Si $m\widehat{PQ}=50^\circ$. Calcule "x".

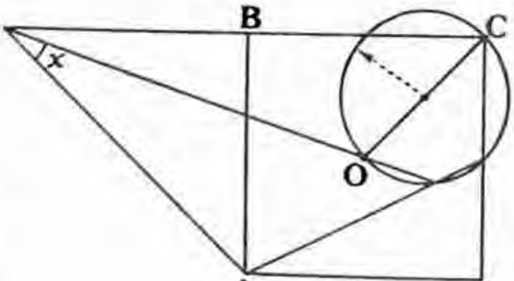
A) 50°
B) 25°
C) 40°
D) 20°
E) 75°



PROBLEMA Nº 170

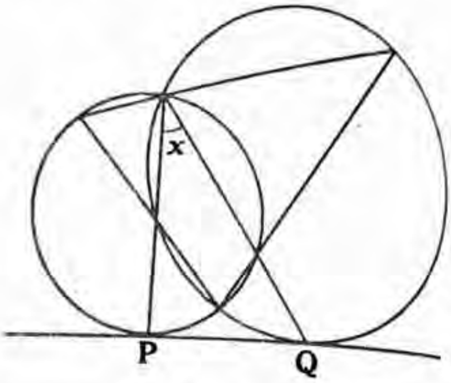
Si O es centro del cuadrado ABCD.
Calcule "x".

A) $\frac{53^\circ}{2}$
B) $\frac{37^\circ}{2}$
C) 45°
D) 30°
E) 15°



PROBLEMA Nº 171

Si P y Q son puntos de tangencia.
Calcule "x".

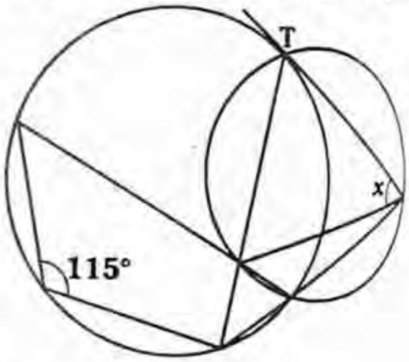


A) 45° B) 30° C) 60°
D) 36° E) 54°

PROBLEMA Nº 172

Si T es punto de tangencia. Calcule "x".

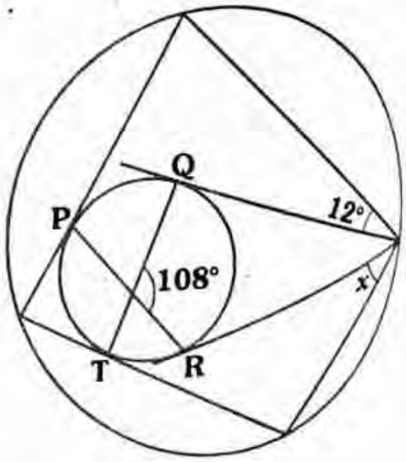
A) 65°
B) 50°
C) 25°
D) 70°
E) 35°



PROBLEMA Nº 173

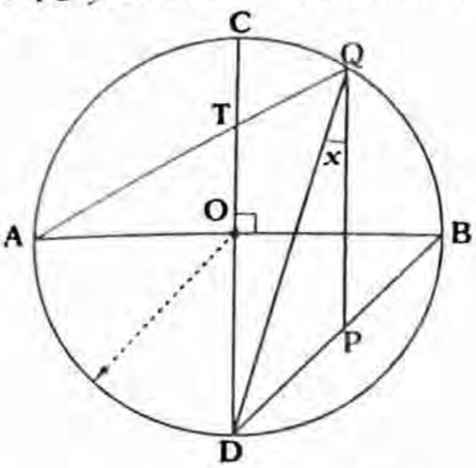
Si P, Q, T y R son puntos de tangencia.
Calcule "x".

A) 48°
B) 36°
C) 24°
D) 12°
E) 60°



PROBLEMA Nº 174

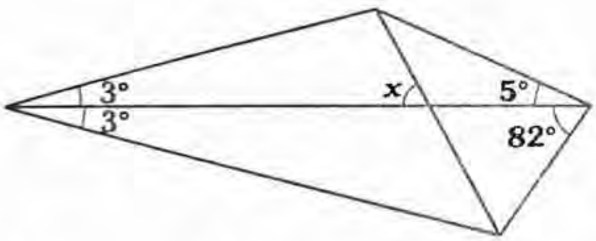
Si CT=TO y BP=PD. Calcule "x".



A) 4° B) 14° C) 8°
D) 16° E) 15°

PROBLEMA Nº 175

Calcule "x".

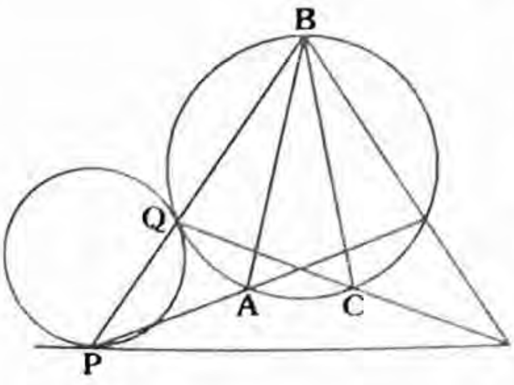


A) 13° B) 15° C) 18°
D) 22.5° E) 10°

PROBLEMA Nº 176

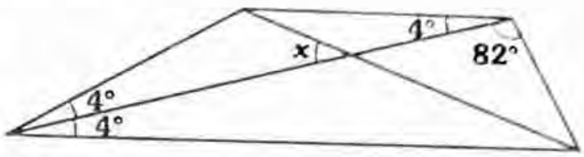
P y Q son puntos de tangencia. Calcule $\frac{AB}{BC}$

A) 1
B) 2
C) 3/2
D) $\sqrt{2}$
E) F.D.



PROBLEMA Nº 177

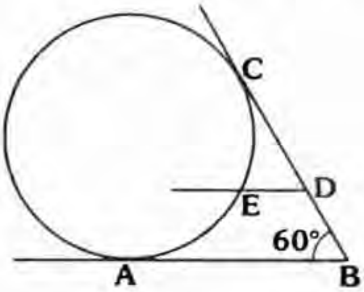
Calcule "x".



A) 8° B) 12° C) 15°
D) 16° E) 24°

PROBLEMA Nº 178

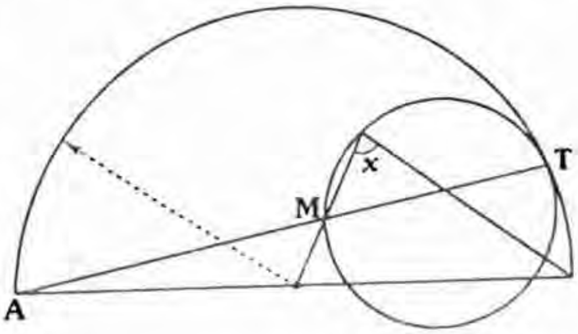
Si A y C son puntos de tangencia, $\overline{ED} // \overline{AB}$ y 11(BD)=4(CD). Calcule m$\widehat{EC}$.



A) 30° B) 60° C) 67°
D) 45° E) 70°

PROBLEMA Nº 179

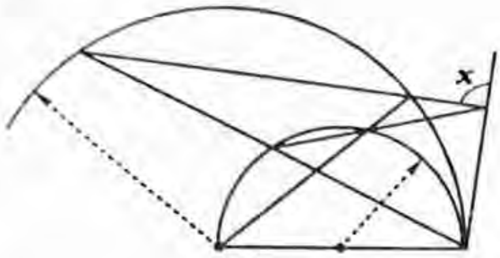
En el gráfico, T es punto de tangencia. Calcule "x" en función de α $\left(m\widehat{AT} = \alpha\right)$.



A) $90°-\alpha$ B) $45°+\alpha$ C) α
D) $90°-2\alpha$ E) 2α

PROBLEMA Nº 180

En el gráfico, calcule "x".



A) 60°
B) 75°
C) 90°
D) 105°
E) 120°

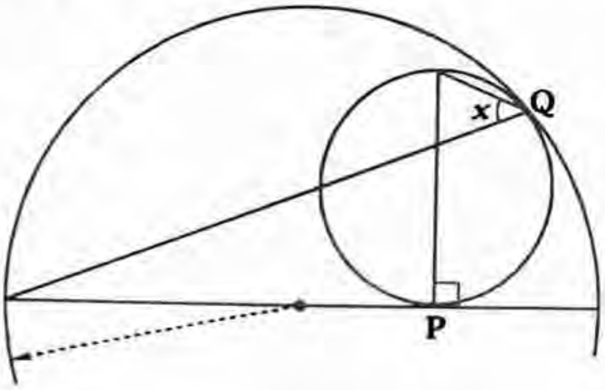
PROBLEMA Nº 181

Se tiene el triángulo ABC, se trazan exteriormente los cuadrados ABPQ y BCMN, sea $\overline{MA} \cap \overline{QC} = \{S\}$.

Demostrar que $\overline{BS} \perp \overline{AC}$.

PROBLEMA Nº 182

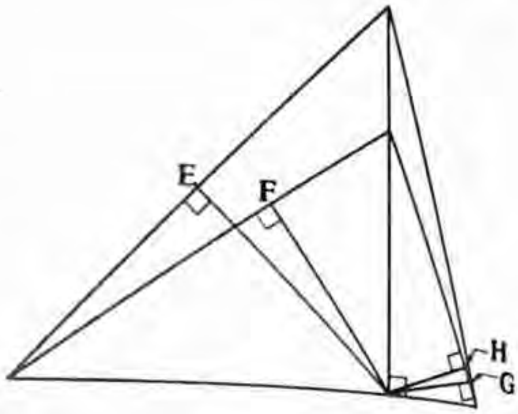
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Calcule "x".



A) 30°
B) 37°
C) 53°
D) 45°
E) 60°

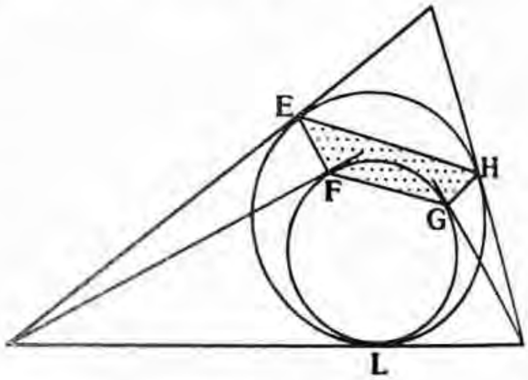
PROBLEMA Nº 183

En el gráfico, demostrar que el cuadrilátero EFHG inscriptible.



PROBLEMA Nº 184

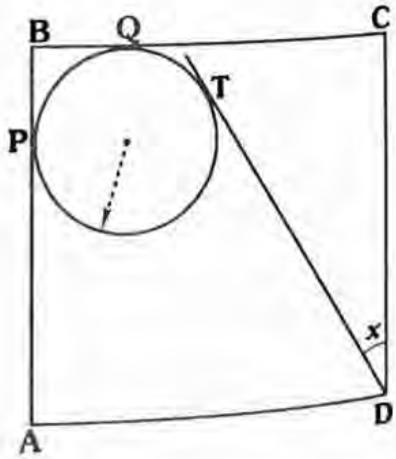
En el gráfico, L, E, F, G y H son puntos de tangencia, demostrar que el cuadrilátero EFGH es inscriptible.



PROBLEMA Nº 185

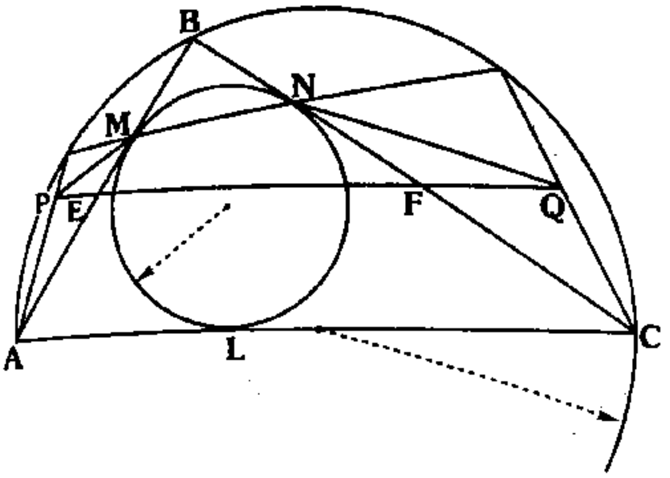
Si ABCD es un cuadrado; P, Q y T son puntos de tangencia y TD=AB.

Calcule "x".



PROBLEMA Nº 186

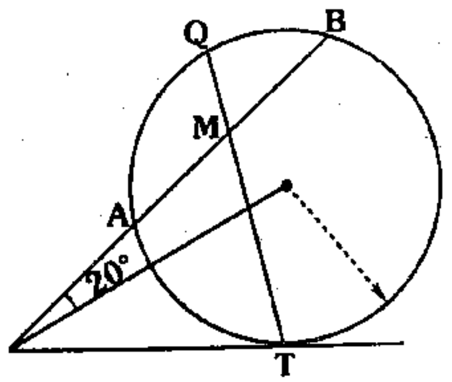
En el gráfico, BE=EA y BF=FC, tangencia, demostrar que el cuadrilátero es inscriptible.



PROBLEMA Nº 187

Si T es punto de tangencia y AM=MB.

Calcule $m\widehat{TAQ}$.



A) 140° B) 120° C) 100°
D) 90° E) 70°

PROBLEMA Nº 188

En un triángulo ABC ($m\measuredangle ABC > 90°$) se traza la ceviana interior $\overline{BN}$, tal que AN=3(NC) además $m\measuredangle BAC = 37°$ y $m\measuredangle NBC = 37°/2$.

Calcule $m\measuredangle ANB$.

A) 37° B) 60° C) 143°
D) 53° E) 127°

PROBLEMA Nº 189

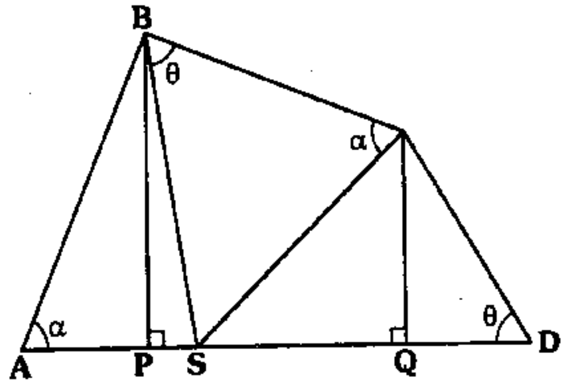
En un rectángulo ABCD se traza $\overline{BH}$ perpendicular a $\overline{AC}$ (H en $\overline{AC}$); además P y Q son puntos medios de $\overline{HC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Calcule $m\measuredangle BPQ$.

A) 60° B) 120°
C) 135° D) 90°
E) 150°

PROBLEMA Nº 190

En el gráfico, demostrar que:

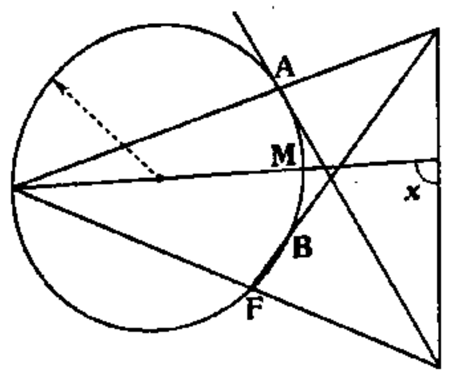
$$AD = 2(PQ)$$



PROBLEMA Nº 191

Si A es punto de tangencia y $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$.

Calcule α.



A) 60°
B) 90°
C) 120°
D) 75°
E) 135°

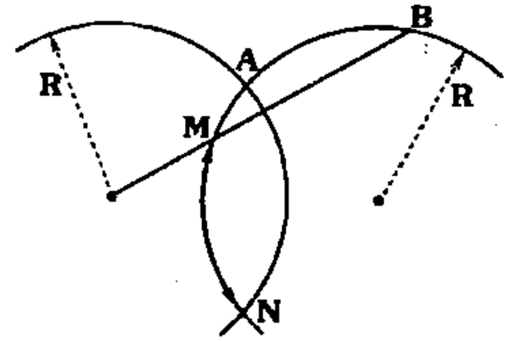
PROBLEMA Nº 192

Se tiene un triángulo ABC inscrito en una circunferencia en el arco BC se ubica el punto P y se trazan las perpendiculares $\overline{PQ}$ y $\overline{PL}$ a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente (Q en $\overline{BC}$ y L en $\overline{AC}$); además A, Q y P son colineales, $\overleftrightarrow{LQ}$ interseca a $\overline{AB}$ en S, si la $m\measuredangle BSL=\theta$. Calcule $m\widehat{AB}$.

A) θ B) 2θ C) $90-\theta°$
D) $\frac{\theta}{2}$ E) $180°-\frac{\theta}{2}$

PROBLEMA Nº 193

En el gráfico, $m\widehat{AB}=60°$. Calcule $m\widehat{MN}$



A) 45° B) 53° C) 60°
D) 30° E) 90°

PROBLEMA Nº 194

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, talque: $m\measuredangle ACD=x$; $m\measuredangle DAC=4x$; $m\measuredangle ABD=2x$, $m\measuredangle DBC=9x$ y $m\measuredangle ACB=5x$. Calcule "x".

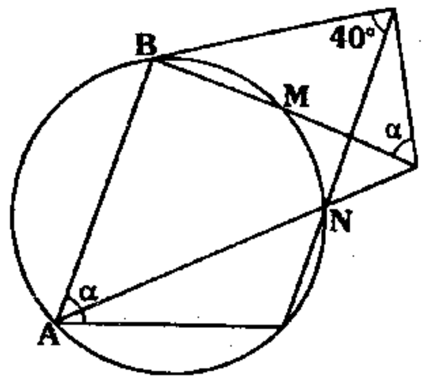
A) 12° B) 9° C) 10°
D) 15° E) 18°

PROBLEMA Nº 195

Se tiene el triángulo isósceles ABC(AB=BC), una circunferencia es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente. Desde A se traza $\overline{AL}$ tangente a la circunferencia en L. La prolongación de $\overline{QL}$ corta a $\overline{AC}$ en S. Demostrar que AS=SC.

PROBLEMA Nº 196

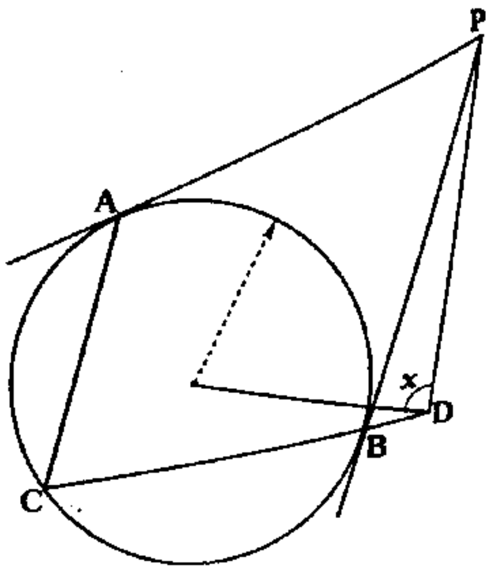
Si $m\widehat{AB}=100°$. Calcule $m\widehat{MN}$.



A) 25° B) 10° C) 20°
D) 35° E) 15°

PROBLEMA Nº 197

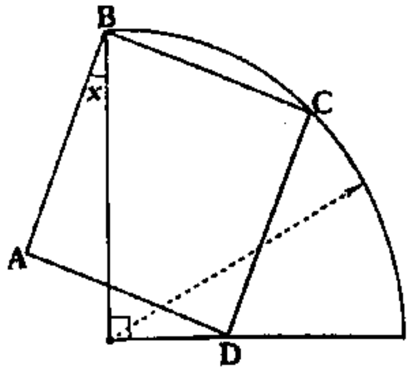
Si A y B son puntos de tangencia y $\overline{AC}//\overline{PD}$. Calcule "$x$".



A) 60° B) 45° C) 90°
D) 75° E) 36°

PROBLEMA Nº 198

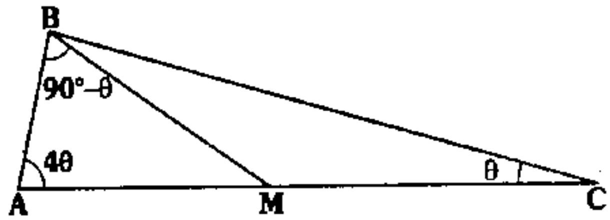
Si ABCD es un cuadrado. Calcule "x".



A) 15° B) 37°/2 C) 53°/2
D) 45°/2 E) 14°

PROBLEMA Nº 199

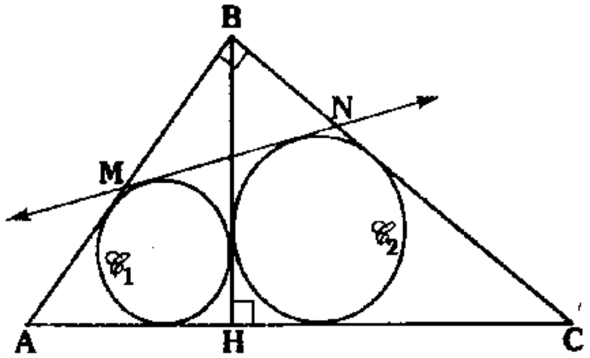
Si AB=MC. Calcule θ



A) 12° B) 10° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 200

En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son las circunferencias inscritas en los triángulos AHB y BHC. Si $\overleftrightarrow{MN}$ es tangente a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. Demuestre que el cuadrilátero AMNC es inscriptible.



PROBLEMA Nº 201

En el gráfico, EF=5 y EG=12. Calcule AB.

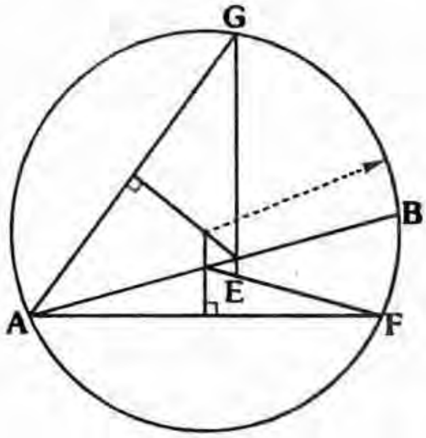
A) 13

B) 17

C) $2\sqrt{15}$

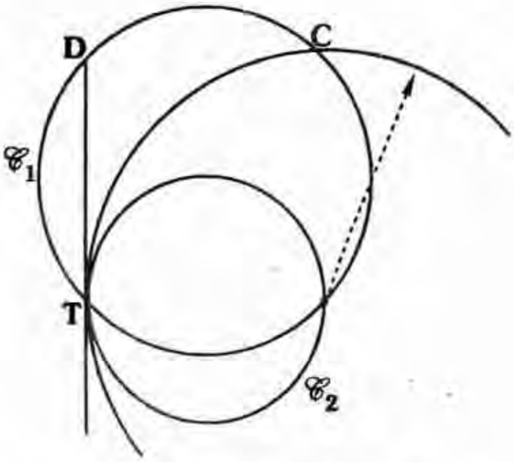
D) 18

E) 8,5



PROBLEMA Nº 202

En el gráfico, T es punto de tangencia y $m\widehat{CD}=\theta$. Calcule la medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

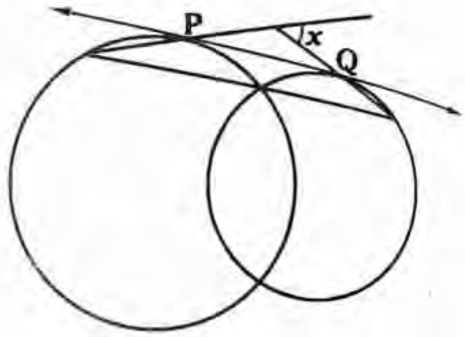


A) θ B) $90°-\theta$ C) 2θ

D) $\frac{\theta}{2}$ E) $90°-\frac{\theta}{2}$

PROBLEMA Nº 203

En el gráfico, las circunferencias son ortogonales. P y Q son puntos de tangencia, calcule "x".

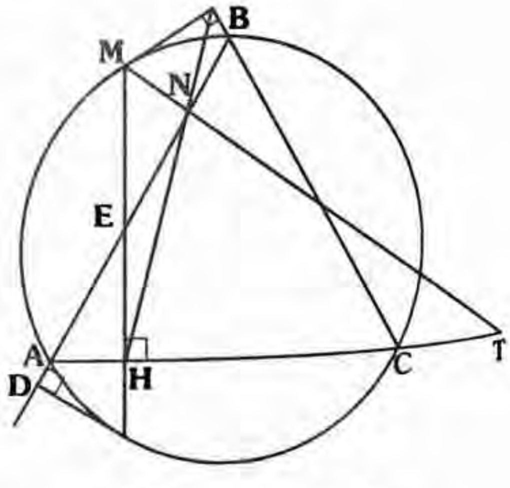


A) 30° B) 60° C) 15°

D) 45° E) $\frac{45°}{2}$

PROBLEMA Nº 204

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero. Si AE=b y AD=a. Calcule CT.



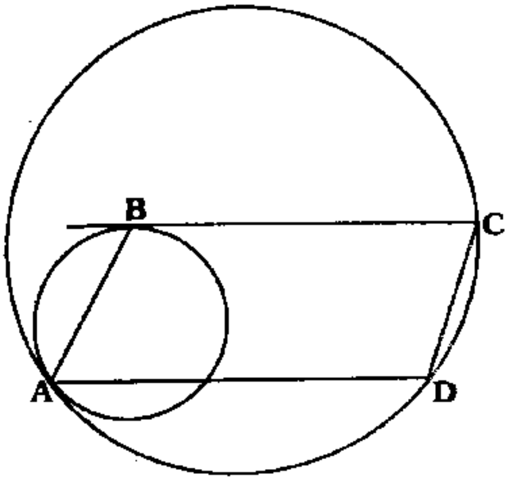
A) $(a+b)\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{a+b}{2}$

C) $2b+a$ D) $2a+b$

E) $(a+2b)\frac{\sqrt{3}}{2}$

PROBLEMA Nº 205

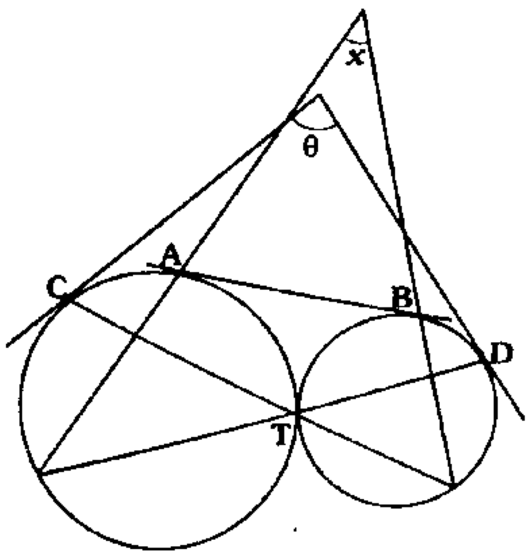
Si A y B son puntos de tangencia ABCD es un paralelogramo y $m\widehat{AD}=100°$. Calcule $m\widehat{CD}$.



A) 50° B) 40° C) 30°
D) 75° E) 80°

PROBLEMA Nº 206

Si A, B, C, D y T son puntos de tangencia. Calcule "x".

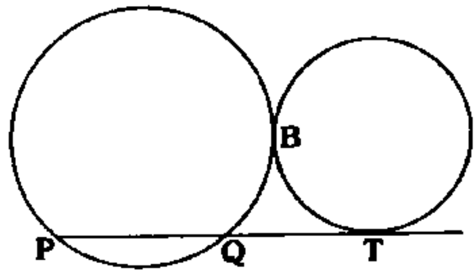


A) $\frac{\theta}{2}$ B) $180°-\theta$ C) $90°-\frac{\theta}{2}$

D) $\frac{3\theta}{2}$ E) $49°+\frac{\theta}{2}$

PROBLEMA Nº 207

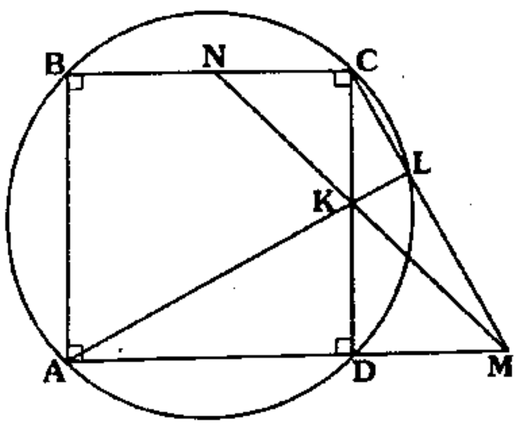
Si B y T son puntos de tangencia y $QT=3(PQ)$; $m\widehat{BT}=90°$. Calcule $m\widehat{PQ}$.



A) 16° B) 37° C) 53°
D) 32° E) 45°

PROBLEMA Nº 208

Si ABCD es un cuadrado probar que B, N, L y M están en una misma circunferencia.



PROBLEMA Nº 209

Si P, T, Q y R son puntos de tangencia; $m\widehat{TS}=150°$. Calcule "x".

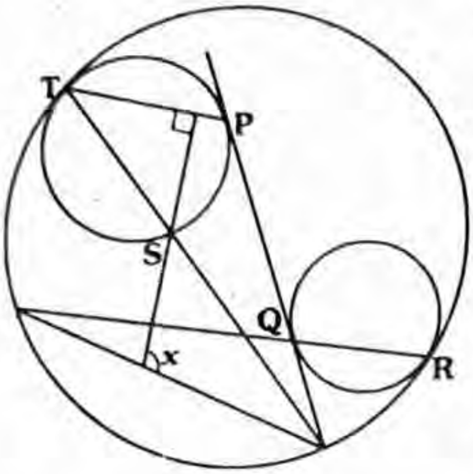
A) 105°

B) 115°

C) 120°

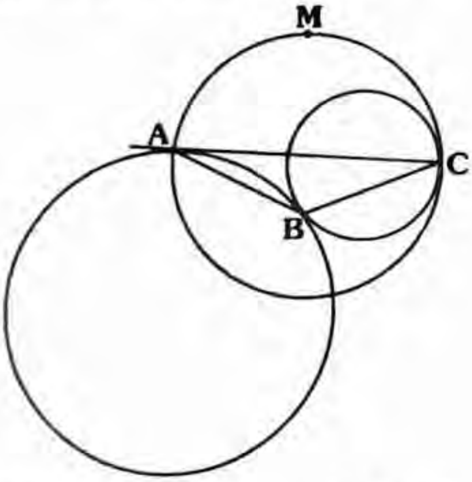
D) 95°

E) 110°



PROBLEMA Nº 210

Si A, B y C son puntos de tangencia; $m\widehat{AMC}=100°$. Calcule $m\sphericalangle ABC$.

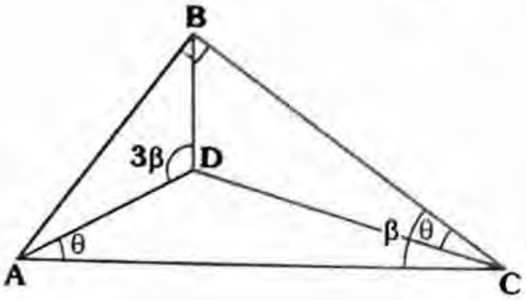


A) 115° B) 105° C) 125°

D) 130° E) 140°

PROBLEMA Nº 211

De acuerdo al gráfico, calcule $\frac{CD}{BD}$

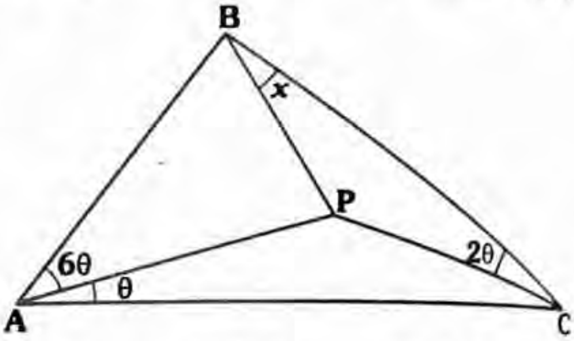


A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2

D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 212

En el gráfico, AB=AP=PC. Calcule "x".

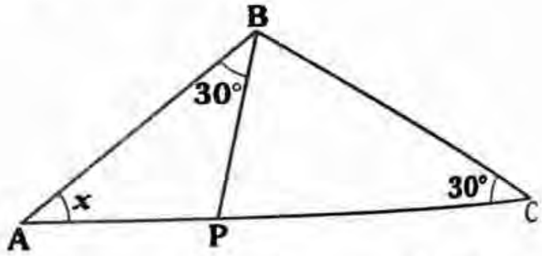


A) 30° B) 36° C) 20°

D) 18° E) 30°

PROBLEMA Nº 213

Si AB=PC, calcule "x".



A) 12° B) 24° C) 30°

D) 18° E) 36°

PROBLEMA Nº 214

Calcule "x".

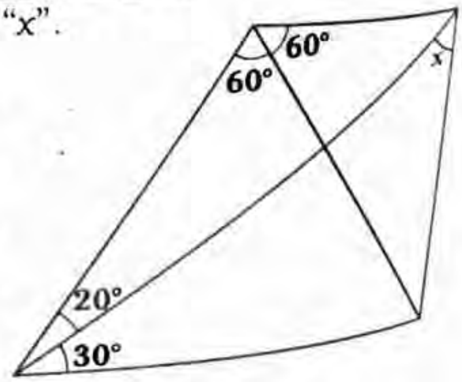
A) 20°

B) 40°

C) 50°

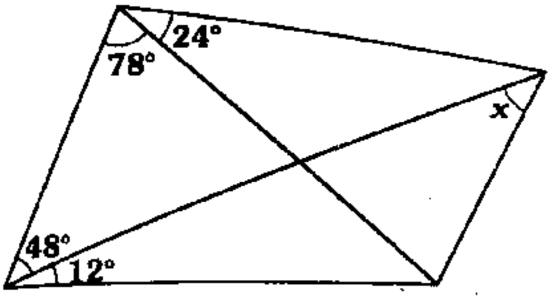
D) 30°

E) 25°



PROBLEMA Nº 215

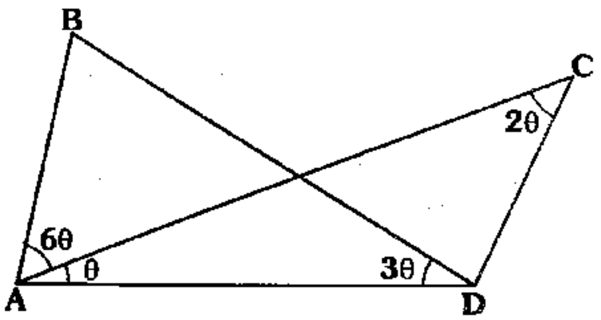
Calcule "x".



A) 30° B) 20° C) 18°
D) 36° E) 24°

PROBLEMA Nº 216

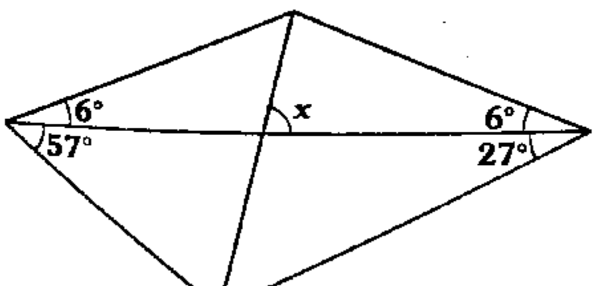
Si AB=CD, calcule " θ ".



A) 12° B) 15° C) 10°
D) 9° E) 14°

PROBLEMA Nº 217

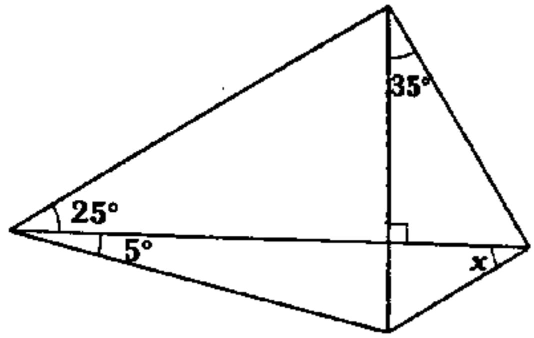
Calcule "x".



A) 90° B) 80° C) 60°
D) 57° E) 63°

PROBLEMA Nº 218

Calcule "x".



A) 12° B) 15° C) 18°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA Nº 219

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en A), P está en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$ tal que $\overline{PQ}//\overline{AC}$, si $AC = 2(PQ) = 6$ y el cuadrilátero APQC es circunscriptible. Calcule el inradio del triángulo BPQ.

A) 3 B) $\frac{1}{3}$ C) 1

D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

PROBLEMA Nº 220

En la región interior a un triángulo equilátero ABC, se ubica el punto P y en $\overline{AP}$, su punto medio Q; si $m\sphericalangle PAC = 30°$ y $m\sphericalangle PCB = m\sphericalangle QBA$.

Calcule $m\sphericalangle QBA$.

A) 10° B) 12°
C) 15° D) 16°
E) 20°

PROBLEMA Nº 221

Si L, M, N, P y Q son puntos de tangencia. Calcule "x".

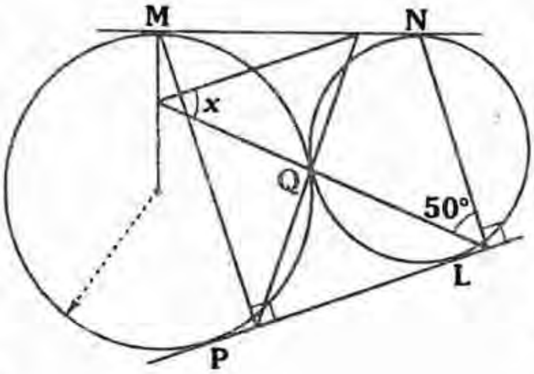
A) 50°

B) 25°

C) 40°

D) 20°

E) 30°



PROBLEMA Nº 222

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se ubica el punto P, se traza $\overline{PH} \perp \overline{AB}$, en $\overset{\frown}{PB}$ se ubican los puntos M y N $(N \in \overset{\frown}{MB})$; $\overline{AM} \cap \overline{PH} = \{Q\}$, $\overline{AN} \cap \overline{QH} = \{T\}$, la prolongación de $\overline{NQ}$ interseca a $\overset{\frown}{AP}$ en C; si $m\overset{\frown}{CPM} = 50°$. Calcule $m\measuredangle QTM$.

A) 40° B) 25° C) 20°

D) 75° E) 35°

PROBLEMA Nº 223

Si T y M son puntos de tangencia. Calcule "x".

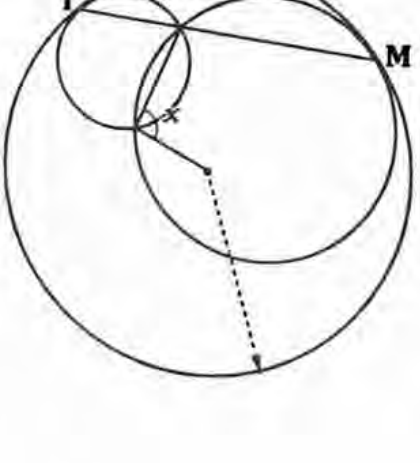
A) 60°

B) 120°

C) 90°

D) 135°

E) 106°



PROBLEMA Nº 224

Si $m\overset{\frown}{PM} = 100°$. Calcule "x".

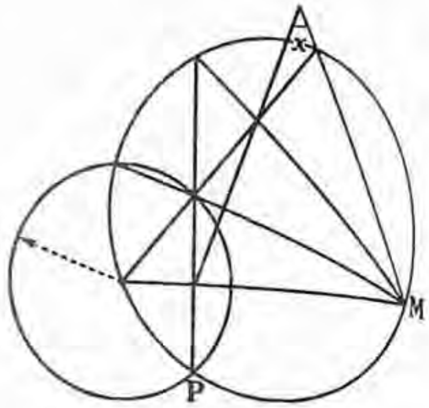
A) 50°

B) 40°

C) 20°

D) 25°

E) 45°



PROBLEMA Nº 225

Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, en cuya prolongación se ubica P, luego se traza la secante PQS. T es punto en la región interior del cuadrilátero ASQB, tal que los cuadriláteros ASTO y OTQB son inscriptibles, donde AO=OB. Demostrar que $m\measuredangle OTP = 90°$.

PROBLEMA Nº 226

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, se traza la altura BH y se traza el rombo APQH de centro O, tal que P está en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$. Calcule $m\measuredangle BOC$.

A) 60° B) 120° C) 135°

D) 90° E) 108°

PROBLEMA Nº 227

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica Q en $\overline{AB}$, R en $\overline{BC}$ y P en $\overline{AC}$ tal que PQBR es un cuadrado. H es la proyección de Q sobre $\overline{AC}$.

Sea $\overline{AR} \cap \overline{QP} = \{S\}$. Calcule $m\measuredangle SHP$.

A) 30° B) 45° C) 60°

D) 37° E) 53°

PROBLEMA Nº 228

Se tiene el triángulo ABC, D es un punto exterior relativo a $\overline{BC}$.

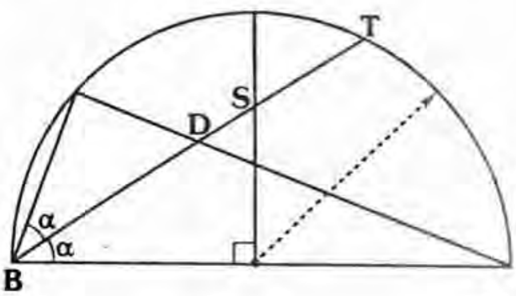
Si AB=CD, $m\measuredangle ACB = x$, $m\measuredangle BCD = 2x$, $m\measuredangle ADC = 5x$ y $m\measuredangle ABC = 4x$.

Calcule "x".

A) 5° B) 8° C) 10°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 229

En el gráfico, calcule $\dfrac{BD}{ST}$

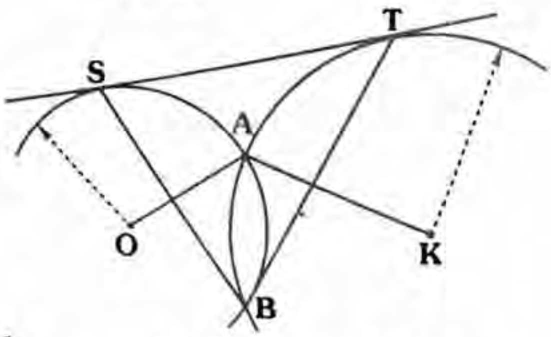


A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) 2

PROBLEMA Nº 230

S y T son puntos de tangencia.

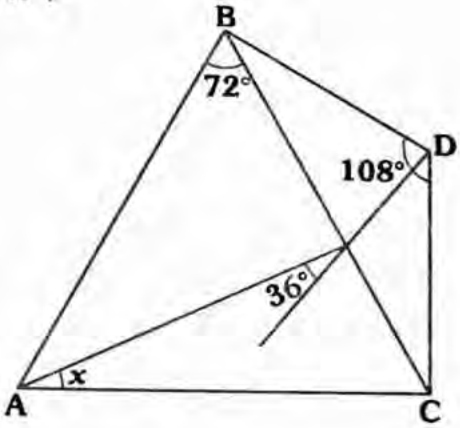
Calcule $\dfrac{m\measuredangle SBT}{m\measuredangle OAK}$



A) 1 B) 2 C) 2/3
D) 1/2 E) 3/2

PROBLEMA Nº 231

En el gráfico, AB=BC y BD=DC.
Calcule "x".



A) 12°
B) 18°
C) 24°
D) 36°
E) 27°

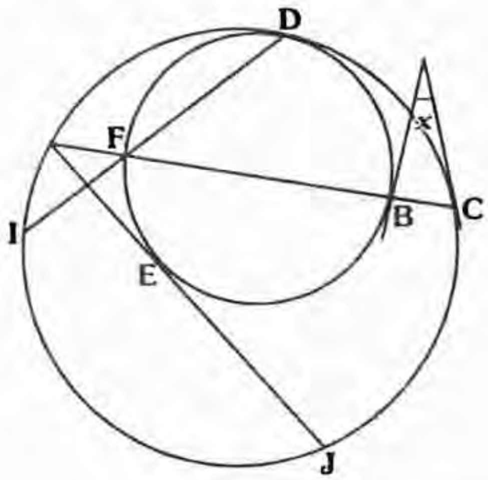
PROBLEMA Nº 232

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica R en $\overline{BC}$ y Q en en $\overline{AC}$ tal que $\overline{RQ} \perp \overline{AC}$. Si $m\measuredangle RAC = 45°$ y BR es igual al inradio del triángulo RQC. Calcule $m\measuredangle BAR$.

A) 15° B) 14° C) $\dfrac{37°}{2}$
D) $\dfrac{53°}{2}$ E) $\dfrac{45°}{2}$

PROBLEMA Nº 233

Si B, C, D y E son puntos de tangencia $m\overset{\frown}{IJ} = 80°$ y $m\overset{\frown}{EF} = 30°$. Calcule "x".



A) 25°
B) 20°
C) 15°
D) 24°
E) 30°

PROBLEMA Nº 234

Si B, D y E son puntos de tangencia. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

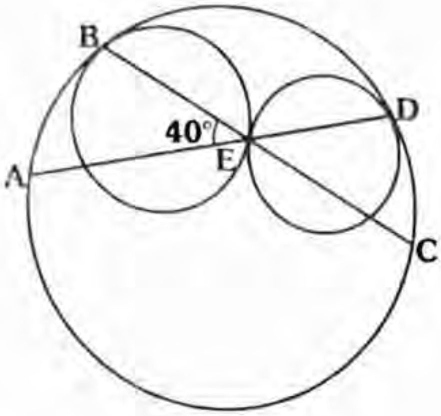
A) 50°

B) 80°

C) 20°

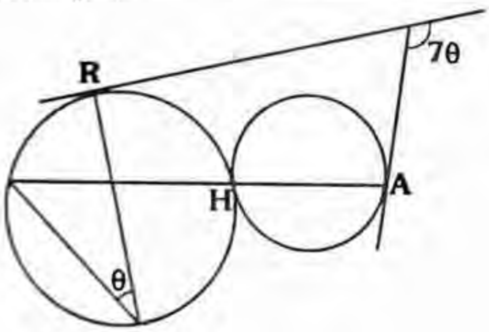
D) 40°

E) 25°



PROBLEMA Nº 235

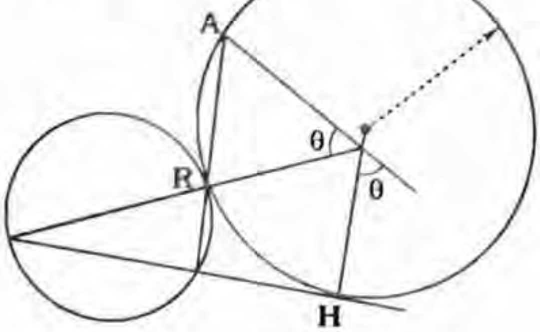
Si R, H y A son puntos de tangencia.
Calcule "θ".



A) 22° 30' B) 20° C) 15°
D) 18° E) 10°

PROBLEMA Nº 236

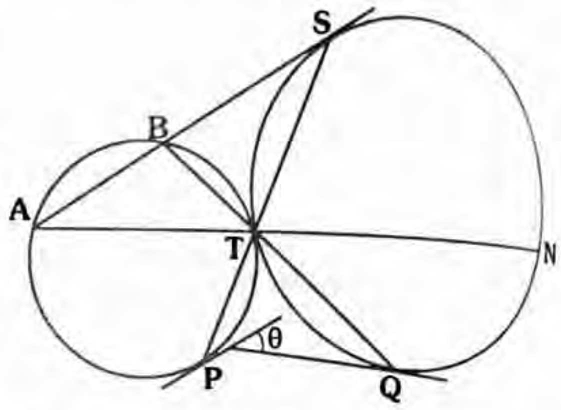
Si R y H son puntos de tangencia.
Calcule "θ".



A) 45° B) 75° C) 60°
D) 36° E) 80°

PROBLEMA Nº 237

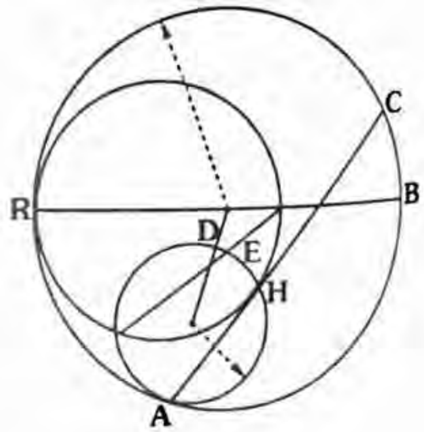
Si P, Q, T y S son puntos de tangencia; $m\measuredangle STN = m\overset{\frown}{AB}$. Calcule "θ".



A) 30° B) 40° C) 36°
D) 38° E) 60°

PROBLEMA Nº 238

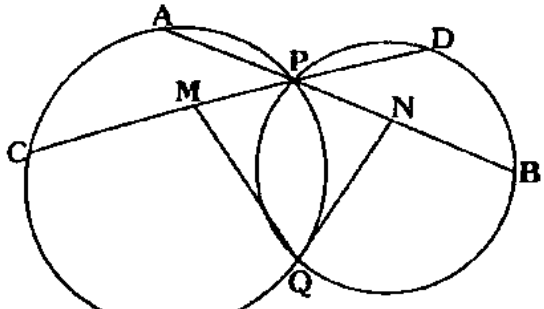
Si R, H y A son puntos de tangencia; $m\overset{\frown}{AB} = 100°$ y $m\overset{\frown}{BC} = 30°$.
Calcule $m\overset{\frown}{DE}$.



A) 10° B) 15°
C) 20° D) 10,5°
E) 25°

PROBLEMA Nº 239

En el gráfico, AN=NB y CM=MD. Demuestre que el cuadrilátero QNPM es inscriptible.



PROBLEMA Nº 240

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se trazan las cevianas interiores $\overline{AD}$ y $\overline{BL}$ secantes en Q y la mediana $\overline{BM}$ que corta a $\overline{AD}$ en P. Si $m\sphericalangle BAD=10°$, $m\sphericalangle DAC=30°$, $m\sphericalangle CBL=20°$, MP=a, LQ=b y CD=c. Halle la relación entre a, b y c.

A) $2b=a+c$ B) $b^2=a^2+c^2$

C) $c^2=a^2+b^2$ D) $2c=a+b$

E) $2a=b+c$

PROBLEMA Nº 241

En el gráfico, ABCD es un rombo y AM=MD. Calcule "x".

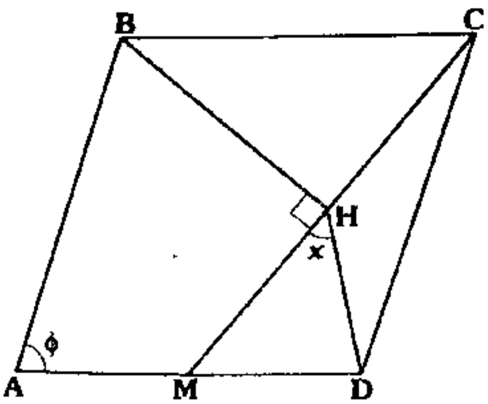
A) ϕ

B) 2ϕ

C) $\frac{3}{2}\phi$

D) $90°-\phi$

E) $90°-\frac{\phi}{2}$



PROBLEMA Nº 242

Del gráfico, calcule "x".

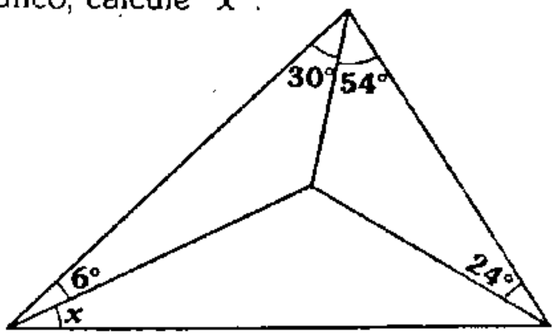
A) 12°

B) 15°

C) 16°

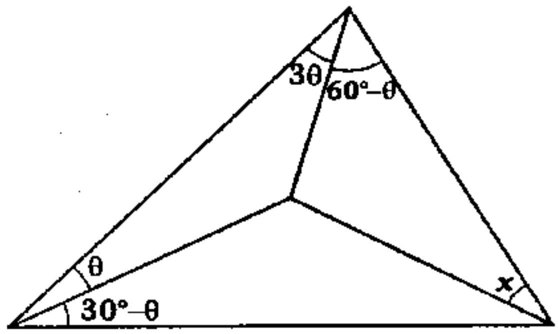
D) 24°

E) 18°



PROBLEMA Nº 243

Calcule "x" en:



A) 22,5° B) 26,5° C) 30°

D) 37,5° E) 36°

PROBLEMA Nº 244

En el gráfico, AB=BC y AC=BD.

Calcule "x".

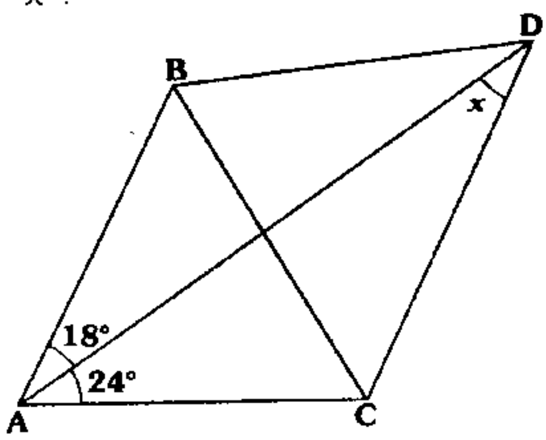
A) 30°

B) 45°

C) 55°

D) 60°

E) 75°

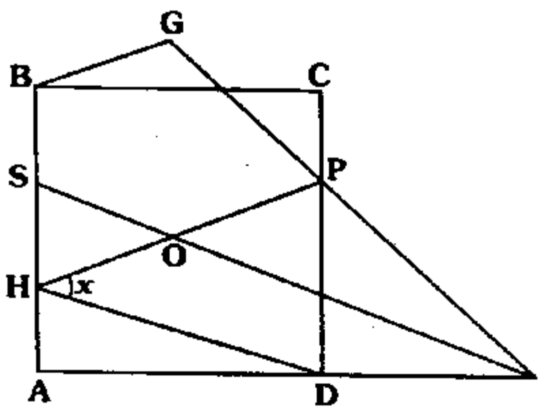


PROBLEMA Nº 245

Se tiene el rectángulo ABCD, P es un punto coplanar a dicho rectángulo, desde C y B se trazan las perpendiculares a $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{DP}$ respectivamente, las cuales se cortan en L. Demostrar que $\overline{LP} \perp \overline{BC}$.

PROBLEMA Nº 246

ABCD es un cuadrado de centro O, HBGP es un trapecio isósceles y $3(BS)=4(AH)$. Calcule "x".



A) 45° B) 37° C) 81°/2

D) 53° E) 74°

PROBLEMA Nº 247

ABCD es un cuadrado, N, M, P, Q, T y L son puntos de tangencia. Calcule "x".

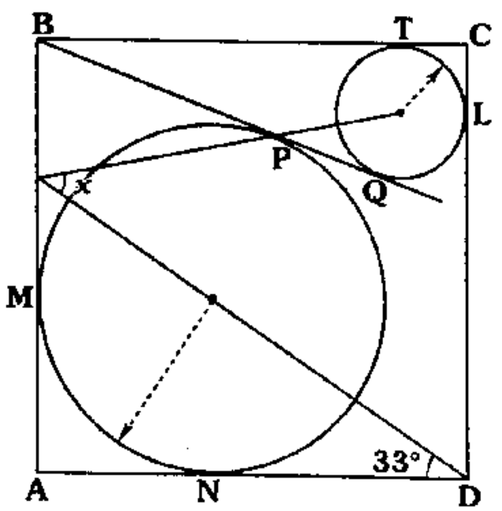
A) 53°

B) 63°

C) 37°

D) 45°

E) 23°



PROBLEMA Nº 248

Se tiene el triángulo ABC (AB=BC), se traza la circunferencia inscrita $\mathscr{C}$ la cual es tangente a $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$ en T, E y D respectivamente. Se ubica L en la prolongación de $\overline{AB}$, la prolongación de $\overline{LE}$ corta a $\mathscr{C}$ en G, $\overline{GA}$ corta a $\mathscr{C}$ en F y $\overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{k\}$. Calcule $\frac{Ak}{BL}$

A) 2 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$

D) 1 E) $\frac{1}{2}$

PROBLEMA Nº 249

Se tiene el triángulo ABC, con BC=2(AB), P es un punto interior talque:

$m\sphericalangle BPC = 90°$, $m\sphericalangle PCB = \theta$, $m\sphericalangle PAC = 2\theta$ y $m\sphericalangle BAP = 20° + \theta$.

Calcule $m\sphericalangle PCA$

A) 10° B) 20° C) 30°

D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 250

Se tienee la circunferencia de radio R circunscrita al triángulo ABC. P es un punto coplanar a dicho triángulo, A' es la proyección de P sobre la altura trazada desde A en el triángulo ABC, análogamente se ubica B' y C'. Si $\Delta ABC \cong A'B'C'$, calcule la distancia de P al ortocentro del ΔABC.

A) R B) $R\sqrt{2}$

C) 2R D) $R\sqrt{3}$

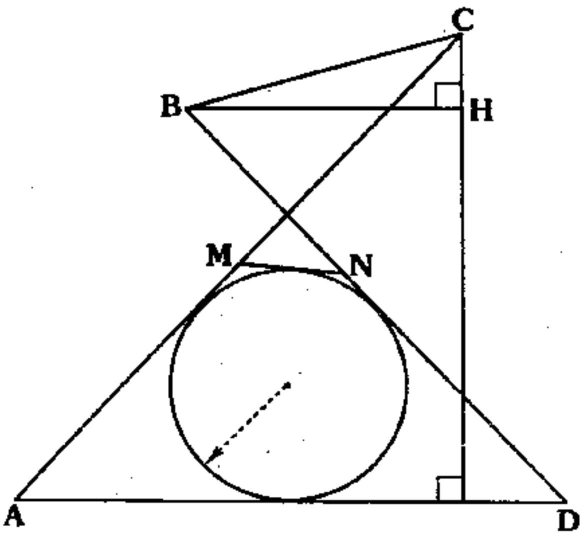
E) R/2

PROBLEMA Nº 251

En el triángulo ABC (AB=BC) M es punto medio de $\overline{AC}$ y P es un punto interior del triángulo ABC tal que $m\measuredangle BAP = m\measuredangle PCA$. Demuestre que $m\measuredangle APM + m\measuredangle PBC = 180°$.

PROBLEMA Nº 252

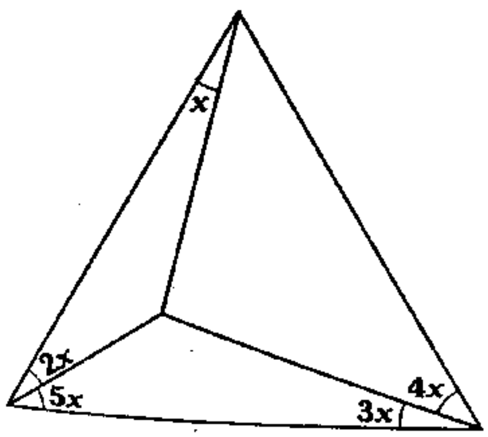
En el gráfico, BC=6, BH=5, AD=10,, AM=MC y BN=ND. Calcule AC+BD.



A) 20 B) 25 C) 21
D) 26 E) 15

PROBLEMA Nº 253

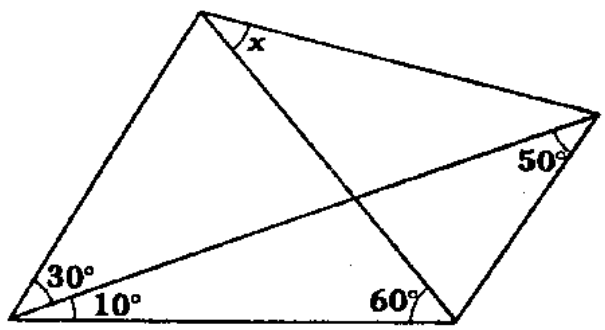
Del gráfico, calcule "x".



A) 5° B) 10° C) 12°
D) 7,5° E) 9°

PROBLEMA Nº 254

Calcule "x" en el siguiente gráfico:



A) 10° B) 15° C) 18°
D) 20° E) 30°

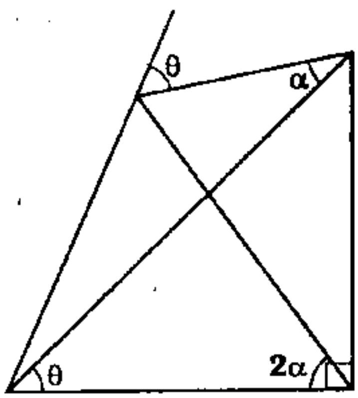
PROBLEMA Nº 255

En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BM}$, si $m\measuredangle BAC = 28°$ y $m\measuredangle BCA = 23°$. Calcule $m\measuredangle ABM$.

A) 53° B) 60° C) 74°
D) 76° E) 71,5°

PROBLEMA Nº 256

Calcule α, en el gráfico:



A) 45° B) $45° - \theta$ C) 2θ
D) 3θ E) $90° - \theta$

PROBLEMA Nº 257

Se tiene el triángulo ABC, se ubica Q en $\overline{BC}$, R en $\overline{AC}$ y P en la región interior del triángulo ABQ tal que PBQR es un romboide. Si $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle ABP$, $m\sphericalangle APB = 3(m\sphericalangle AQB)$.

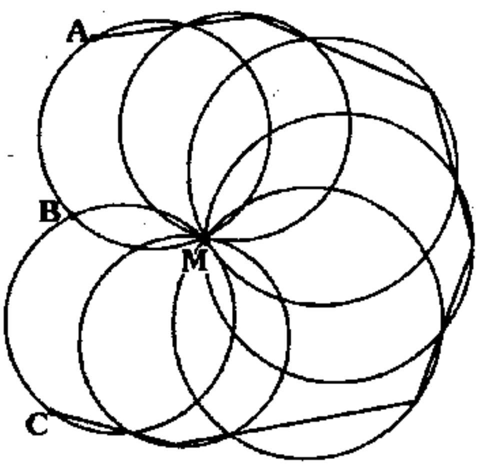
Calcule $m\sphericalangle AQB$.

A) 30° B) 15° C) 45°

D) 37° E) 53°

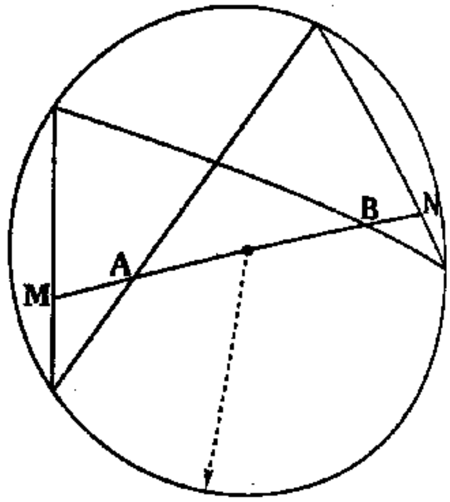
PROBLEMA Nº 258

En el gráfico, demostrar que A, B y C son colineales.



PROBLEMA Nº 259

En el gráfico, OA=OB. Demostrar que AM=BN.



PROBLEMA Nº 260

Sea el triángulo ABC, (AB=BC) con $m\sphericalangle ABC = 2\phi$, M es punto medio de BC. Se ubica X en el menor arco MA de la circunferencia circunscrita del triángulo ABM y T es un punto interior del $\sphericalangle BMA$ tal que $m\sphericalangle TMX = 90°$ y $AX = XT$.

Calcule $m\sphericalangle MTA - m\sphericalangle CTM$.

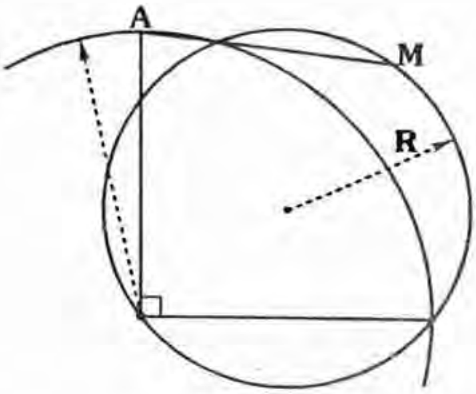
A) ϕ B) 2ϕ C) $90° - \phi$

D) $90° - \frac{\phi}{2}$ E) $90° - \frac{\phi}{4}$

Problemas Resueltos
Ciclo Repaso

PROBLEMA Nº 261

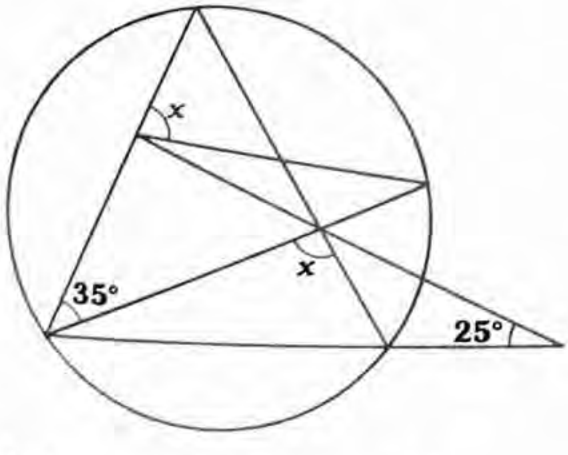
Si R=5, calcule AM.



A) 5 B) $5\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{3}$
D) 10 E) 7,5

PROBLEMA Nº 262

En el gráfico, calcule "x".



A) 60° B) 90° C) 80°
D) 70° E) 50°

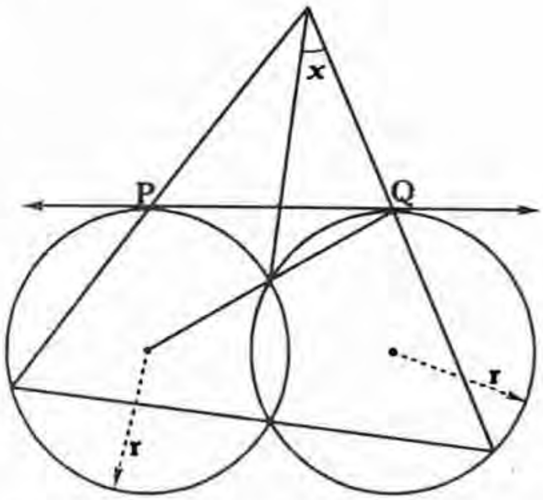
PROBLEMA Nº 263

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$. Si $m\sphericalangle BQP=50°$ y $m\sphericalangle ACQ=40°$. Calcule $m\sphericalangle PAB$.

A) 40° B) 50°
C) 60° D) 30°
E) 20°

PROBLEMA Nº 264

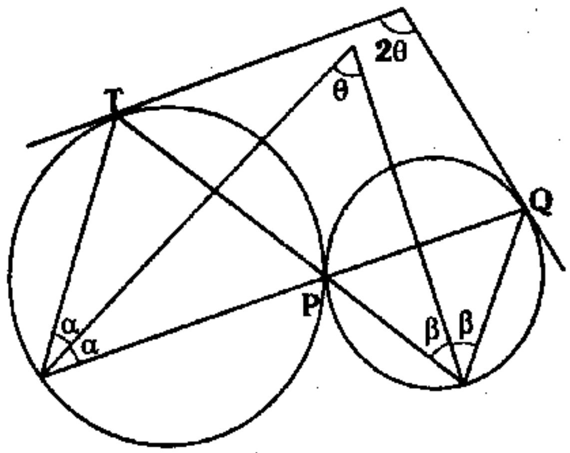
P y Q son puntos de tangencia.
Calcule "x".



A) 37° B) 36°
C) 45° D) 15°
E) 30°

PROBLEMA Nº 265

En el gráfico, T, P y Q son puntos de tangencia. Calcule "θ".

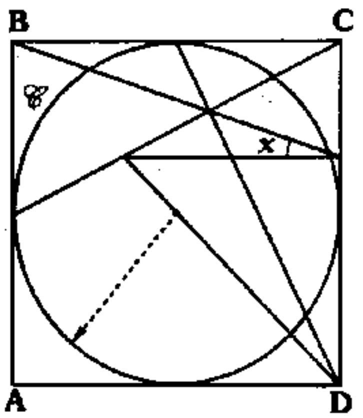


A) 60° B) 45° C) $\frac{135°}{2}$

D) 40° E) 80°

PROBLEMA Nº 266

En el gráfico, la circunferencia $\mathscr{C}$ está inscrita en el cuadrado ABCD.
Calcule "x".



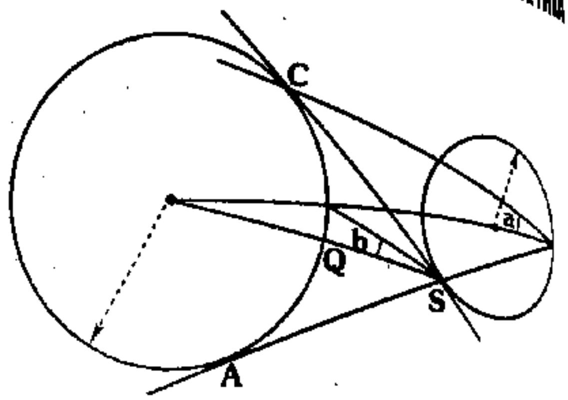
A) 15° B) 18°30'

C) 22°30' D) 26°30'

E) 30°

PROBLEMA Nº 267

En el gráfico, A, C y S son puntos de tangencia. Si a+b=32°, calcule $m\widehat{AQ}$.

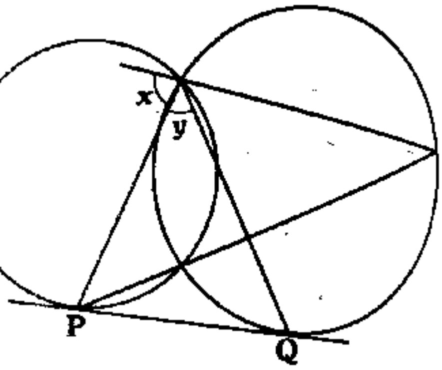


A) 76° B) 64° C) 58°

D) 74° E) 32°

PROBLEMA Nº 268

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Indique la relación entre "x" e "y".



A) $x=y$ B) $x+y=120°$

C) $x=2y$ D) $x=180°-2y$

E) $x+3y=180°$

PROBLEMA Nº 269

T, P, Q, S y M son puntos de tangencia.
Calcule $m\widehat{PQ}-m\widehat{TN}$.

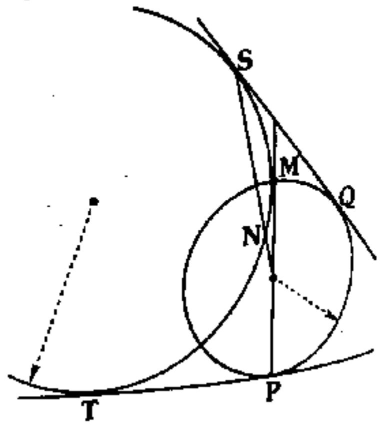
A) 30°

B) 37°

C) 45°

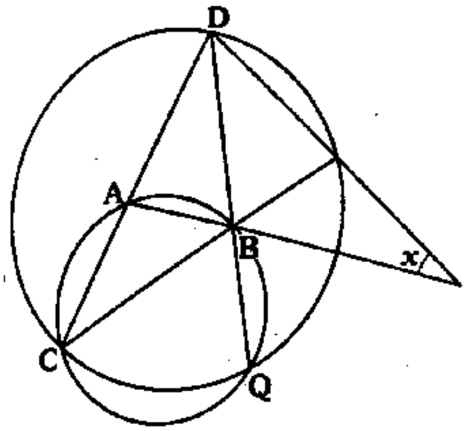
D) 53°

E) 60°



PROBLEMA Nº 270

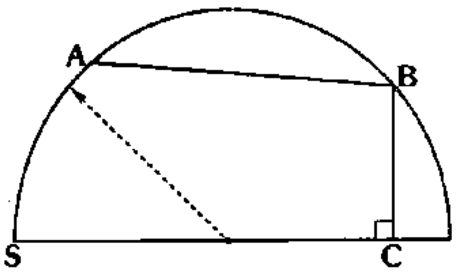
En el gráfico, $m\widehat{AB}=40°$. Calcule x.



A) 10° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 40°

PROBLEMA Nº 271

Si $m\widehat{AB}=80°$ y AB=2(BC). Calcule $m\widehat{AS}$.

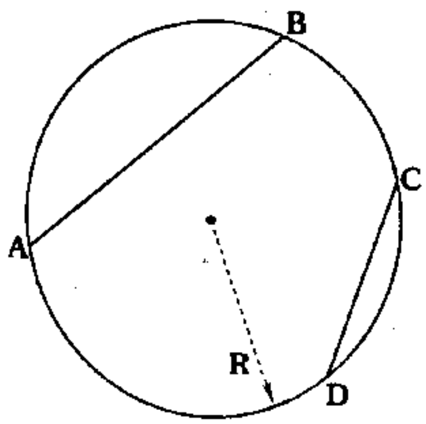


A) 60° B) 40° C) 50°
D) 20° E) 75°

PROBLEMA Nº 272

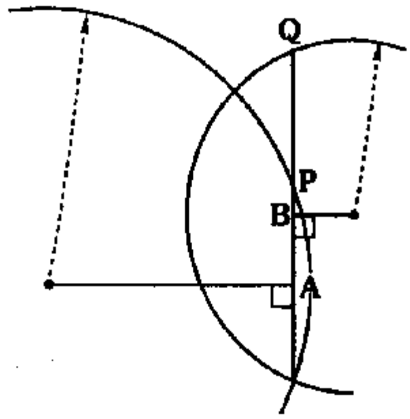
Si $m\widehat{BC}+m\widehat{AD}=180°$; AB=15 y CD=8. Calcule R.

A) 7,5
B) 8,5
C) 7
D) 9
E) 9,5



PROBLEMA Nº 273

Si AB=3. Calcule PQ.

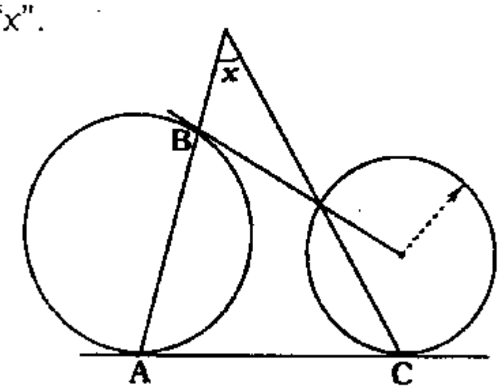


A) 6 B) 5 C) 3
D) 4 E) 2,5

PROBLEMA Nº 274

Si A, B y C son puntos de tangencia. Calcule "x".

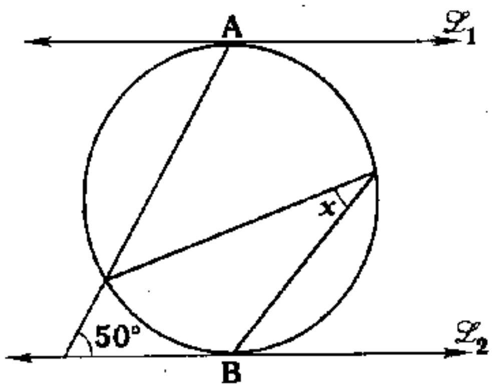
A) 30°
B) 45°
C) 36°
D) 75°
E) 60°



PROBLEMA Nº 275

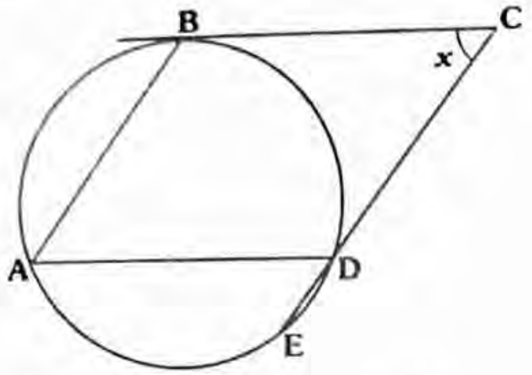
Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$; A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".

A) 25°
B) 40°
C) 80°
D) 35°
E) 50°



PROBLEMA Nº 276

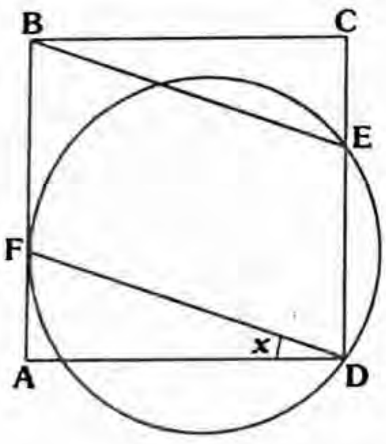
Si ABCD es un paralelogramo. B es punto de tangencia y $m\widehat{DE} = 30°$. Calcule "x".



A) 60° B) 55° C) 50°
D) 75° E) 70°

PROBLEMA Nº 277

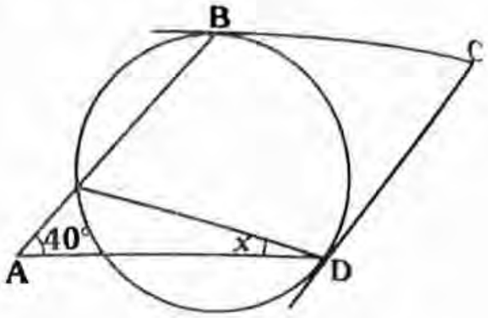
Si ABCD es un cuadrado y FBED es un romboide; F es punto de tangencia.
Calcule "x".



A) 15° B) 29°
C) 37°/2 D) 53°/2
E) 30°

PROBLEMA Nº 278

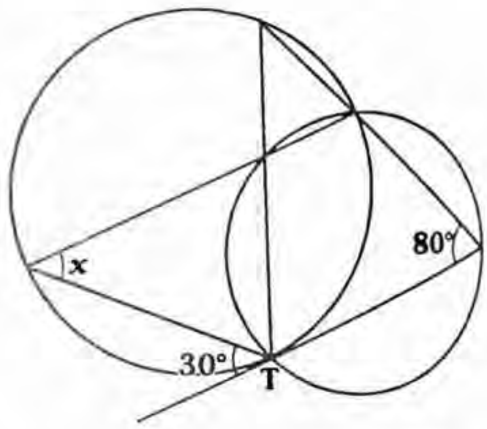
Si B y D son puntos de tangencia y ABCD es un paralelogramo.
Calcule "x".



A) 70° B) 35° C) 30°
D) 50° E) 40°

PROBLEMA Nº 279

En el gráfico, T es punto de tangencia.
Calcule "x".



A) 25° B) 30° C) 35°
D) 40° E) 45°

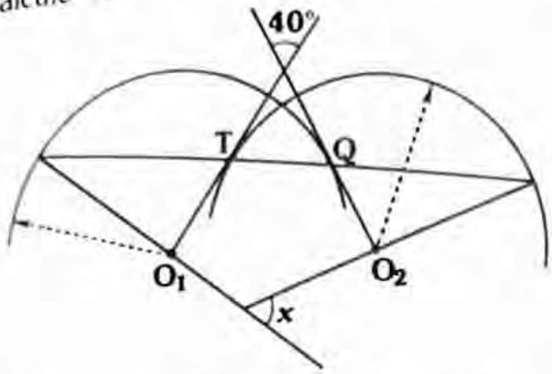
PROBLEMA Nº 280

En el cuadrado ABCD, se ubica P y Q en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Se traza $\overline{PH} \perp \overline{AQ}$ (H en $\overline{AQ}$) tal que BH=7, HQ=3 y $m\measuredangle ABH = m\measuredangle HPC$.
Calcule PH.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA Nº 281

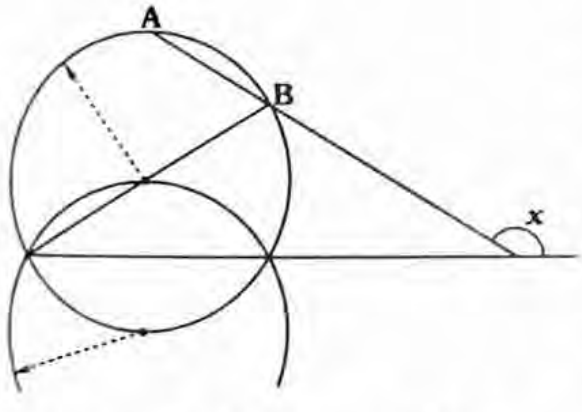
T y Q son puntos de tangencia.
Calcule "x".



A) 40° B) 50° C) 100°
D) 80° E) 60°

PROBLEMA Nº 282

En el gráfico, $m\widehat{AB} = 40°$. Calcule "x".



A) 100° B) 130° C) 140°
D) 110° E) 155°

PROBLEMA Nº 283

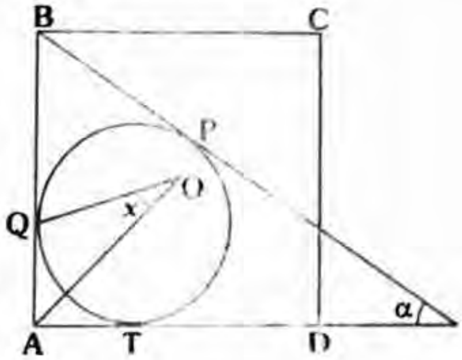
Se tiene el cuadrado ABCD en el cual se traza interiormente las semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$, en dichá semicircunferencia se ubica P talque $PD = 4$ y $AB = 4\sqrt{3}$.
Calcule m∢CPD

A) 90° B) 100° C) 127°
D) 106° E) 112°30'

PROBLEMA Nº 284

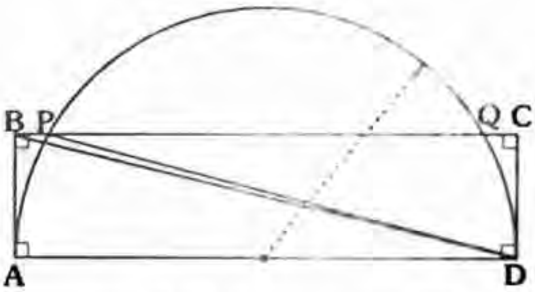
En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O, calcule "x", si P, Q y T son punto de tangencia.

A) α
B) 2α
C) $90° - \alpha$
D) $45° - \frac{\alpha}{2}$
E) $45° + \alpha$



PROBLEMA Nº 285

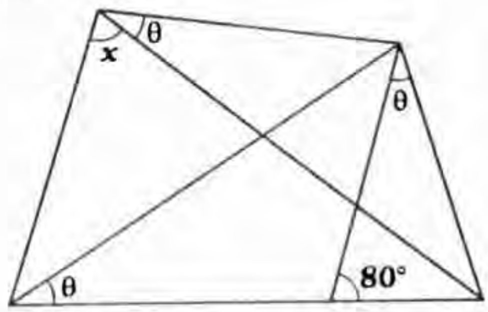
En el gráfico, $m\widehat{PQ} = 120°$. Calcule m∢BDP.



A) 1° B) 2° C) 5°
D) 7,5° E) 3,75°

PROBLEMA Nº 286

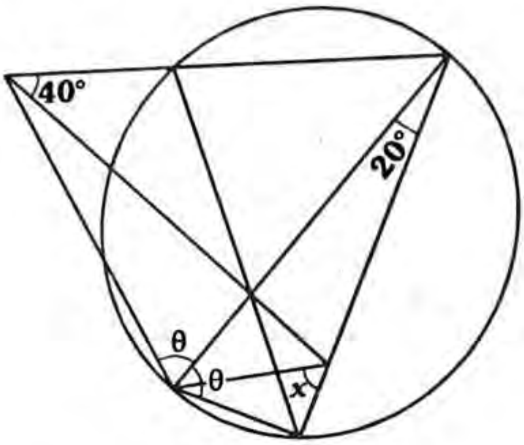
Calcule "x", es:



A) 70° B) 75° C) 80°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 287

En el gráfico, calcule "x".

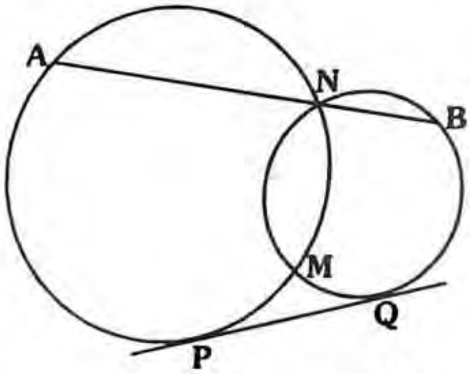


A) 20° B) 60° C) 30°
D) 40° E) 80°

PROBLEMA Nº 288

En el gráfico, $m\widehat{AN}=2\left(m\widehat{PM}\right)$.

Calcule $\frac{PQ}{AB}$.



A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{3}{2}$ E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 289

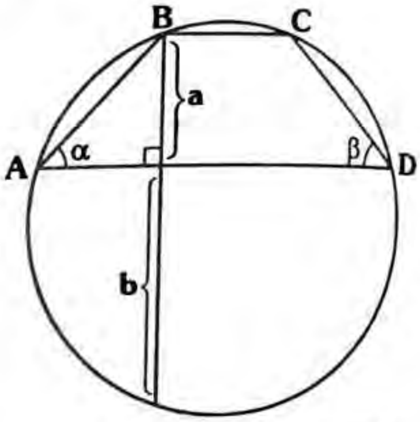
Se tiene el cuadrante AOB (O es centro) se traza una circunferencia tangente a $\overline{OB}$ en T y al arco AB en P. Si $3(TB)=2(OT)$.

Calcule $m\measuredangle BAP$.

A) 37° B) 53° C) 14°
D) 23° E) 28°

PROBLEMA Nº 290

$\alpha+\beta=90°$, entonces el valor de la longitud del segmento BC es:



A) a B) $\sqrt{b^2-a^2}$

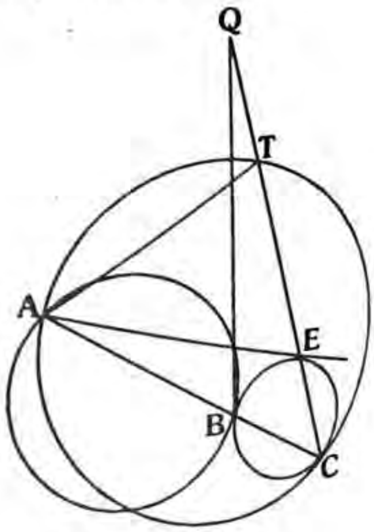
C) $b-a$ D) $\frac{a+b}{4}$

E) $\frac{b}{3}$

PROBLEMA Nº 291

Según la figura, calcule $m\measuredangle TAE=40°$ y $m\measuredangle EAC=15°$.

(B, E, C son puntos de tangencia).

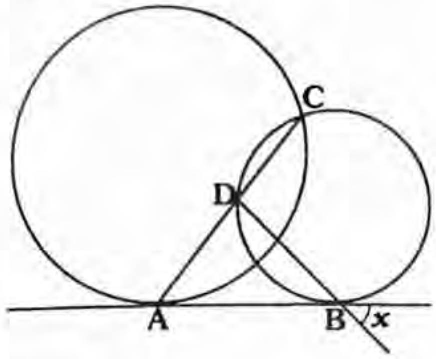


A) 40°
B) 20°
C) 15°
D) 30°
E) 60°

PROBLEMA Nº 292

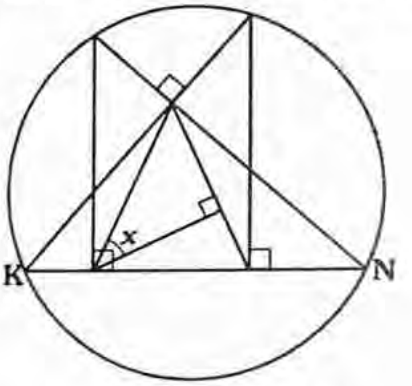
Según la figura las circunferencias son ortogonales A y B son puntos de tangencia. Calcule el valor de "x".

A) 75°
B) 60°
C) 45°
D) 40°
E) 30°



PROBLEMA Nº 293

En el gráfico, $m\widehat{KN}=\phi$. Calcule "x".

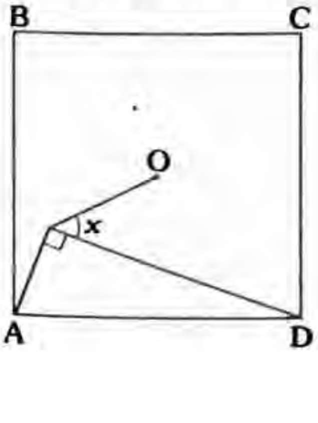


A) 180°−ϕ
B) ϕ−90°
C) ϕ−60°
D) ϕ−75°
E) ϕ−45°

PROBLEMA Nº 294

O es centro del cuadrado ABCD, calcule "x".

A) 60°
B) 53°
C) 45°
D) 30°
E) 37°



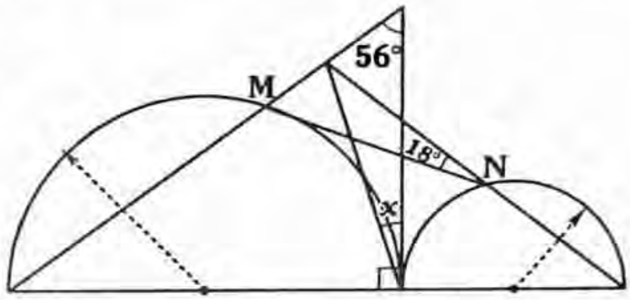
PROBLEMA Nº 295

Se tiene dos circunferencia coplanares de radios 7 y15 y su distancia de centros es 20. Calcule la medida del ángulo entre dichas circunferencias.

A) 30°
B) 60°
C) 37°
D) 53°
E) 74°

PROBLEMA Nº 296

En el gráfico, calcule "x".

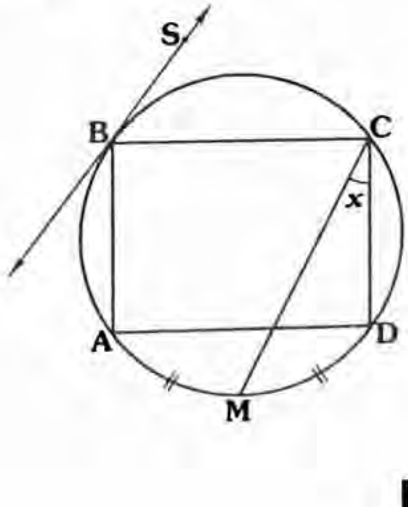


A) 18°
B) 16°
C) 14°
D) 12°
E) 20°

PROBLEMA Nº 297

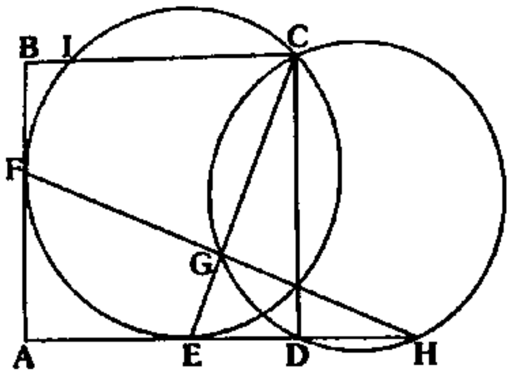
Se tiene un rectángulo ABCD inscrito en una circunferencia de manera que la recta tangente trazada por B es paralela a la recta que pasa por C y M punto medio del arco AD. Calcule x.

A) 53°
B) 30°
C) 37°
D) 60°
E) 45°



PROBLEMA Nº 298

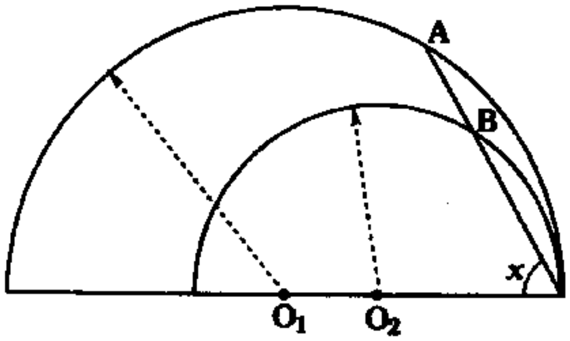
Calcular $m\widehat{IC}$, ABCD: rectángulo, E y F son puntos de tangencia.



A) 45° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 75°

PROBLEMA Nº 299

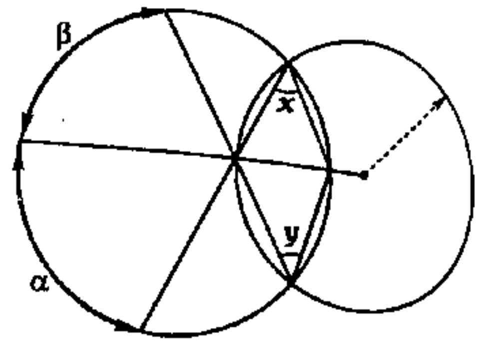
Si: $O_1O_2 = AB$, calcule "x".



A) 45° B) 60° C) 53°
D) 37° E) 75°

PROBLEMA Nº 300

Calcule $x-y$ en función de α y β.



A) $\alpha-\beta$ B) $\alpha+\beta$

C) $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ D) $90°-(\alpha+\beta)$

E) $180°-(\alpha+\beta)$

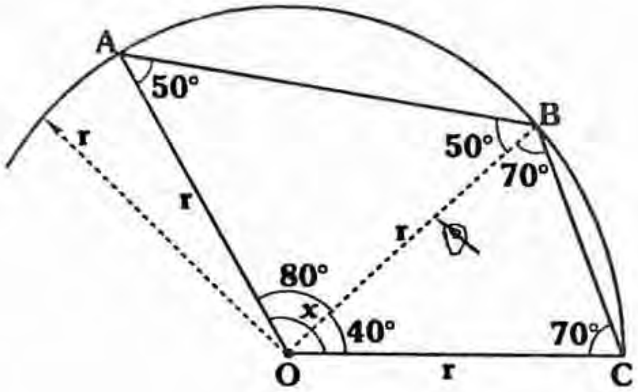
Geometría

SOLUCIONARIO

- Anual
- Cepre Uni
- Semestral
- Semestral Intensivo
- Repaso

CIRCUNFERENCIA

RESOLUCIÓN Nº 1



Nos piden "x".

- Por definición de circunferencia:

$$AO = BO = CO$$

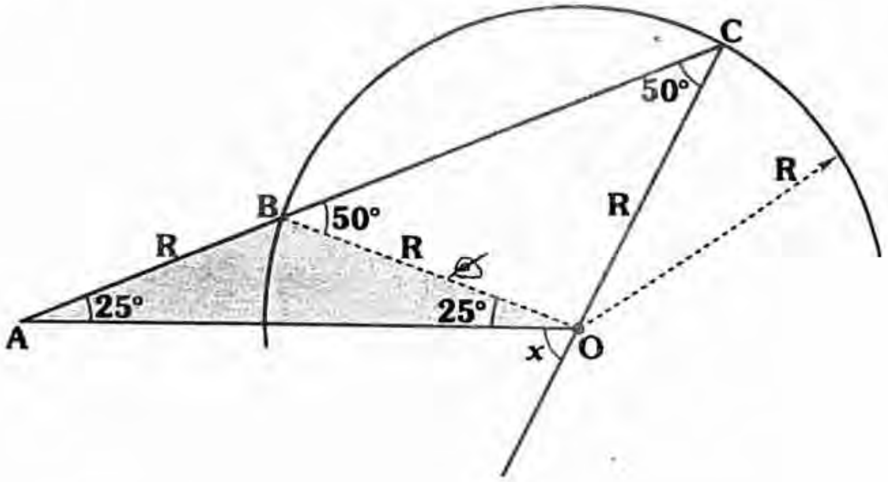
$\Rightarrow$ ΔAOB y ΔBOC son isósceles

$$x = 80° + 40°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 120°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 2



Nos piden "x".

- Por definición: $OB = R \Rightarrow \Delta ABO$ y ΔBOC son isósceles entonces:

$$m\sphericalangle AOB = 25° \quad y \quad m\sphericalangle OBC = m\sphericalangle BCO = 50°$$

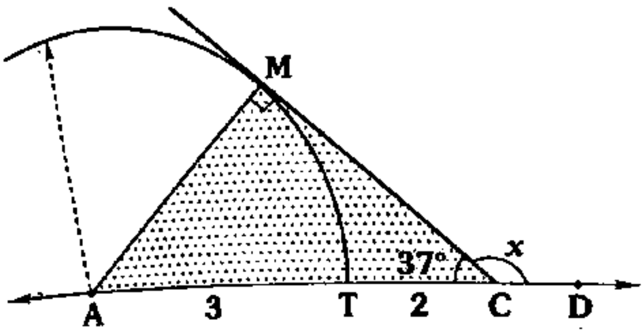
- En ΔAOC: por ángulo exterior:

$$x = 50° + 25°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 75°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 3



Nos piden "x".

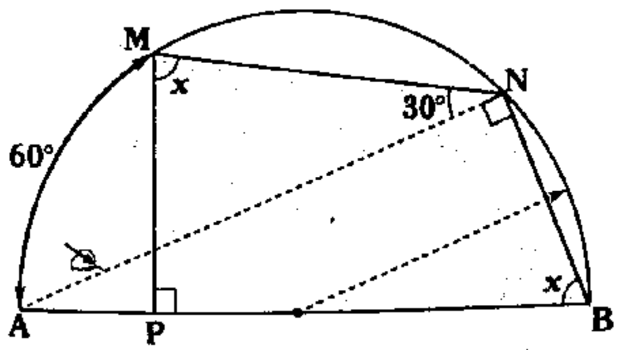
- Al unir "A" con "M" tendremos: $\overline{AM} \perp \overline{MC}$
- ⊿AMC: notable de 37°

$$\Rightarrow \quad x+37°=180°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=143°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 4



Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle ANM=30°$$

- En la semicircunferencia:

$$m\measuredangle ANB=90°$$

- En el cuadrilátero PBNM:

$$x+90°+x+120°=360°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=75°}$$

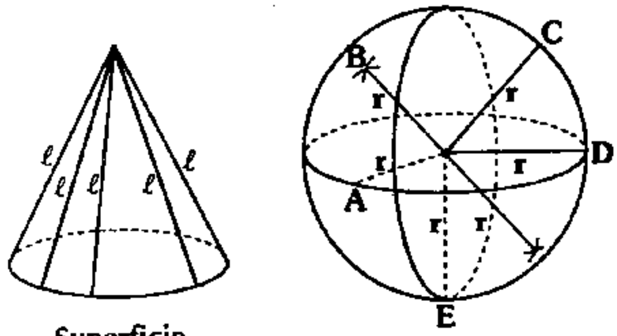
Clave B

RESOLUCIÓN Nº 5

Analizando cada proposición:

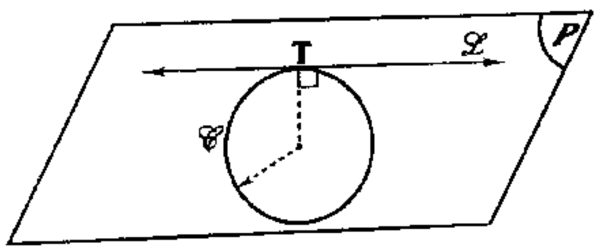
I) **FALSO**

Los puntos deben estar en el mismo plano, pues también tenemos las siguientes figuras cumplen la definición:



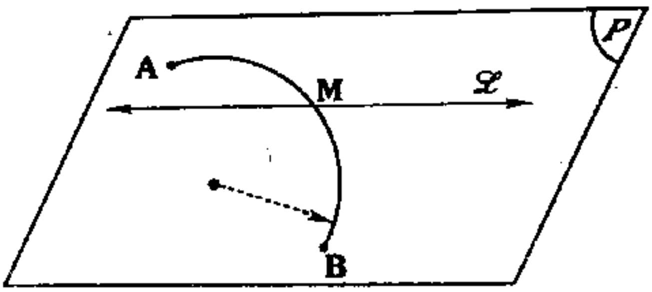
Superficie lateral del cono **Superficie esférica**

II) **VERDADERO**



Por definición, una recta es tangente ($\mathscr{L}$) a una circunferencia ($\mathscr{C}$) si está en el mismo plano y la intersección es un solo punto (T).

III) FALSO

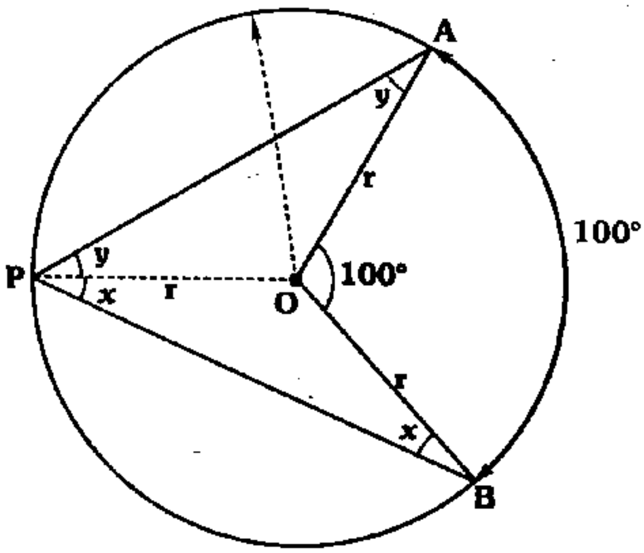


$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \cap \widehat{AB} = \{M\}$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ no es tangente al arco AB.

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 6



Nos piden: $x+y$

- Por ángulo central:

$$m\sphericalangle AOB = 100°$$

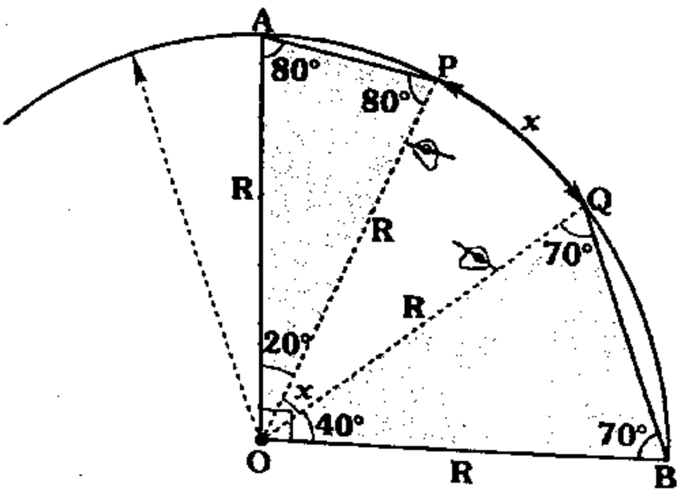
- En el $\measuredangle$AOB:

$$2x+2y=100°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x+y=50°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 7



Nos piden "x"

- Por ángulo central:

$$m\sphericalangle POQ = x$$

- ΔAOP y ΔQOB : isósceles

$$\Rightarrow\ m\sphericalangle AOP = 20° \quad y$$
$$m\sphericalangle QOP = 40°$$

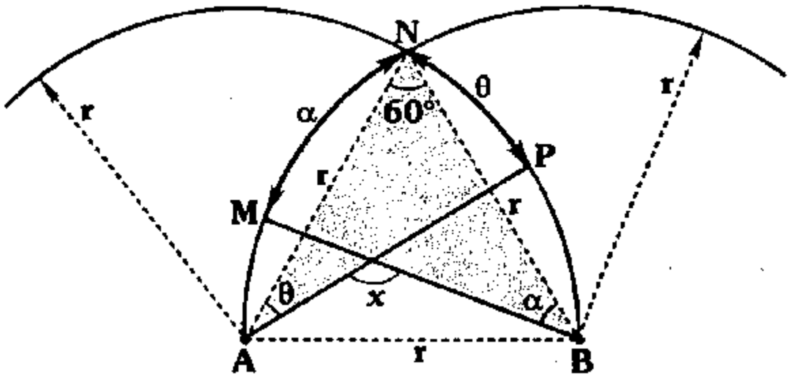
- Como:

$$x+20°+40°=90°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 8



Nos piden "x"

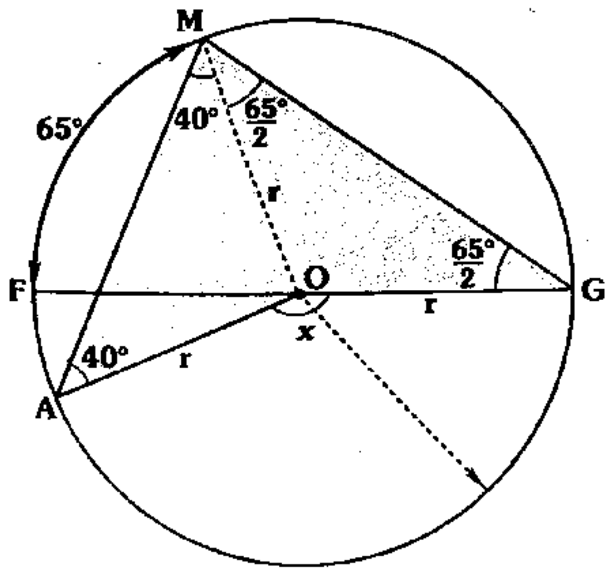
Dato: $\alpha+\theta=50°$

- Por ángulo central: $m\measuredangle NAP=\theta$ y $m\measuredangle MBN=\alpha$
- ΔANB : equilátero
- En el cuadrilátero cóncavo: $x=60°+\underbrace{\alpha+\theta}_{50°}$

$\therefore$ $\mathbf{x=110°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 9



Piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle FGM=\frac{65°}{2}$$

- Como AO=MO=OG

$\Rightarrow$ ΔAOM y ΔMOG : isósceles

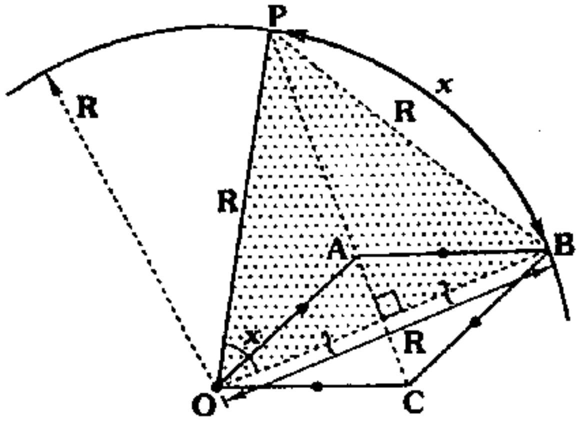
- En ∠AOGM:

$$x=40°+40°+\frac{65°}{2}+\frac{65°}{2}$$

$\therefore$ $\mathbf{x=145°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 10



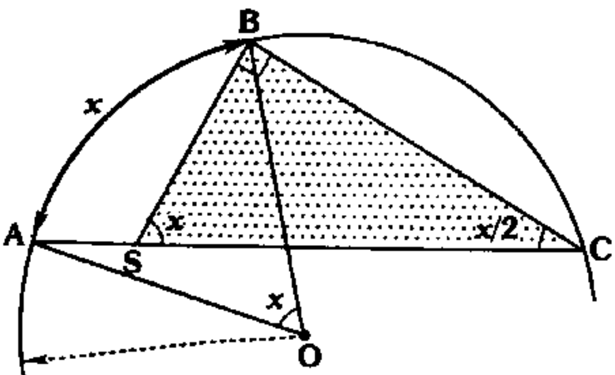
Piden "x".

- Por ángulo central $m\measuredangle POB = x$
- Como OABC es un rombo entonces $\overline{OB} \perp \overline{AC}$ entonces $\overleftrightarrow{PC}$ es mediatriz de $\overline{OB}$ entonces PB=PO=R.
- ΔOPB: equilátero

$$\therefore \quad x = 60^\circ$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 11



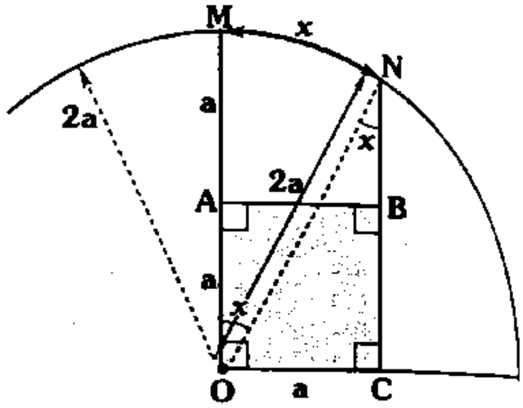
Piden "x".

- Por ángulo central: $m\widehat{AB} = x$
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle ACB = \dfrac{x}{2}$
- En $\triangle SBC$: $x + \dfrac{x}{2} = 90^\circ$

$$\therefore \quad x = 60^\circ$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 12



Piden "x".

- Dato: OA=AM
- Sea OA=OC=a $\Rightarrow$ ON=2a
- Por ángulo central:

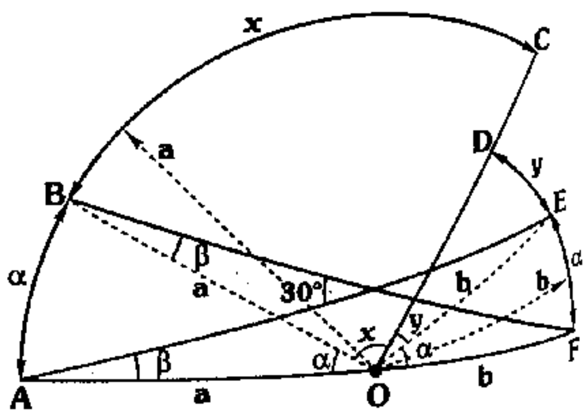
$$m\measuredangle MON = x$$

- En $\triangle OCN$: notable

$$\therefore \quad x = 30^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 13



Piden $x+y$

- Dato: $m\widehat{AB}=m\widehat{EF}$
- Por ángulo central:

$$m\measuredangle AOB=m\measuredangle FOE=\alpha$$

- $\Delta AOE\cong\Delta BOF$ (LAL)

$$\Rightarrow\ m\measuredangle DAE=m\measuredangle OBF=\beta$$

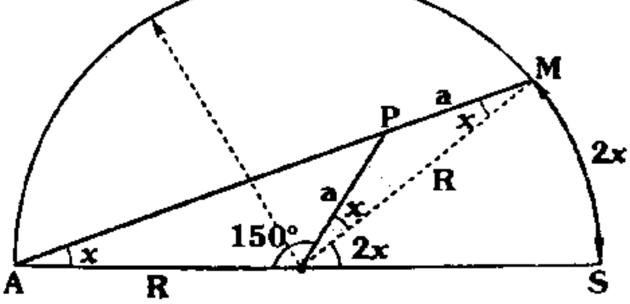
- En ⧖: $\alpha+\beta=30°+\beta\ \Rightarrow\ \alpha=30°$
- En "O":

$$x+y+2\alpha=180°$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x+y=120°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 14



Nos piden: $m\widehat{MS}$

- Sea :

$$m\measuredangle SAM=x\ \Rightarrow\ m\measuredangle OMA=x$$

- ΔOPM: isósceles $\Rightarrow m\measuredangle MOP=x$
- En O: $150°+3x=180°$

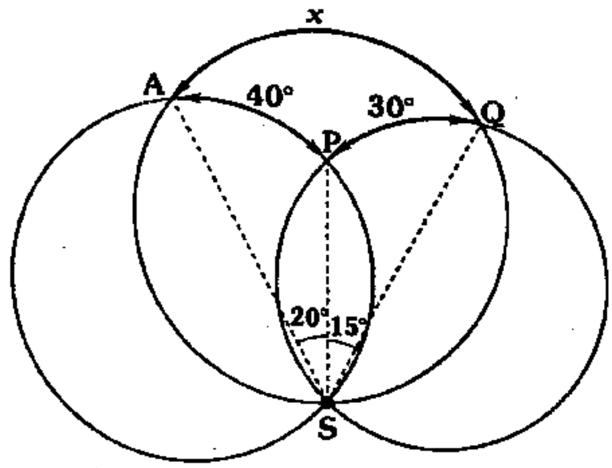
$$\Rightarrow\quad x=10°$$

- Como: $m\widehat{MS}=2x$

$$\therefore\quad \boldsymbol{m\widehat{MS}=20°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 15



Piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle ASP=20°\quad y$$

$$m\measuredangle PSQ=15°$$

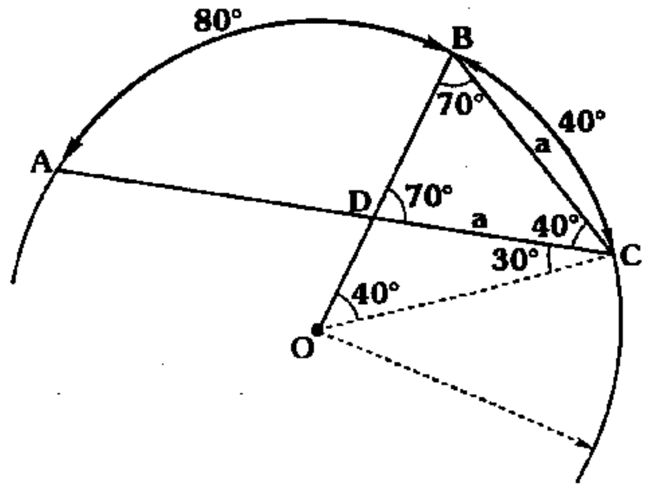
$$\Rightarrow\ m\measuredangle ASQ=35°$$

- Finalmente, por ángulo inscrito en $\mathscr{C}$:

$$\boldsymbol{x=2(35°)=70°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 16



Piden: $m\widehat{ABC}$

- $\triangle BCD$ y $\triangle OBC$: isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle DBC = m\measuredangle BDC = 70° \Rightarrow m\measuredangle DCO = 30°$ y $m\measuredangle BOC = 40°$

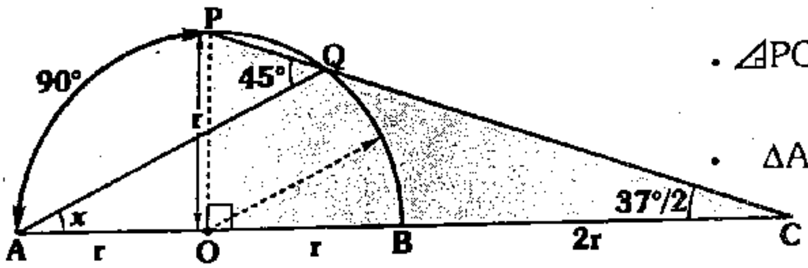
- Por ángulo central: $m\widehat{BC} = 40°$
- Por ángulo inscrito: $m\widehat{AB} = 80°$

$\Rightarrow m\widehat{ABC} = 80° + 40°$

$\therefore$ $\mathbf{m\widehat{ABC} = 120°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 17



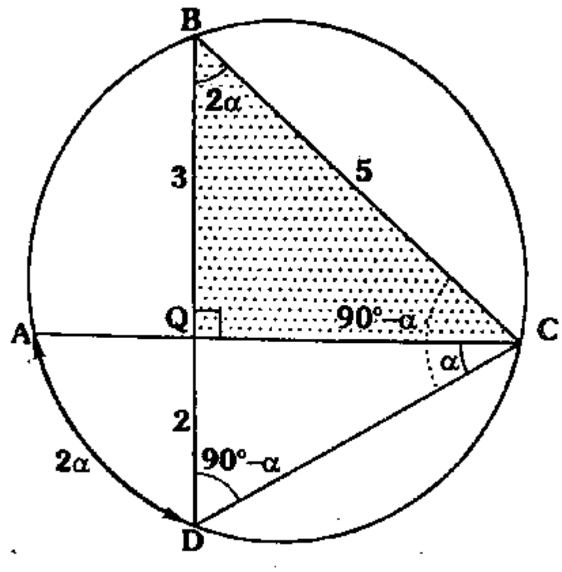
Piden "x".

- Dato: $m\widehat{AP} = m\widehat{PQB} \Rightarrow \overline{PO} \perp \overline{AB}$
- ⊿POC: notable $\Rightarrow m\measuredangle PCO = \dfrac{37°}{2}$
- $\triangle AQC$: $x + \dfrac{37°}{2} = 45°$

$\therefore$ $\mathbf{x = \dfrac{53°}{2} = 26°30'}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 18



Nos piden $m\widehat{AD}$

- Sea $m\widehat{AD} = 2\alpha$

$\Rightarrow m\measuredangle ACD = \alpha$

$\Rightarrow m\measuredangle BDC = 90° - \alpha$

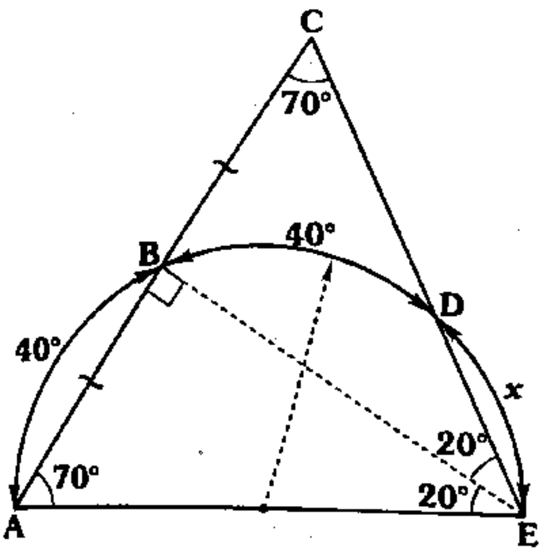
- $\triangle DBC$: isósceles, entonces $DB = BC = 5$
- ⊿BQC: notable

$2\alpha = 53°$

$\therefore$ $\mathbf{m\widehat{AD} = 53°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 19



Piden "x".

- Por propiedad:

$$m\sphericalangle ABE = 90°$$

- Como $AB = BC$ entonces:

ΔAEC es isósceles

$\Rightarrow \overline{EB}$ también es bisectriz

- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AB} = m\widehat{BD} = 40°$$

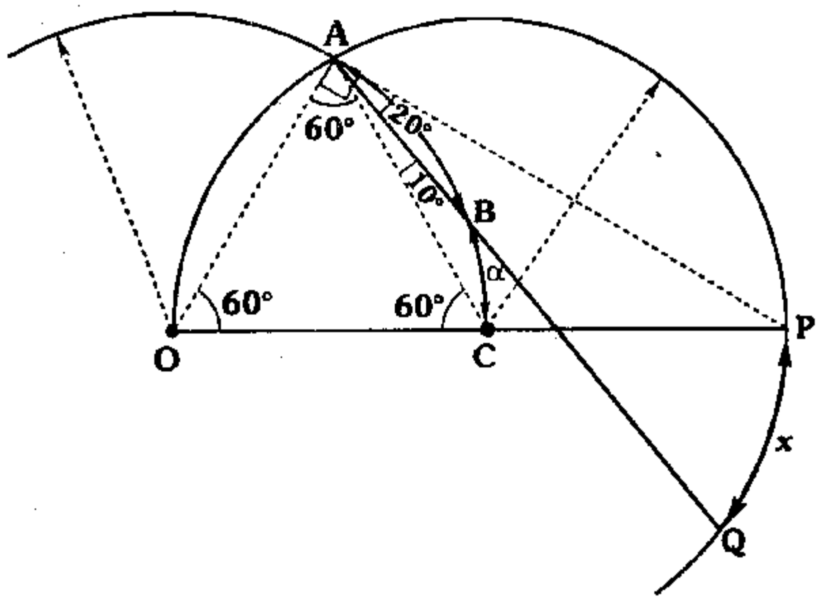
- Finalmente:

$$x + 40° + 40° = 180°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 100°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 20



Piden "x".

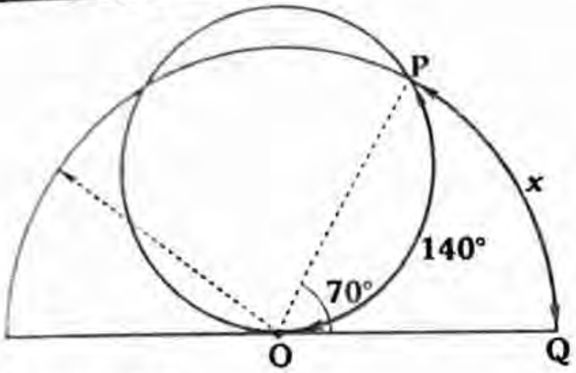
- Dato: $m\widehat{AB} = 2m\widehat{BC} = 2\alpha$
- Notemos que el ΔOAC es equilátero entonces: $\alpha + 2\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 20°$
- Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle CAB = 10°$

$m\sphericalangle BAP = 20°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 40°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 21



Nos piden "x".

- Como $m\widehat{OP}=140°$ entonces por ángulo semiinscrito:

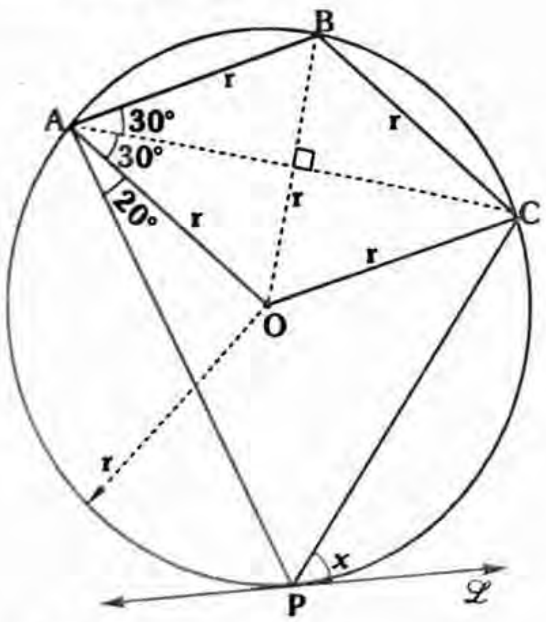
$$m\measuredangle POQ=70°$$

- Por ángulo central:

$$\boldsymbol{x=70°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 22



Piden "x".

- Como ABCO es un paralelogramo entonces AB=r y BC=r, es decir los triángulos AOB y OBS son equiláteros (ABCO *sería un rombo*).

$$\Rightarrow m\measuredangle BAC=m\measuredangle AOC=30°$$

- De la observación:

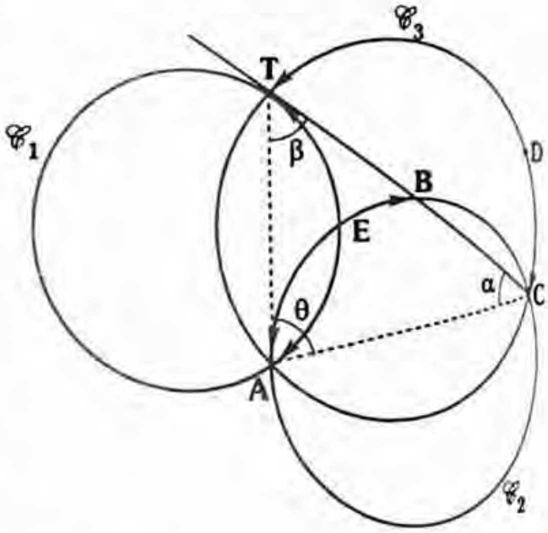
$$\boldsymbol{x=50°}$$

Clave D

Observación



RESOLUCIÓN Nº 23



Nos piden: $m\widehat{TDC}+m\widehat{AB}+m\widehat{AET}$

- En $\mathscr{C}_1$, por ángulo semiinscrito:

$$m\widehat{AET}=2\beta$$

- En $\mathscr{C}_2$, por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AB}=2\alpha$$

- En $\mathscr{C}_3$, por ángulo inscrito:

$$m\widehat{TDC}=2\theta$$

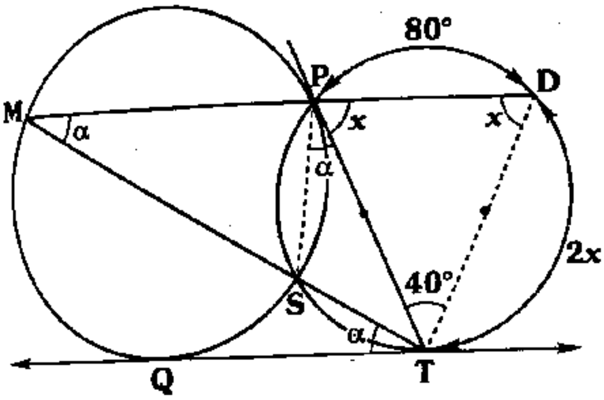
- En el ΔATC: $\alpha+\beta+\theta=180°$

$$\Rightarrow m\widehat{TDC}+m\widehat{AB}+m\widehat{AET}=\underbrace{2\theta+2\alpha+2\beta}_{2(\alpha+\theta+\beta)}$$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{TDC}+m\widehat{AB}+m\widehat{AET}=360°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 24



Piden: $m\widehat{TD}$

- Sea:

$$m\sphericalangle STQ=\alpha$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle SPT=\alpha \Rightarrow m\sphericalangle PMS=\alpha$$

$$\Rightarrow \overline{MP}//\overline{QT} \Rightarrow TP=TD$$

- ΔPTD: isósceles

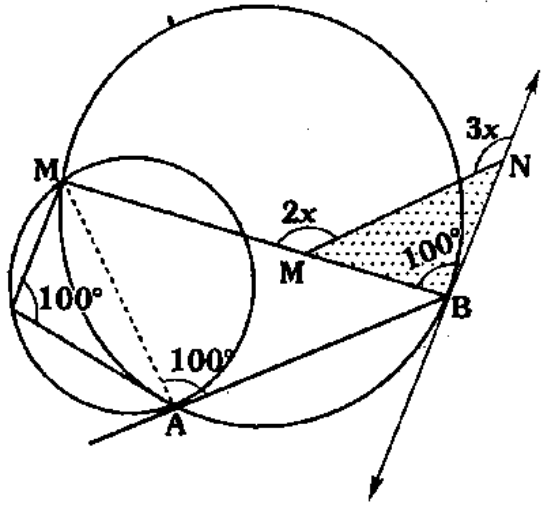
$$\Rightarrow x=70°$$

- Por ángulo inscrito:

$$\mathbf{m\widehat{TD}=2x=140°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 25



Nos piden "x".

- Por propiedad:

$$m\sphericalangle MAB=100°$$

$$m\sphericalangle MBN=100°$$

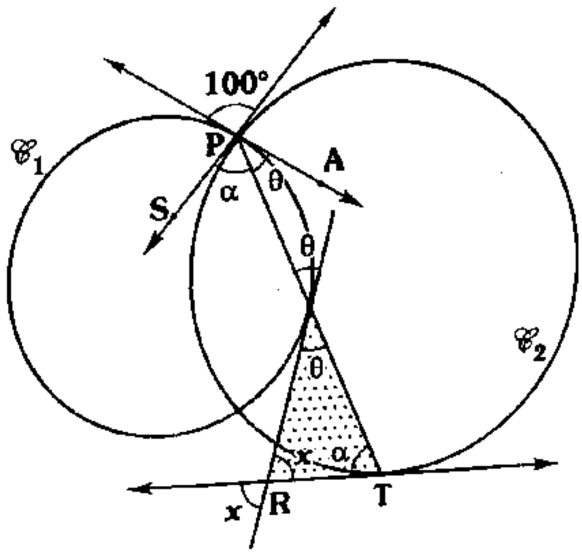
- En el ΔMBN, por propiedad:

$$2x+3x=180°+100°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=56°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 26



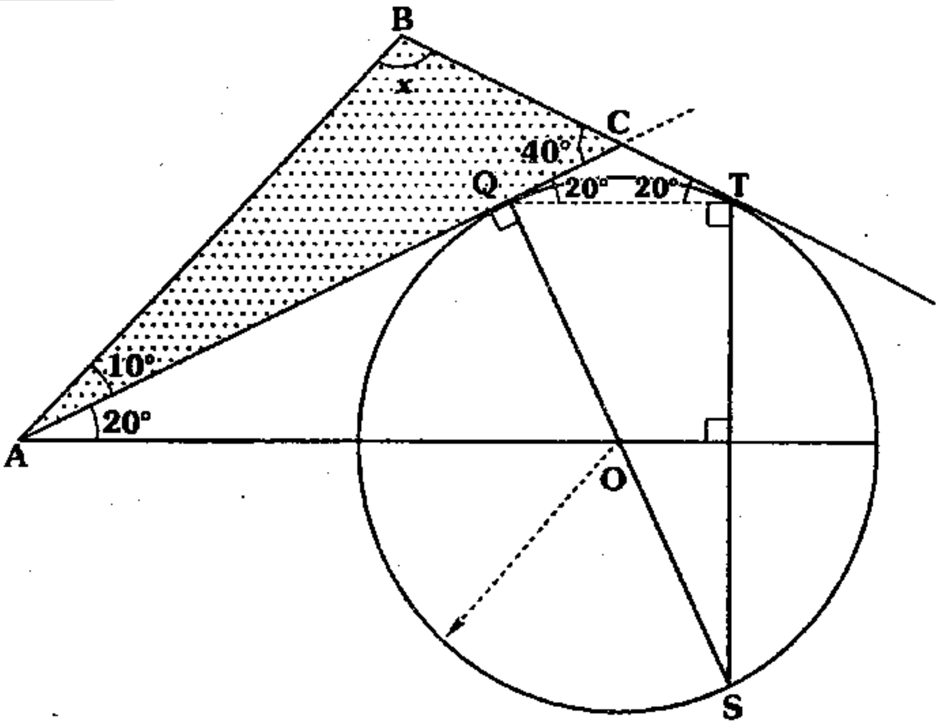
Piden "x".

- En $\mathscr{C}_1$: $m\measuredangle APQ = m\measuredangle BQP = \theta$
- En $\mathscr{C}_2$: $m\measuredangle SPT = m\measuredangle PTR = \alpha$
- Como $\alpha+\theta=100°$ $\Rightarrow$ en ΔRQT: $x+\underbrace{\alpha+\theta}_{100°}=180°$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=80°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 27



Nos piden "x".

- Por propiedad:

$$m\measuredangle OQA=90° \ \text{y} \ \ m\measuredangle QTS=90° \ \ \text{entonces} \ \ \overline{QT} \,//\, \overrightarrow{AO}$$

Luego: $m\measuredangle CQT = m\measuredangle QTC = 20°$

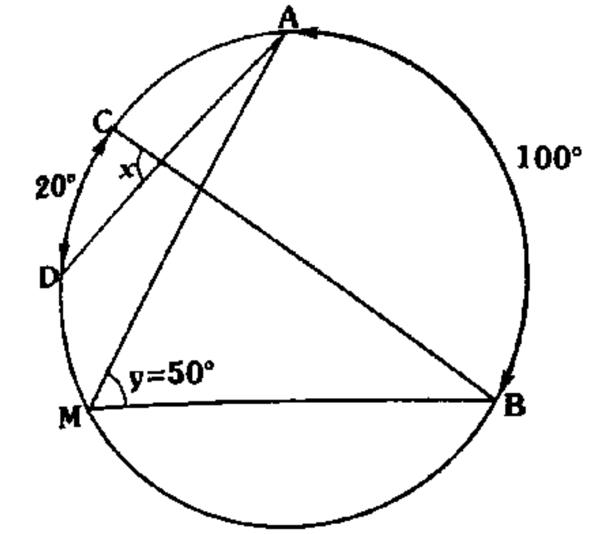
- En ΔABC:

$$x+10°+40°=180°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=130°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 28



Nos piden $x+y$

- Por ángulo inscrito:

$$y=50°$$

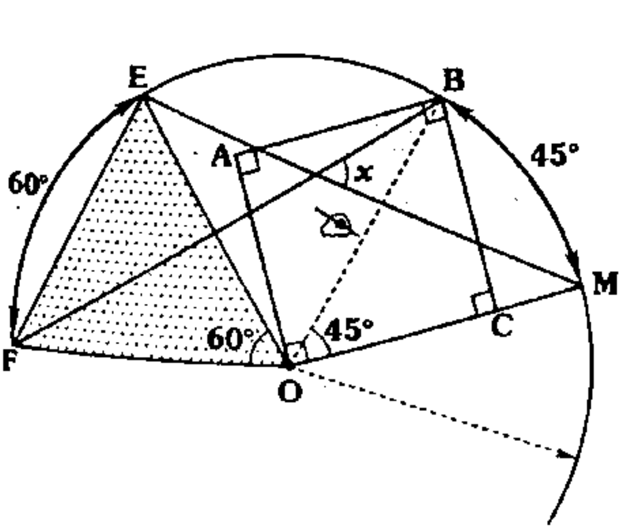
- Por ángulo interior:

$$x=\frac{100°+20°}{2}=60°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x+y=110°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 29



Piden "x".

- Como el ΔEOF es equilátero

$$\Rightarrow\quad m\widehat{EF}=60°$$

- Como OABC es un cuadrado

$$\Rightarrow\quad m\widehat{BM}=45°$$

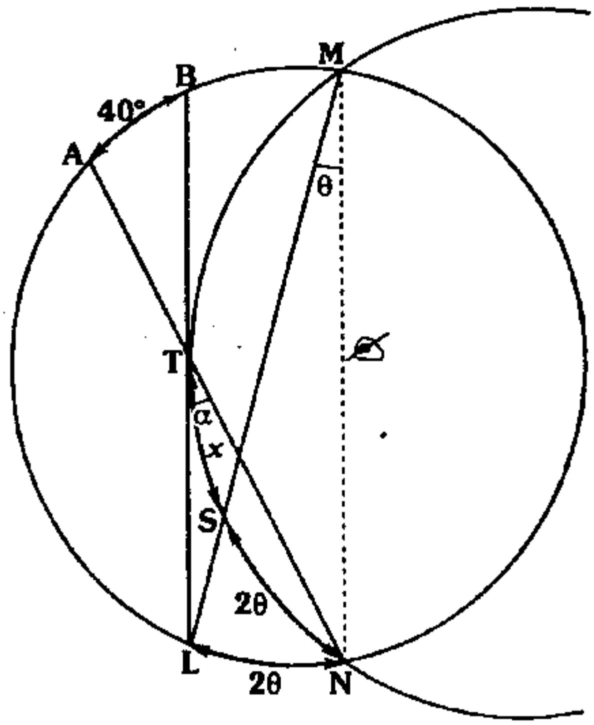
- Por ángulo interior:

$$x=\frac{60°+45°}{2}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=52{,}5°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 30



Nos piden $m\widehat{TS}$

- Sea $m\widehat{TS}=x$
- Sea: $m\measuredangle LMN=\theta$

$$\Rightarrow m\widehat{SN}=2\theta\quad y\quad m\widehat{LN}=2\theta$$

- Por ángulo interior: $\alpha=\dfrac{40°+2\theta}{2}$

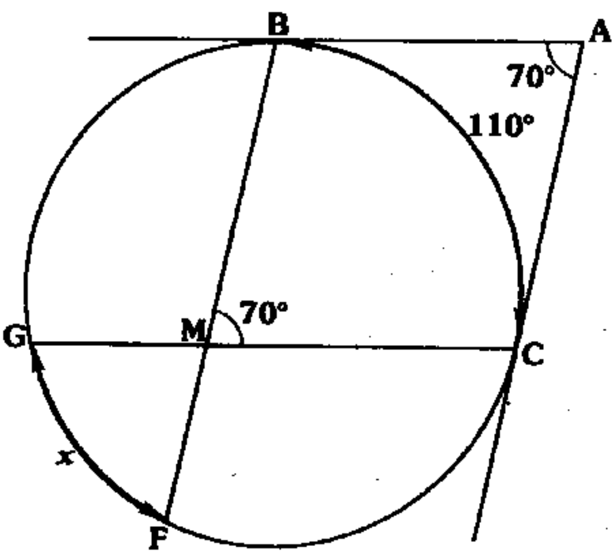
- Por ángulo semiinscrito: $\alpha=\dfrac{x+2\theta}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+2\theta}{2}=\frac{40°+2\theta}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=40°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 31



Nos piden "x".

- Como $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son tangentes entonces: $m\widehat{BC}=110°$
- MBAC: paralelogramo entonces:

$$m\measuredangle BMC=70°$$

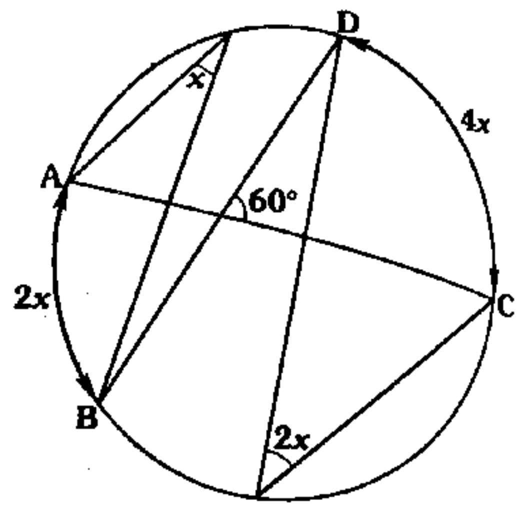
- Por ángulo interior:

$$70°=\frac{x+110°}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=30°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 32



Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AB}=2x \qquad y$$
$$m\widehat{CD}=4x$$

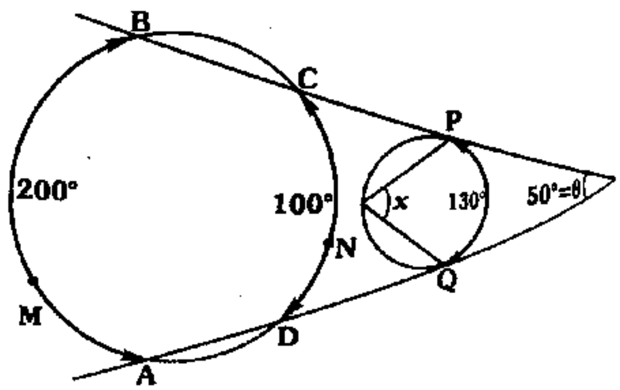
- Por ángulo interior:

$$60°=\frac{2x+4x}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=20°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 33



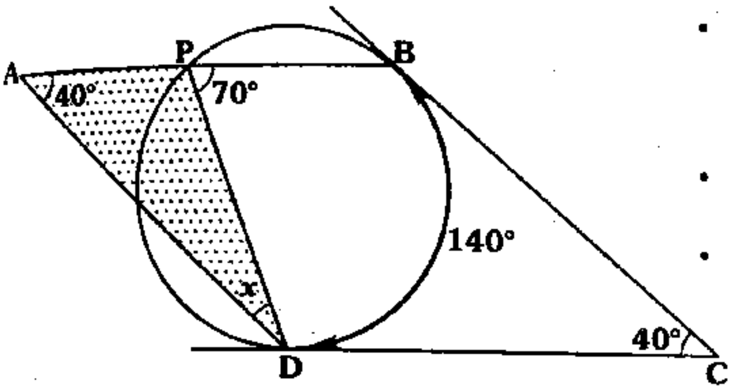
Piden "x".

- Por ángulo exterior: $\theta = \dfrac{200^\circ - 100^\circ}{2} = 50^\circ \quad \Rightarrow \quad m\widehat{PQ} = 130^\circ$

- Por ángulo inscrito: $x = \dfrac{130^\circ}{2} = 65^\circ$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 34



Nos piden "x".

- Como ABCD es un paralelogramo:

$$m\measuredangle DAB = m\measuredangle BCD = 40^\circ$$

- $m\widehat{BD} = 140^\circ \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle DPB = 70^\circ$

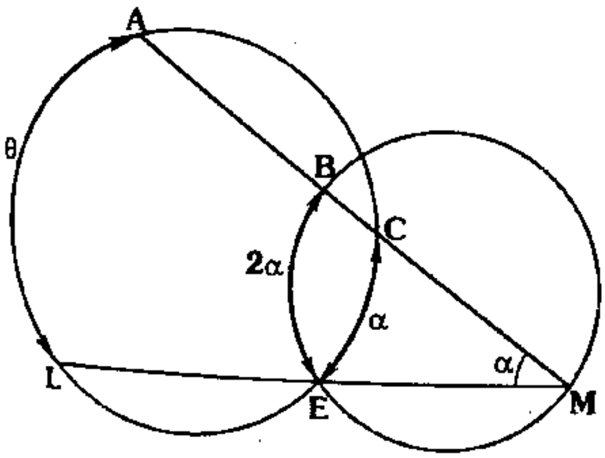
- En $\triangle APD$:

$$x + 40^\circ = 70^\circ$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 30^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 35



Nos piden $m\widehat{BE}$

- Dato: $m\widehat{BE} = 2\left(m\widehat{EC}\right)$ y

$$m\widehat{AL} + m\widehat{BE} + m\widehat{EC} = 240^\circ$$

- Sea $m\measuredangle EMB = \alpha \Rightarrow m\widehat{BE} = 2\alpha$

  del dato: $m\widehat{EC} = \alpha$

- Por ángulo exterior:

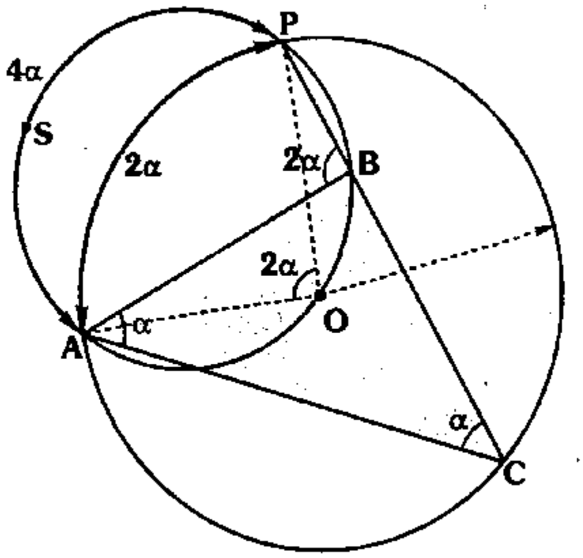
$$\frac{\theta - \alpha}{2} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \theta = 3\alpha$$

- Del segundo dato: $3\alpha + 2\alpha + \alpha = 240^\circ \quad \rightarrow \quad \alpha = 40^\circ$

$$\therefore \quad \mathbf{m\widehat{BE} = 80^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 36



Nos piden analizar que tipo de triángulo e ABC.

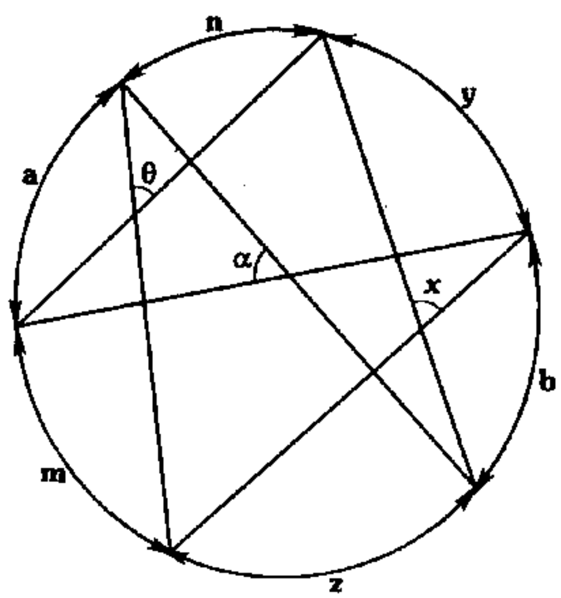
- Sea $m\sphericalangle ACB=\alpha \Rightarrow m\sphericalangle AOP=2\alpha$

  y $m\sphericalangle ABP=2\alpha \Rightarrow m\sphericalangle BAC=\alpha$

Es decir ABC es un triángulo isósceles.

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 37



Nos piden "x".

- Dato: $\alpha+\theta=100°$
- Por ángulo interior:

$$x=\frac{y+z}{2} \Rightarrow 2x=y+z$$

$$\alpha=\frac{a+b}{2} \Rightarrow 2\alpha=a+b$$

$$\theta=\frac{m+n}{2} \Rightarrow 2\theta=m+n$$

- Como:

$$\underbrace{y+z+a+b+m+n}_{2x+2\alpha+2\theta}=360°$$

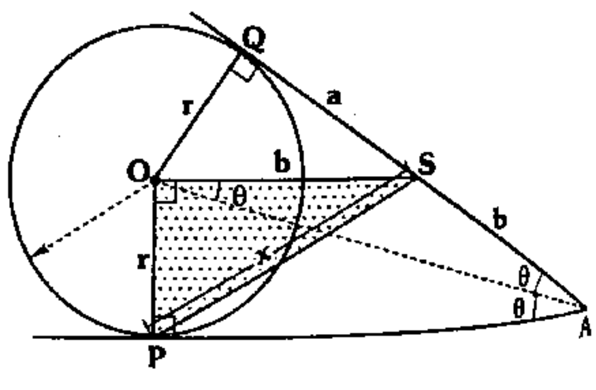
$$2x+2\alpha+2\theta=360°$$

$$\Rightarrow \quad x+\underbrace{\alpha+\theta}_{100}=180°$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x=80°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 38



Piden "x" en función de a y b.

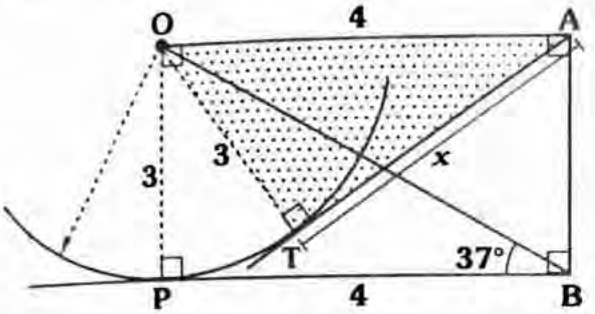
- Por propiedad $\overline{AO}$ es bisectriz del $\sphericalangle PAQ$
- ΔAOS : isósceles entonces $OS=SA=b$
- En ⊿SOP: $x^2=r^2+b^2$
- En ⊿OQS: $r^2+a^2=b^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + \not{y}^2 + a^2 = \not{y}^2 + 2b^2$

$\therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{2b^2 - a^2}}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 39



Nos piden "x".

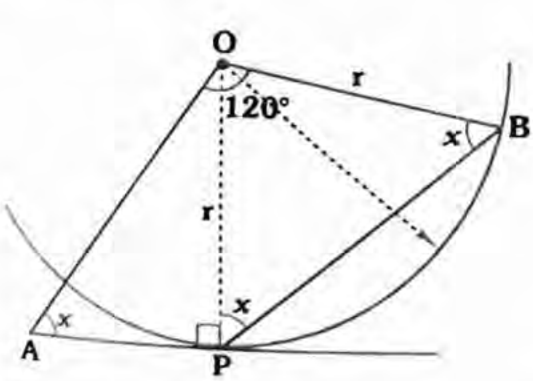
- Por propiedad $\overline{OP} \perp \overline{PD}$
- OPBA: rectángulo
- ⊿OTA: triángulo rectángulo

$\Rightarrow \quad x^2 + 3^2 = 4^2$

$\therefore \quad \mathbf{x = \sqrt{7}}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 40



- Nos piden "x".
- Por propiedad: $m\sphericalangle APO = 90°$
- En el ΔOPB : isósceles tendremos:

$m\sphericalangle OPB = m\sphericalangle PBO = x$

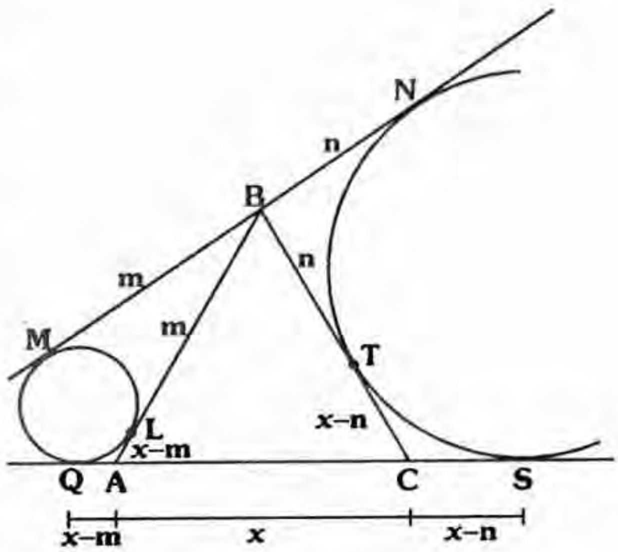
- En el ⌂AOBP:

$3x + 90° + 120° = 360°$

$\therefore \quad \mathbf{x = 50°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 41



Nos piden: $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{m+n}{x}$

- Sea :

  MB=m y BN=n ⇒ MN=m+n

- AB=x entonces:

  $AL = x - m = QA$ y

  $CT = x - n = CS$

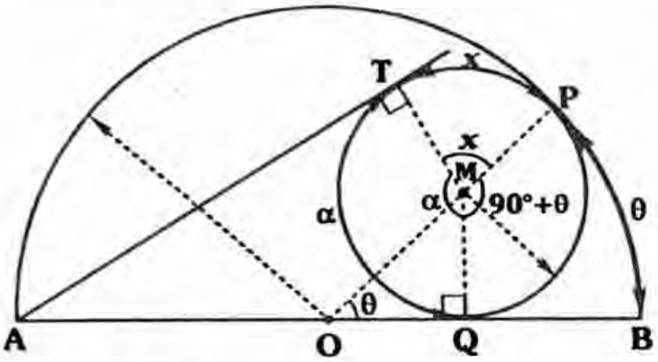
- Como QS=MN

$\Rightarrow \; 3x - m - n = m + n \Rightarrow 3x = 2(m+n)$

$\therefore \quad \mathbf{\dfrac{m+n}{x} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5}$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 42



Nos piden "x".

- Dato: $\alpha+\theta=200°$
- Por ángulo central:

$$m\measuredangle POB=\theta \quad \text{y}$$

$$m\measuredangle TMQ=\alpha$$

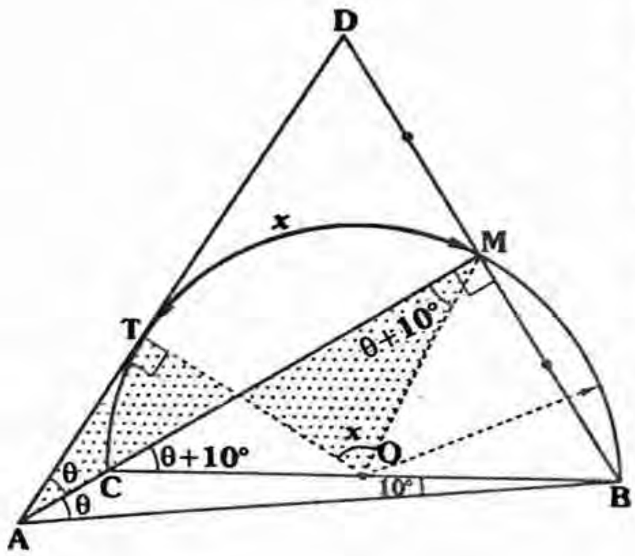
- En M:

$$x+\underbrace{\alpha+\theta}_{200}+90°=360°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=70°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 43



Piden "x".

- Por ángulo central $m\measuredangle MOT=x$
- Como BM=MD y $m\measuredangle CMB=90°$

$$\Rightarrow\quad ABD:\ \text{isósceles}$$

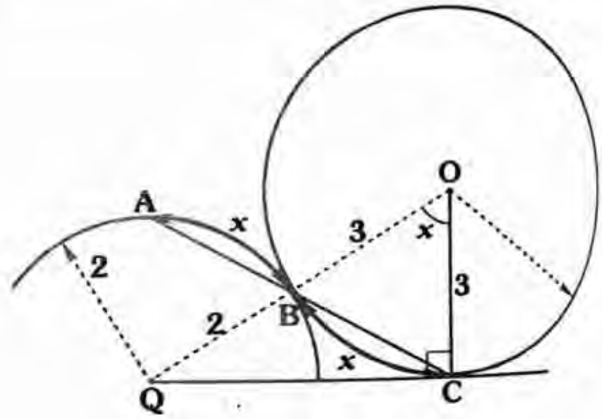
- ΔCOM: isósceles
- En la región sombreada:

$$x+\theta+10°=90°+\theta$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x=80°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN N° 44



Piden "x".

- Por propiedad:

$$m\widehat{AB}=m\widehat{BC}$$

- Por ángulo central:

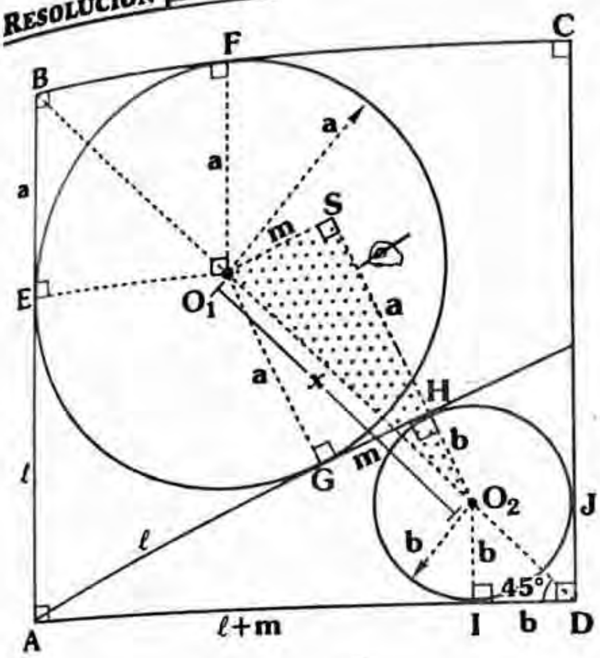
$$m\measuredangle BOC=x$$

- Q, B y O: colineales
- ⊿QCO: notable

$$\therefore\ \boldsymbol{x=53°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 45



Piden "x".

- Dato: $a^2+b^2=100$
- Sea: $AE=\ell \Rightarrow AB=\ell+a$
- Se forma el triángulo rectángulo O_1SO_2 sus catetos miden: "m" y "a+b".
- Por propiedad AH=AI entonces $AI=\ell+m$
- Como AB=AD

$$\Rightarrow \ell+a=\ell+m+b$$

$$\Rightarrow m=a-b$$

- En $⊿O_1SO_2$:

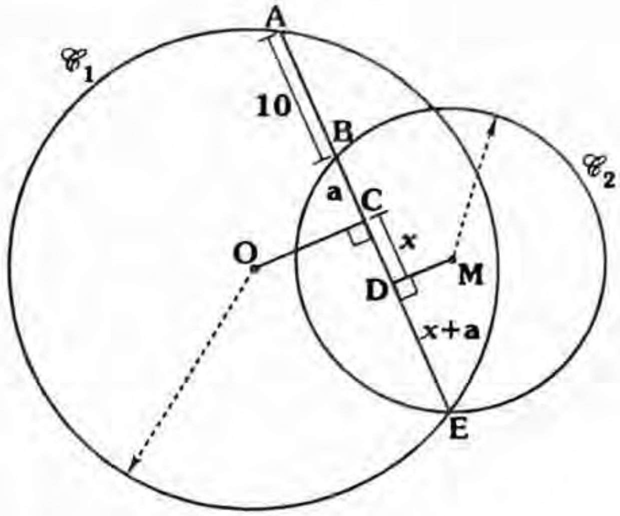
$$x^2=\underbrace{(a+b)^2+(a-b)^2}$$

$$x^2=2(a^2+b^2)=200$$

$$\therefore\ \mathbf{x=10\sqrt{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 46



Piden: "x".

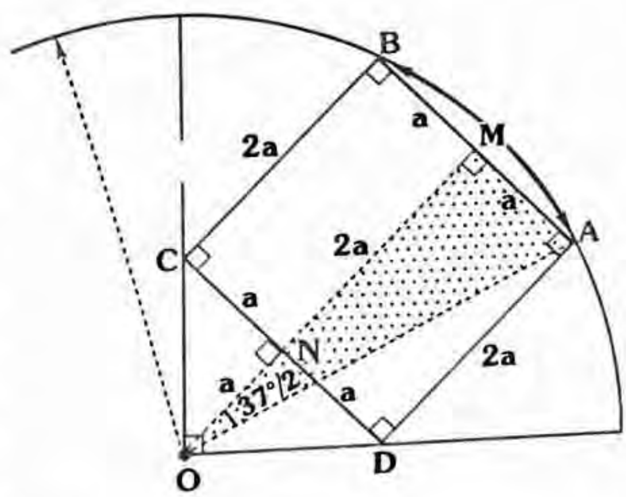
- En $\mathscr{C}_2$: BD=DE
- Sea BC=a $\Rightarrow$ DE=a+x
- En $\mathscr{C}_1$: AC=CE

$$\Rightarrow 10+\cancel{a}=2x+\cancel{a}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=5}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 47



Nos piden: "x".

- Se traza $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ (M en AB)

$\Rightarrow$ AM=MB=a $\Rightarrow$ CN=ND=a

- ⊿En ⊿DOC: como CN=ND=a

$\Rightarrow$ ON=a

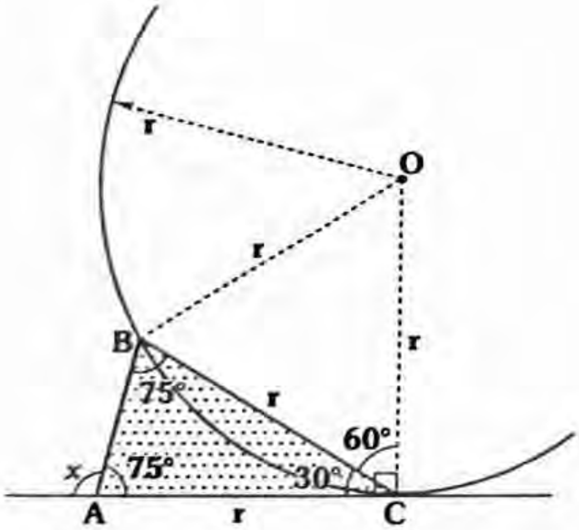
- ⊿OMA: notable:

$$\Rightarrow m\measuredangle MOA = \frac{37^\circ}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{AB} = 37^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 48



Nos piden "x".

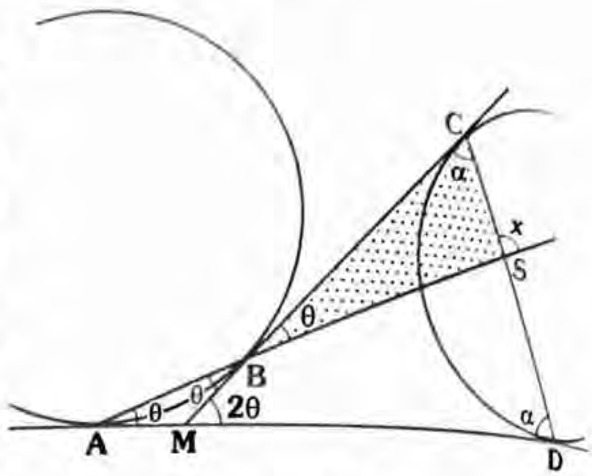
- $\overline{OC} \perp \overline{AC}$
- ΔOBC: equilátero
- ΔABC: isósceles

$\Rightarrow$ m∢BAC=75°

$$\therefore\ \mathbf{x = 105^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 49



- Por demostrar: $x = 90^\circ$
- Sea m∢MCD $= \alpha$ y m∢CBS $= \theta$

$\Rightarrow x = \alpha + \theta$; m∢MDC $= \alpha$ y

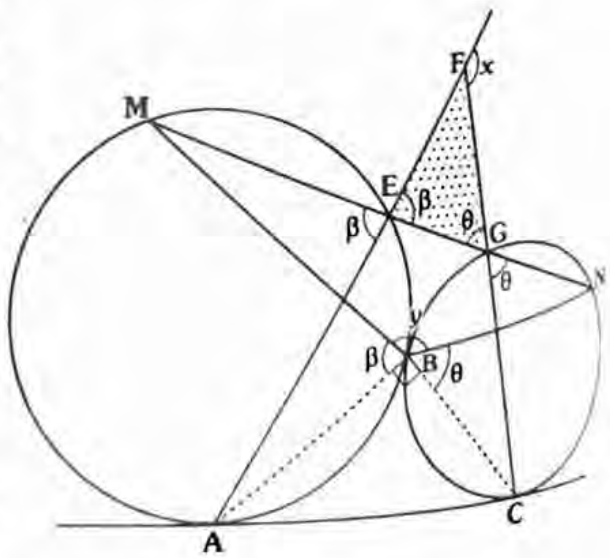
m∢BAM = m∢ABM $= \theta$

- En ΔAMB: m∢BMD $= 2\theta$
- En ΔMCD: $2\alpha + 2\theta = 180^\circ$

$\Rightarrow \alpha + \theta = 90^\circ$

$$\therefore\ \mathbf{x = 90^\circ}$$

RESOLUCIÓN Nº 50



Nos piden la relación entre "x" e "y".

- Por propiedad:

$$m\sphericalangle ABC = 90°$$

- Sea $m\sphericalangle ABM = \beta$ y $m\sphericalangle CBN = \theta$

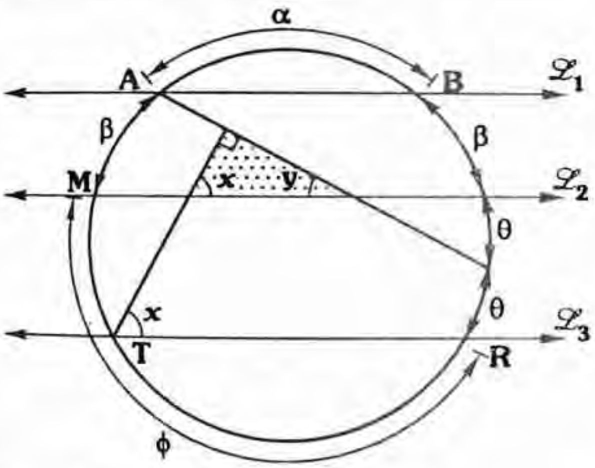
$$\Rightarrow m\sphericalangle AEM = \beta \text{ y } m\sphericalangle CBN = \theta$$

- En ΔEFG : $x + \theta + \beta$
- En B: $y + 90° + \underbrace{\beta + \theta}_{x} = 360°$

$$\therefore \ \mathbf{x + y = 270°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 51



Nos piden "x".

Dato: $\alpha + \phi = 160°$

- Observamos que:

$$x + y = 90°$$

- Como:

$$\alpha + \phi = 160° \Rightarrow 2\beta + 2\theta = 200°$$

$$\Rightarrow \beta + \theta = 100°$$

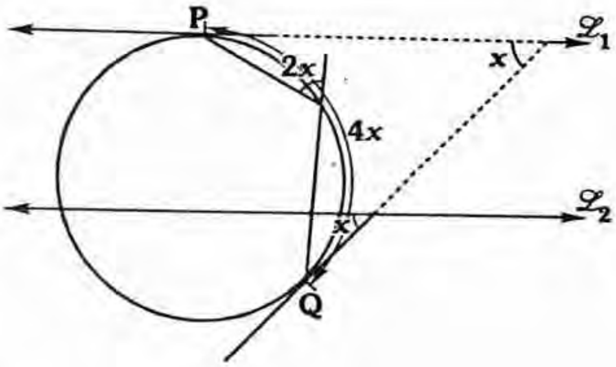
- Por ángulo interior:

$$y = \frac{\beta + \theta}{2} \Rightarrow y = 50°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 40°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 52



Nos piden "x".

- De la observación:

$$m\widehat{PQ} = 4x$$

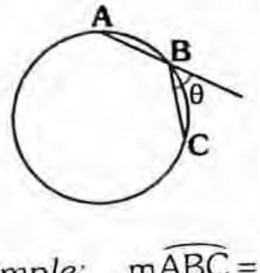
- Por propiedad:

$$x + 4x = 180°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 36°}$$

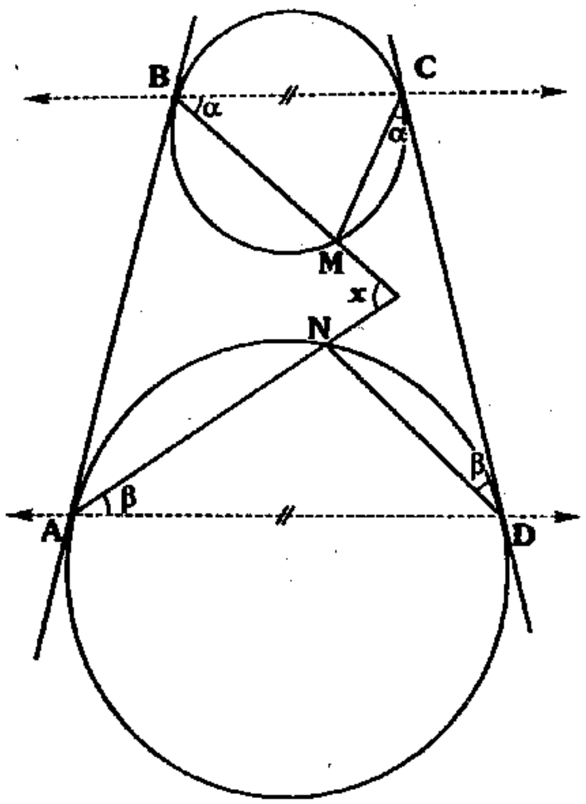
Clave C

Observación



Se cumple: $m\widehat{ABC} = 2\theta$

Resolución Nº 53



Nos piden "x".

Dato: $\alpha+\beta=86°$

- Por propiedad:

$$\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$$

- También:

$$m\measuredangle CBM = m\measuredangle MCD = \alpha \qquad y$$

$$m\measuredangle NAD = m\measuredangle NDC = \beta$$

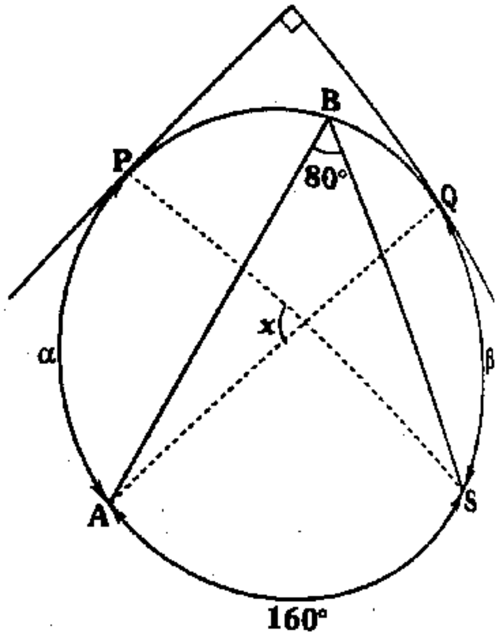
- Luego:

$$x = \alpha + \beta$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 86°}$$

Clave C

Resolución Nº 54



Nos piden "x".

- Como:

$$m\widehat{PQ} = 90° \qquad y$$

$$m\widehat{AB} = 160° \Rightarrow \alpha+\beta = 110°$$

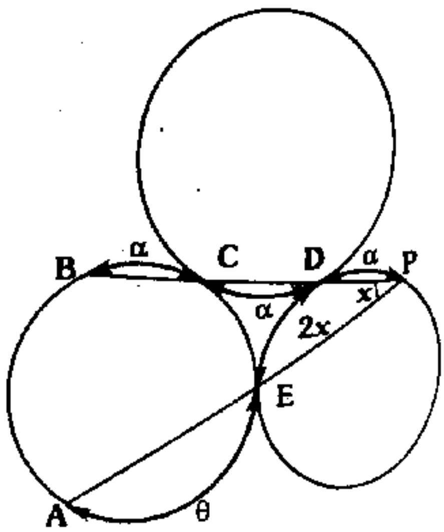
- Por ángulo interior:

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 55°}$$

Clave D

Resolución Nº 55



Nos piden "x".

Dato: $\theta-\alpha=40°$

- Por propiedad: $m\widehat{BC}=m\widehat{CD}=m\widehat{DP}=\alpha$

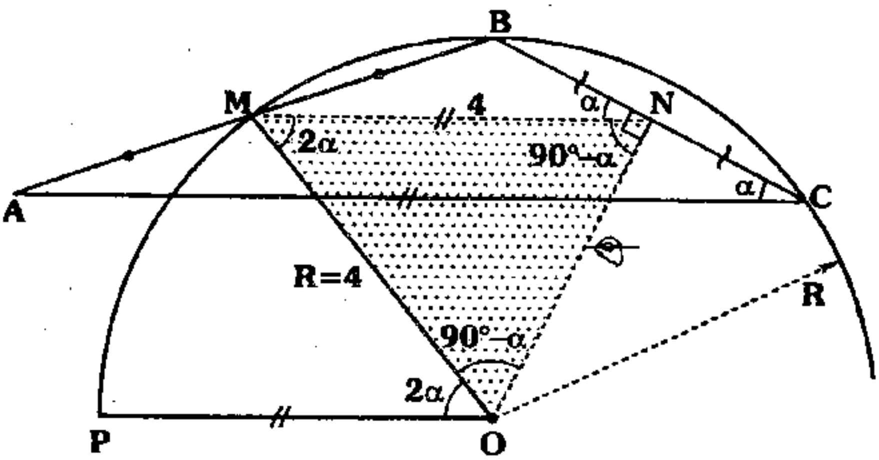
$$m\widehat{AE}=m\widehat{EDP}=\theta$$

- Por ángulo inscrito: $m\widehat{ED}=2x$
- Como $m\widehat{AE}=m\widehat{EDP} \Rightarrow \theta = \alpha+2x \Rightarrow \underbrace{\theta-\alpha}_{40°}=2x$

$$\therefore\ \mathbf{x=20°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 56



Nos piden: AC

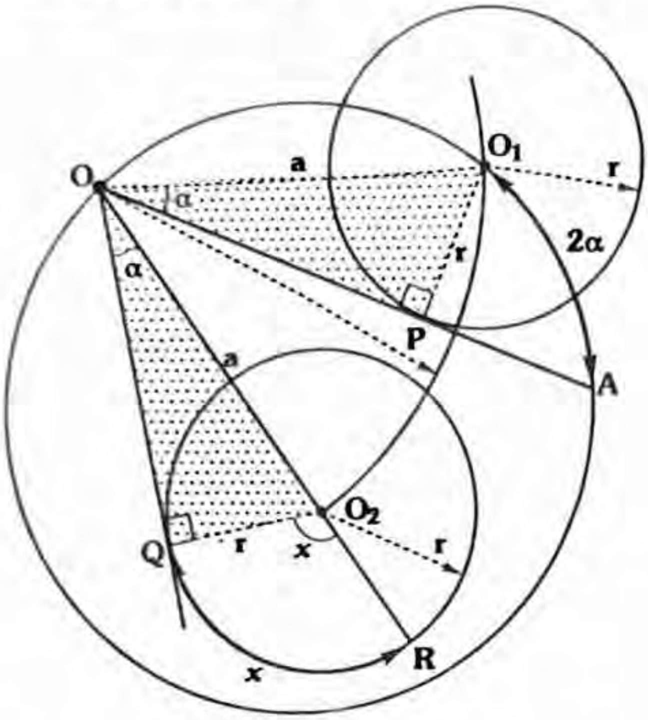
- Se traza $\overline{ON}\perp\overline{BC} \Rightarrow BN=NC$
- En el ΔABC, $\overline{MN}$ es base media entonces $AC=2(MN)$ y $\overline{MN}//\overline{AC}$, luego: $m\sphericalangle MNB=\alpha$ y $m\sphericalangle MNO=90-\alpha$ y $m\sphericalangle OMN=2\alpha$.
- ΔOMN: isósceles entonces:

$$OM=MN=4$$

$$\therefore\ \mathbf{AC=8}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 57



Nos piden "x".

- Propiedad:

$$m\sphericalangle OQQ_2 = m\sphericalangle OPO_1 = 90°$$

- Por ángulo inscrito:

$$m\sphericalangle O_1OA = \alpha$$

- Por ángulo central:

$$m\sphericalangle QO_2R = x$$

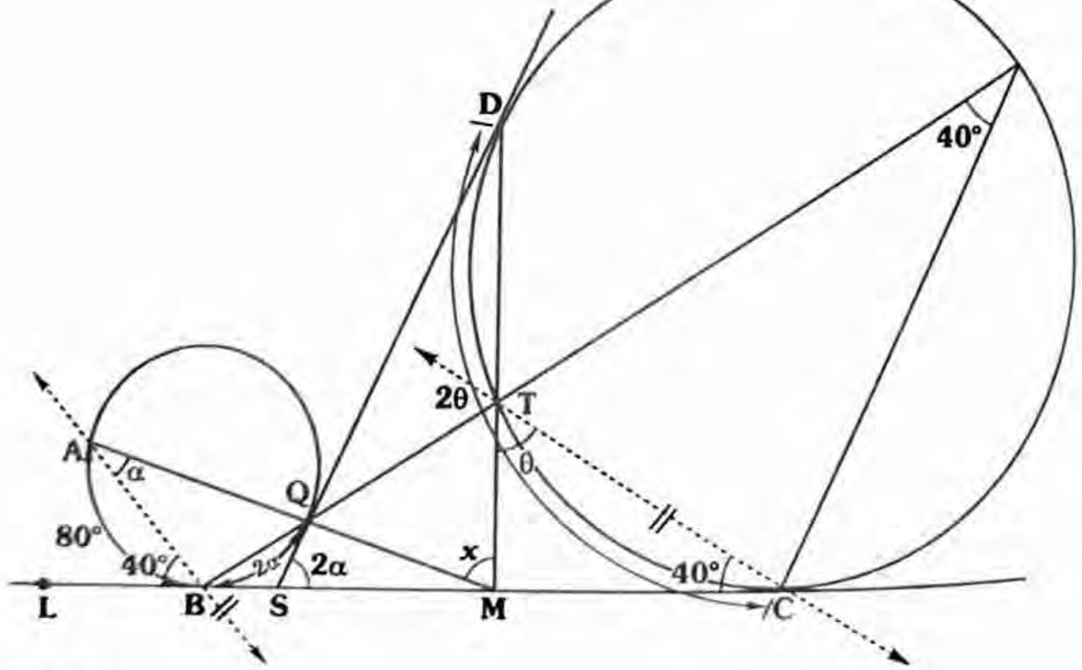
- $\triangle QOO_2 \cong \triangle POO_1$

$$\Rightarrow m\sphericalangle QOO_2 = \alpha$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 90° + \alpha}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 58



Nos piden "x".

- Como $m\overset{\frown}{AB} = 80°$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle LBA = 40°$ $\rightarrow$ $\overleftrightarrow{AS} \parallel \overline{TC}$
- Luego: $x = \alpha + \theta$

- Como: $m\measuredangle CTM = \theta \rightarrow m\widehat{DC} = 2\theta$
- Por propiedad:

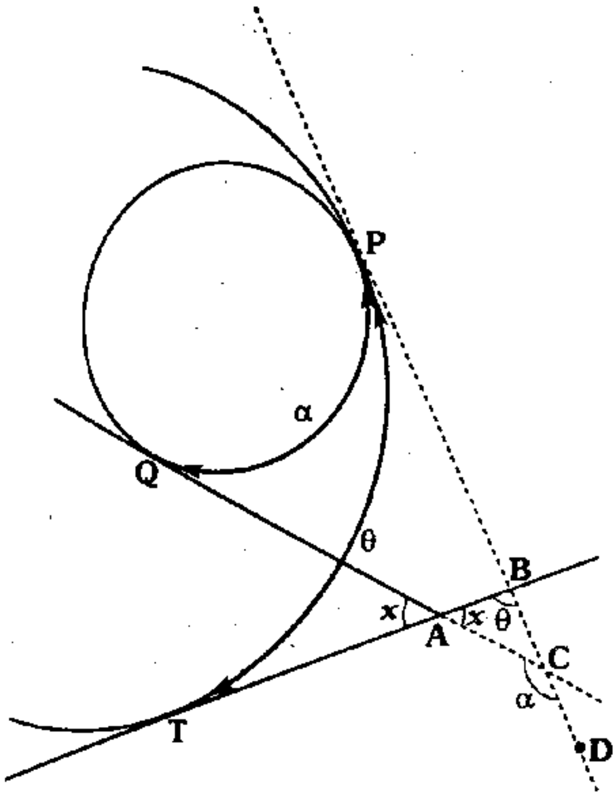
$$2\alpha + 2\theta = 180$$

$$\rightarrow \alpha + \theta = 90°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 90°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 59



Nos piden "x".

Dato: $\alpha - \theta = 40°$

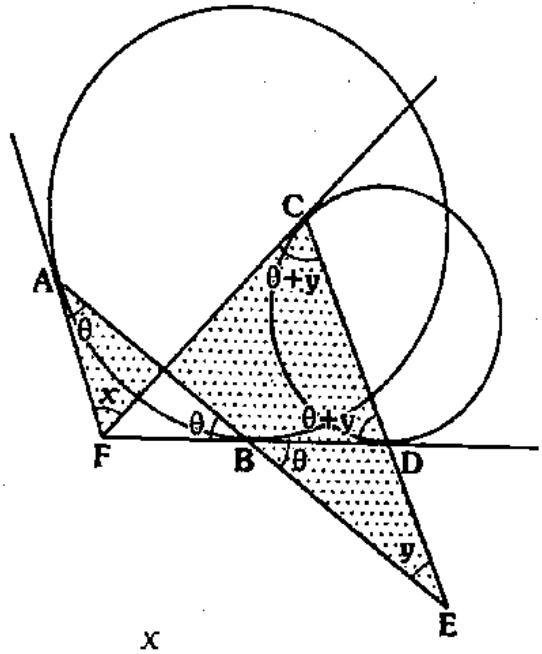
- Se traza la tangente en P.
- Por propiedad: $m\measuredangle CBT = \theta$ y $m\measuredangle ACD = \alpha$
- En ΔABC: $x + \theta = \alpha$

$$x = \alpha - \theta$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 40°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 60



Nos piden: $\dfrac{x}{y}$

- Sea: $m\measuredangle FAB = \theta \rightarrow m\measuredangle FBA = \theta$
- En ΔBDE: $m\measuredangle BDC = \theta + y$

$$\rightarrow m\measuredangle FCD = \theta + y$$

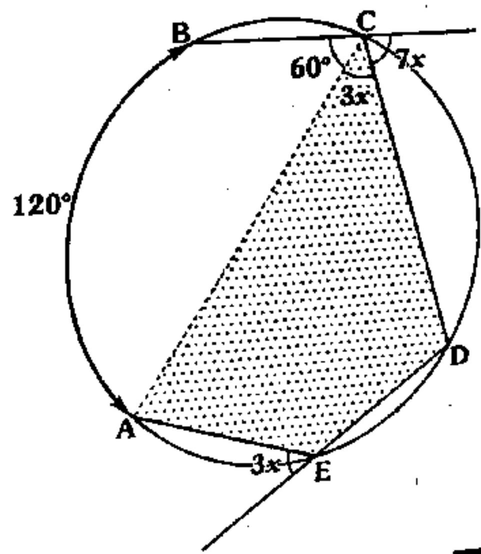
- En la región sombreada:

$$x + \not\theta = \not\theta + 2y$$

$$\therefore \ \mathbf{\frac{x}{y} = 2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 61



Piden "x".

- Se traza $\overline{AC} \Rightarrow \triangle ACDE$ es $\triangle$inscrito entonces:

$$m\sphericalangle ACD = 3x$$

- Como:

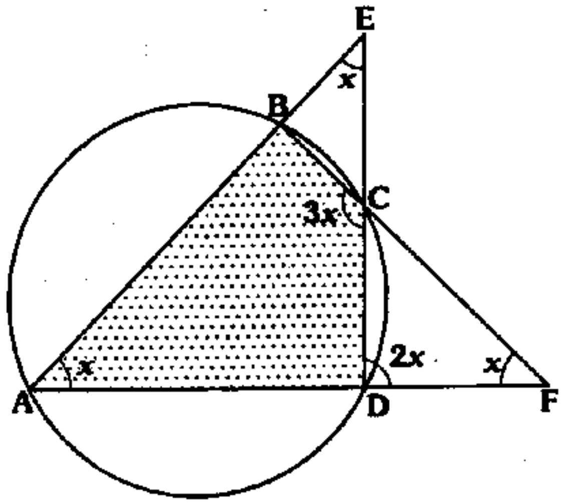
$$m\widehat{AB} = 120° \Rightarrow m\sphericalangle BCA = 60°$$

- Luego: $60° + 3x + 7x = 180°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 12°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 62



Nos piden "x".

- En ΔADE:

$$m\sphericalangle CDF = 2x$$

- En ΔCDF:

$$m\sphericalangle DCB = 3x$$

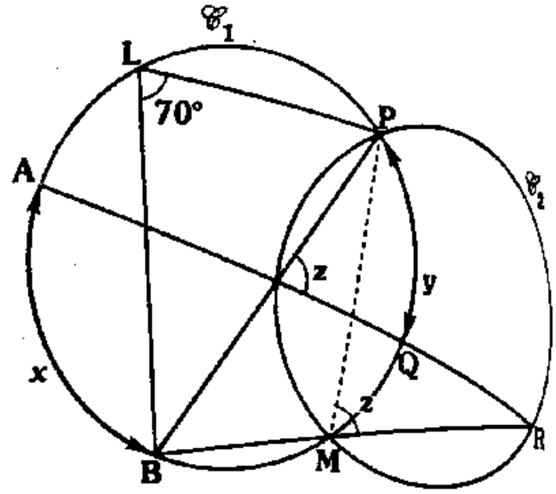
- En $\triangle ABCD$:

$$x + 3x = 180°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 45°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 63



Nos piden $x + y$

- Por ángulo interior:

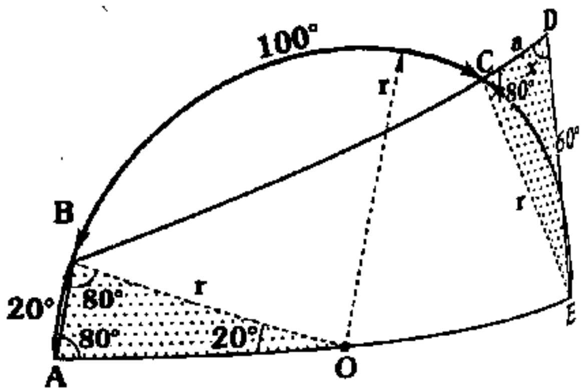
$$z = \frac{x+y}{2}$$

- En $\mathscr{C}_2$: Por ángulo inscrito $m\sphericalangle PMR$
- En $\triangle BLPM$: $\quad z = 70°$

$$\therefore \ \mathbf{x + y = 140°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 64



Piden "x".

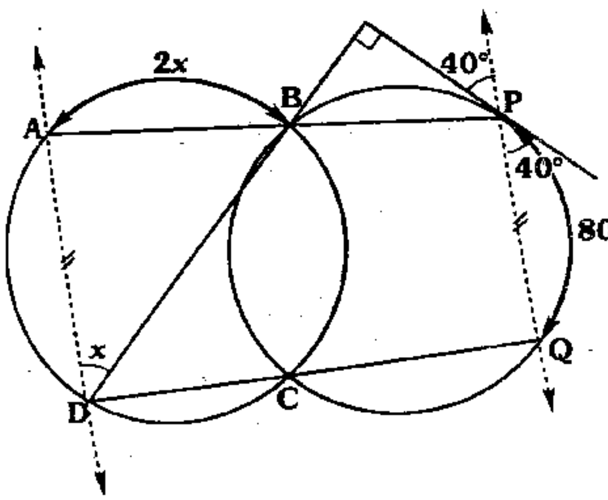
- Como $m\widehat{CE}=60°$ $\rightarrow$ $CE=r$
- ΔAOB: isósceles

  $\rightarrow$ $m\sphericalangle BAO=m\sphericalangle ABO=80°$
- $\square ABCE$: inscrito $\rightarrow$ $m\sphericalangle ECD=80°$
- $\Delta ABO \cong \Delta DCE$ (LAL)

$$\therefore\ \mathbf{x=80°}$$

Clave C

Resolución Nº 65



Nos piden $m\widehat{AB}$.

- Sea:

$$m\sphericalangle ADB=x \ \rightarrow\ m\widehat{AB}=2x$$

- Por propiedad: $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{PQ}$

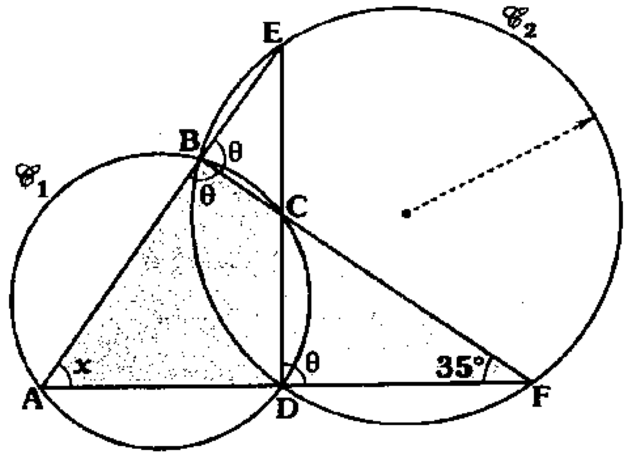
$$\Rightarrow\ x+40°=90°$$

$$\Rightarrow\ x=50°$$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{AB}=100°}$$

Clave E

Resolución Nº 66



Piden "x".

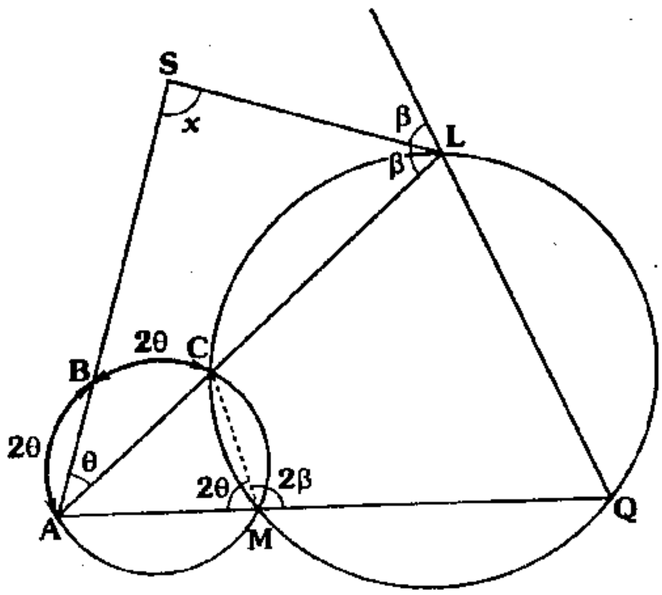
- Sea $m\sphericalangle EDF=\theta$, en $\mathscr{C}_2$: $m\sphericalangle EBF=\theta$
- En $\square ABCD$: $m\sphericalangle ABC=\theta$
- En B: $\theta+\theta=180°$

  $\rightarrow\ \theta=90°$
- En ΔABF: $x+35°=90°$

$$\therefore\ \mathbf{x=55°}$$

Clave B

Resolución Nº 67



Nos piden "x".

- En ΔALS : $x+\theta+\beta=180°$
- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AB}=m\widehat{BC}=2\theta$$

$$m\measuredangle AMC=2\theta$$

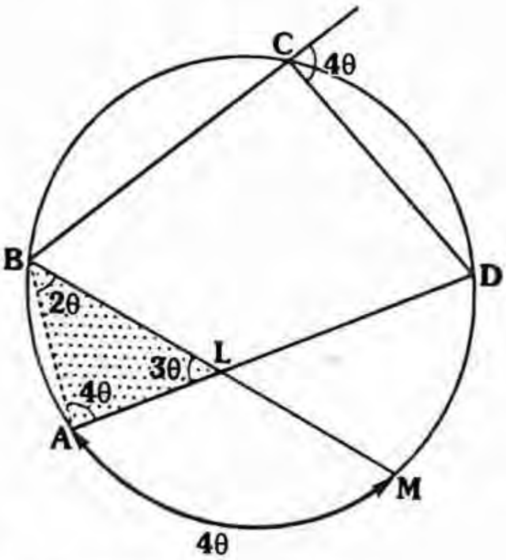
- En ⌂MCLQ: $m\measuredangle CMQ=2\beta$
- En M: $2\theta+2\beta=180°$

$$\rightarrow \theta+\beta=90°$$

$$\therefore \ \mathbf{x=90°}$$

Clave B

Resolución Nº 68



Nos piden "θ".

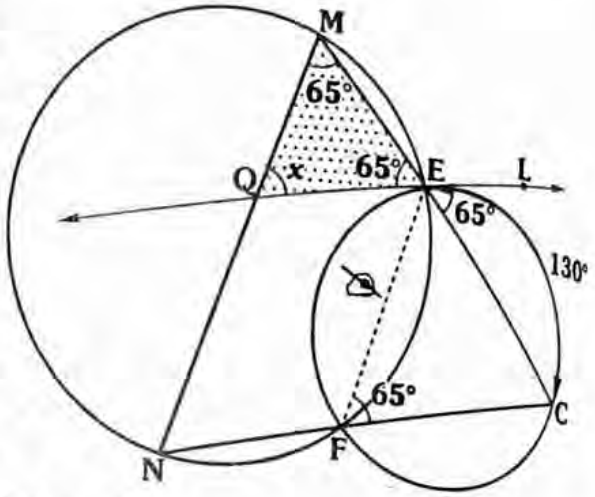
- Como $m\widehat{AM}=4\theta \rightarrow m\measuredangle ABM=2\theta$
- En ⌂ABCD: $m\measuredangle BAD=4\theta$
- En ΔABL:

$$2\theta+3\theta+4\theta=180°$$

$$\therefore \ \theta=\mathbf{20°}$$

Clave E

Resolución Nº 69



Piden "x".

Dato: $m\widehat{EFC}=230° \rightarrow m\widehat{EC}=130°$

- Por ángulo semiinscrito: $m\measuredangle LEC=65°$
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle EFC=65°$
- En el ⌂NMEF: inscrito

$$\rightarrow m\measuredangle NME=65°$$

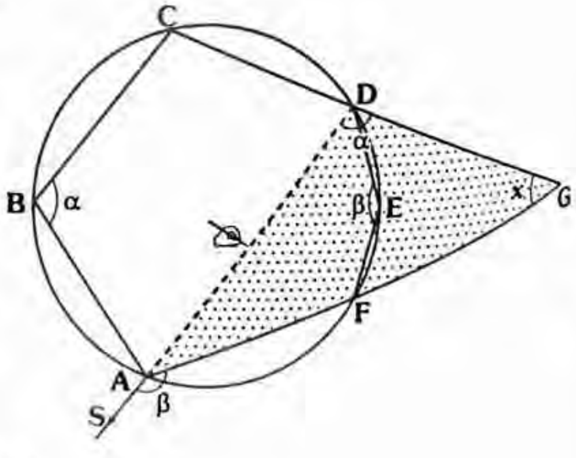
- En ΔQME:

$$x+65°+65°=180°$$

$$\therefore \ \mathbf{x=50°}$$

Clave E

Resolución Nº 70



Piden "x".

Dato: $\beta-\alpha=40^\circ$

- $\triangle$ABCD y $\triangle$ADEF: inscritos

  $\rightarrow$ $m\measuredangle ADG=\alpha$ y $m\measuredangle SAF=\beta$

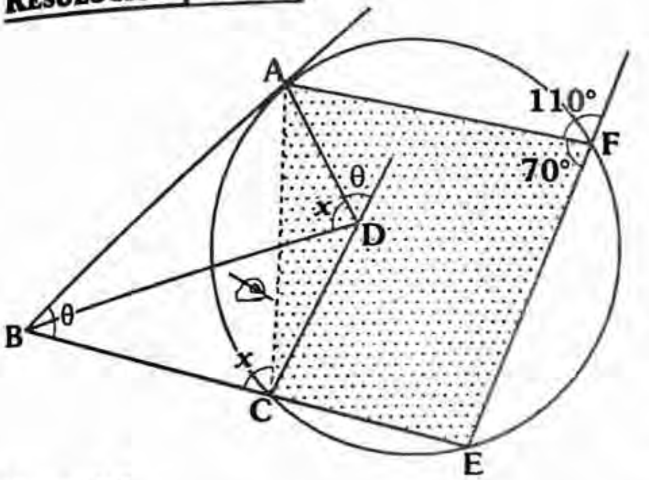
- En ΔADG: $x+\alpha=\beta$

  $x=\beta-\alpha$

$\therefore$ $\mathbf{x=40^\circ}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 71



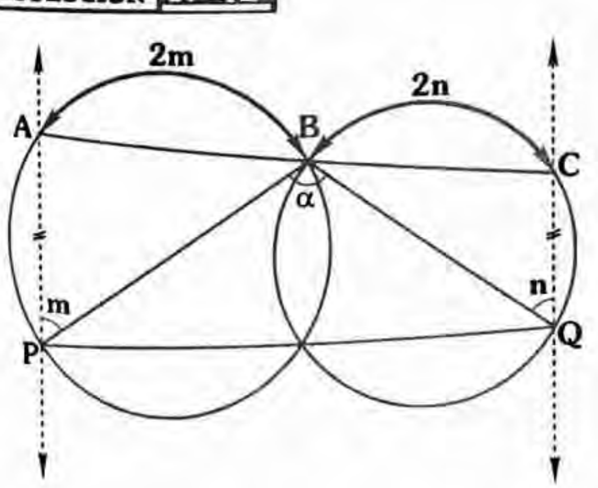
Piden "x".

- Notemos que el $\triangle$ABCD es inscriptible entonces $m\measuredangle ACB=x$.
- $\triangle$AFEC: inscrito:

$\therefore$ $\mathbf{x=70^\circ}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 72



Piden "α".

Dato: $m\widehat{AB}+m\widehat{BC}=210^\circ$

- Por propiedad: $\overleftrightarrow{AP}//\overleftrightarrow{CQ}$

  $\Rightarrow$ $\alpha=m+n$

- Del dato:

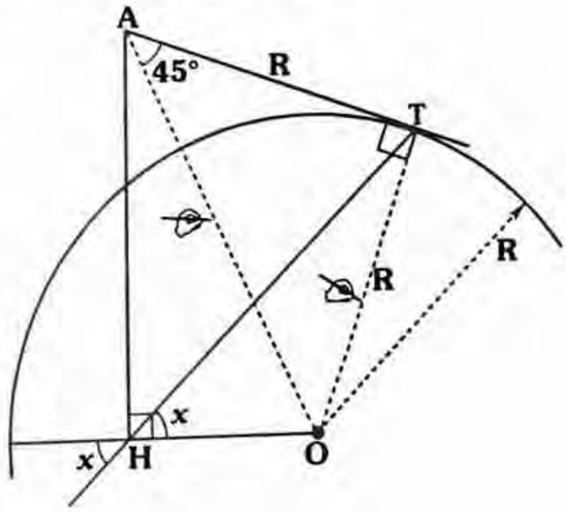
  $2m+2n=210^\circ$

  $\Rightarrow$ $m+n=105^\circ$

$\therefore$ $\mathbf{\alpha=105^\circ}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 73



Nos piden "x".

- Como:

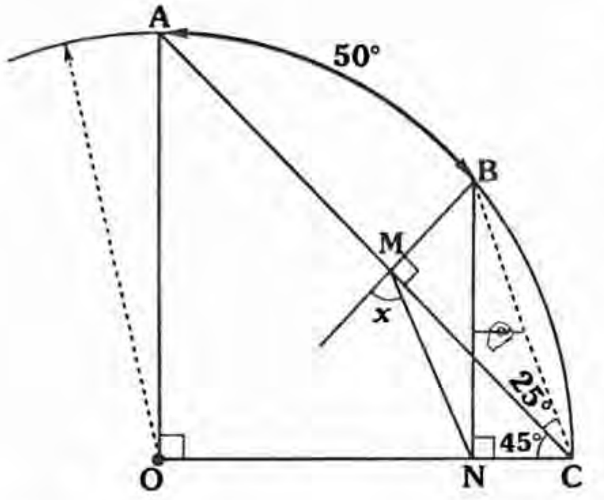
  $OT=TA$ $\rightarrow$ $m\measuredangle OAT=45^\circ$

- $\triangle$OHAT: inscriptible

$\therefore$ $\mathbf{x=45^\circ}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 74



Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito:

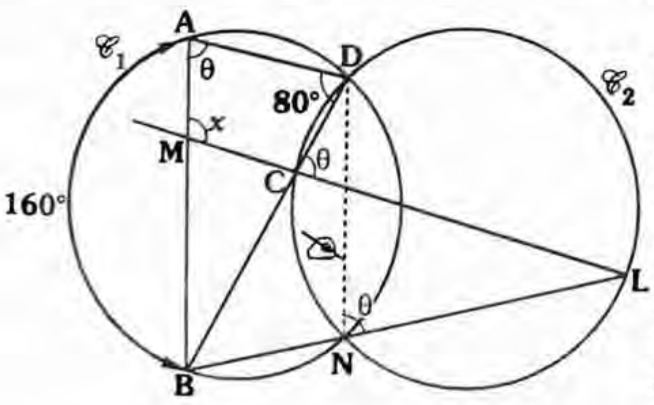
$$m\sphericalangle ACB = 25°$$

- ⌂NMBC: inscriptible

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 70°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 75



Nos piden "x".

- Sea $m\sphericalangle DAM = \theta$ entonces en el ⌂ABCD: inscrito

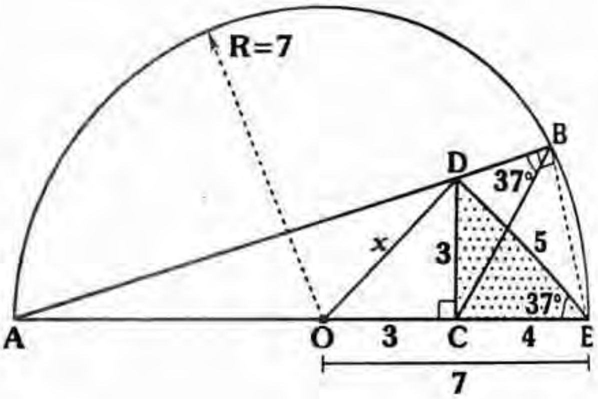
$$\Rightarrow\ m\sphericalangle DCL = \theta$$

- En $\mathscr{C}_2$: $m\sphericalangle DNL = \theta$
- En $\mathscr{C}_1$: $m\sphericalangle ADN = 80°$
- ⌂MADN: inscriptible

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 100°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 76



Nos piden "x".

- Por propiedad: $m\sphericalangle ABE = 90°$ entonces ⌂CDBE es inscriptible

$$\Rightarrow\ m\sphericalangle DEC = 37°$$

- ◿CDE: notable

$$\Rightarrow\ EC = 4\ \text{ y }$$
$$DC = 3$$

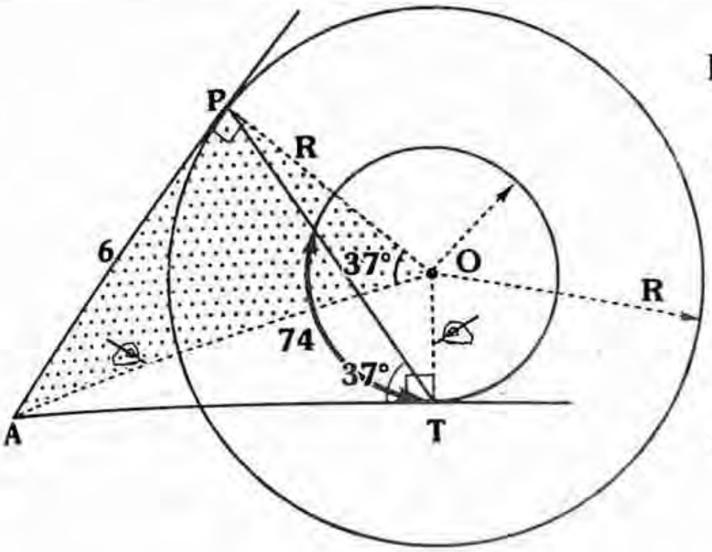
- En ◿OCD:

$$OC = 3\ \text{ y }\ CD = 3$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 3\sqrt{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 77



Piden R.

- Notamos que el cuadrilátero OTAP es inscriptible

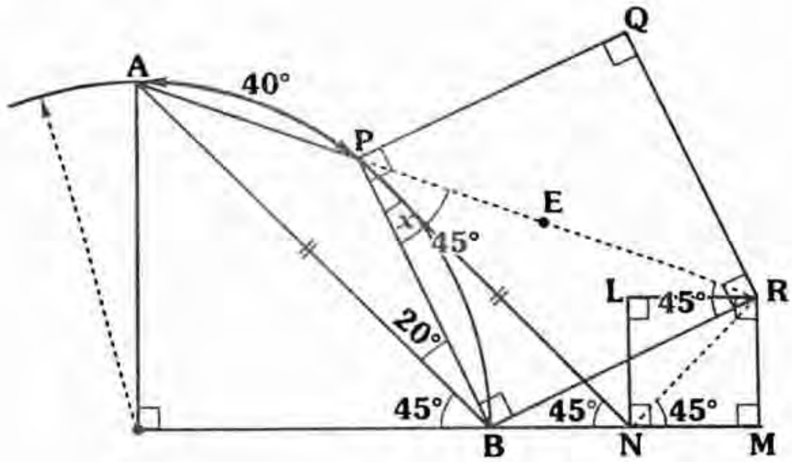
$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle AOP=37°$$

- ⊿APO: notable

$$\mathbf{R=8}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 78



Piden "x".

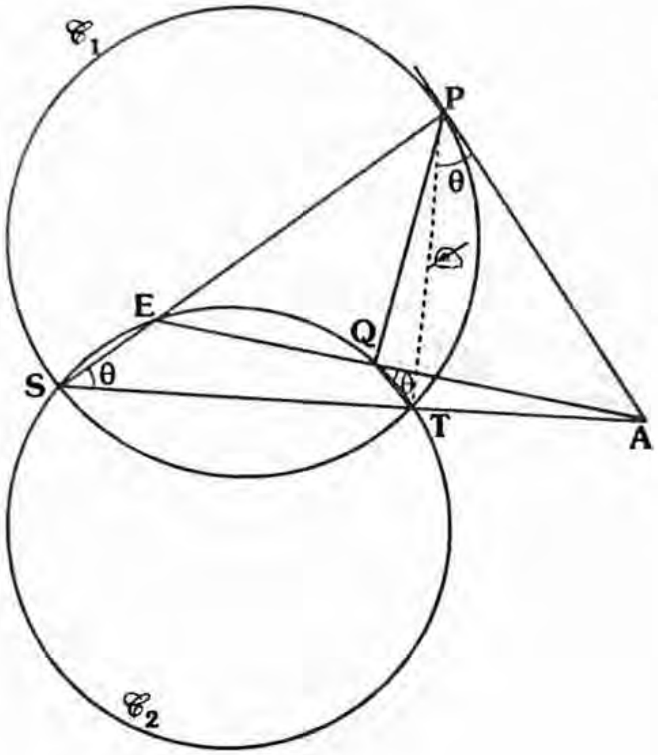
- Como $m\sphericalangle BPE=45°$ entonces al prolongar $\overline{PE}$ llegará a "R", pues BPQR es cuadrado.
- ◺BPRN: inscriptible $\Rightarrow$ $m\sphericalangle BNP=45°$
- Luego: $\overline{AB}//\overline{PN}$

$$\therefore \quad x=20°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 79

Por demostrar: ⌂TQPA es inscriptible



- Se traza $\overline{PT}$, sea $m\measuredangle EST=\theta$, en $\mathscr{C}_2$ el ⌂SEQT es inscrito.

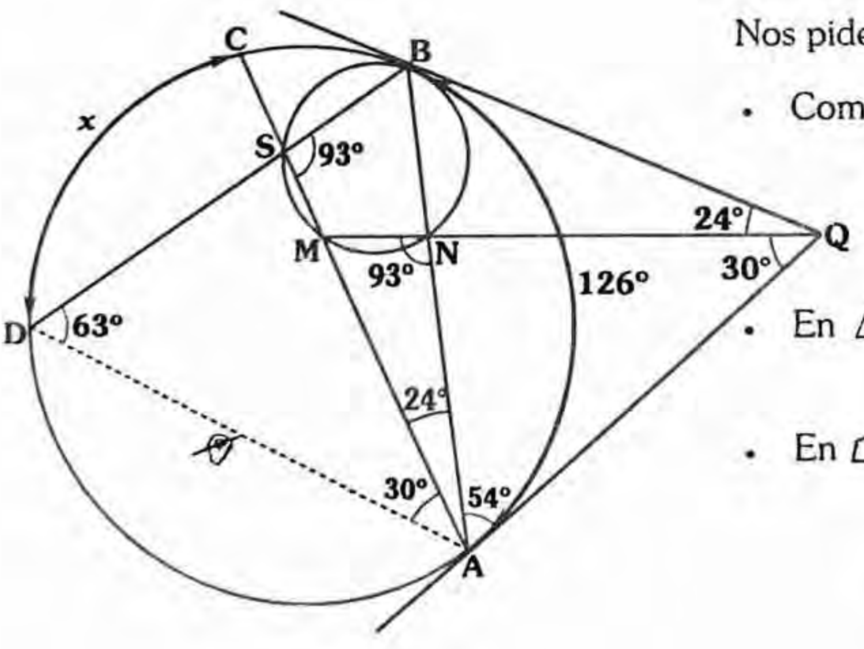
$$\Rightarrow\ m\measuredangle TQA=\theta$$

- En $\mathscr{C}_1$, por ángulo inscrito: $m\widehat{PT}=2\theta$ y por ángulo semiinscrito: $m\measuredangle TPA=\theta$
- Como:

$$m\measuredangle TQA=m\measuredangle TPA=\theta$$

$\therefore$ **⌂TQPA es inscriptible**

RESOLUCIÓN Nº 80



Nos piden "x".

- Como $m\widehat{AB}+54°=180°$

$$\rightarrow\ m\widehat{AB}=126°$$

$$\rightarrow\ m\measuredangle BDA=63°$$

- En ΔANQ:

$$m\measuredangle ANM=93°$$

- En ⌂NMSB:

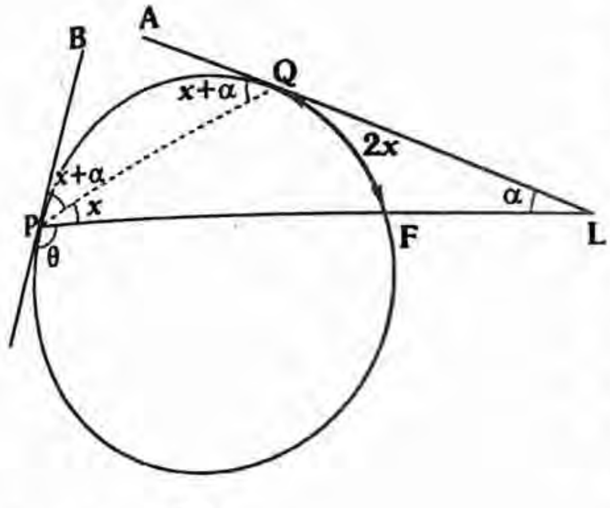
$$m\measuredangle MSB=93°$$

$$\rightarrow\ m\measuredangle SAD=30°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=60°}$$

Clave C

Resolución Nº 81



Nos piden $m\widehat{QF}$

Dato: $\alpha+\theta=150°$

- Sea $m\widehat{QF}=2x \;\Rightarrow\; m\measuredangle QPF=x$
- En ΔPQL: $m\measuredangle AQP=x+\alpha$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BPQ=x+\alpha$$

- En P: $2x+\underbrace{\alpha+\theta}_{150°}=180°$

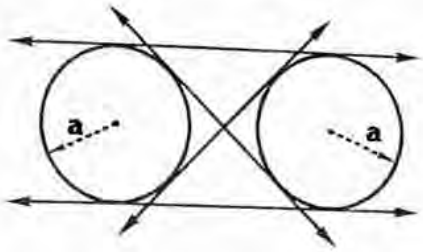
$$\Rightarrow \quad \underbrace{2x}=30°$$

$$\therefore \quad \mathbf{m\widehat{QF}=30°}$$

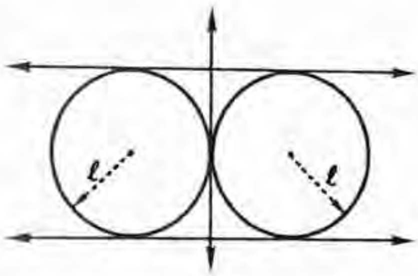
Clave C

Resolución Nº 82

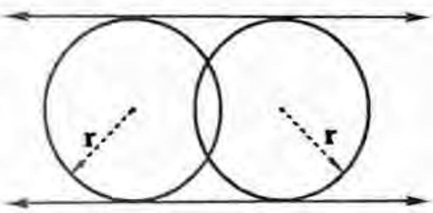
Veamos todas las posibilidades que tienen dos circunferencias congruentes en un plano, asi como las tangentes comunes que se pueden trazar:



Hay cuatro rectas tangentes comunes



Hay tres rectas tangentes comunes

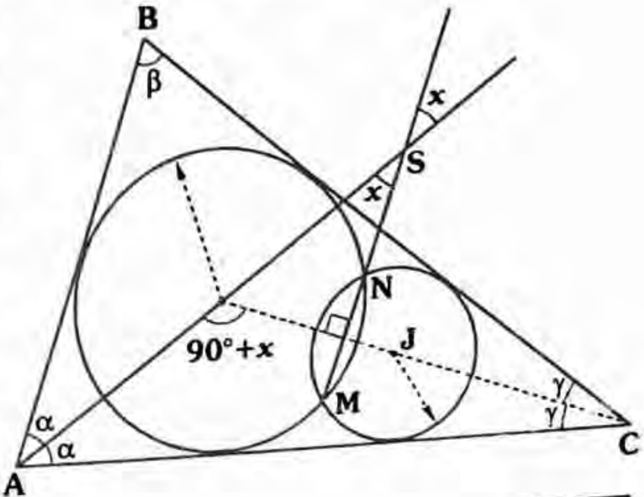


Hay dos rectas tangentes comunes

Se puede afirmar: no se puede trazar **una** tangente común.

Clave A

Resolución Nº 83



Nos piden "x".

- Por propiedad: $\overline{MN} \perp \overline{IJ}$ y

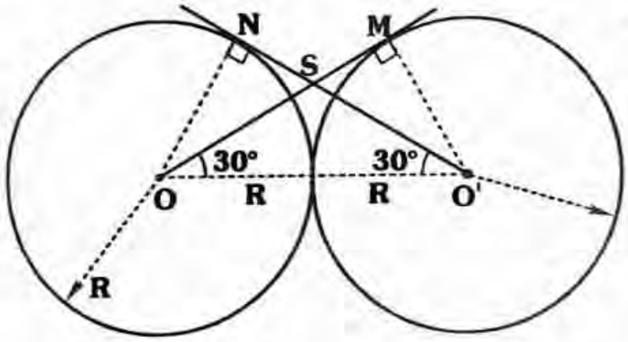
$$\underbrace{m\measuredangle AIC} = 90° + \frac{m\measuredangle ABC}{2}$$

$$90° + x = 90° + \frac{\beta}{2}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = \frac{\beta}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 84



- $\triangle$OMO' y $\triangle$ONO': notables de 30°
- Por dato, el mayor ángulo entre las rectas tangentes es 5x.

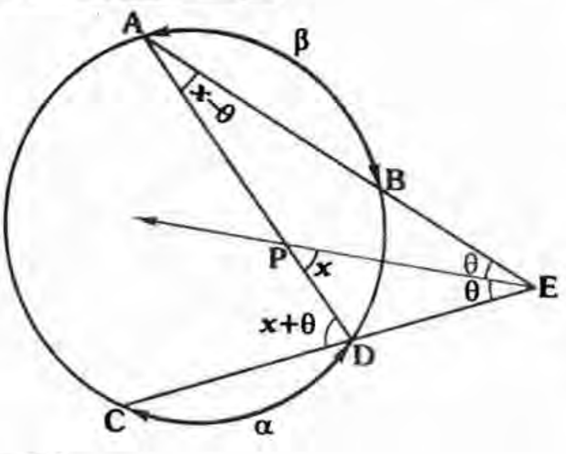
$$\Rightarrow \quad \underbrace{m\measuredangle OSO'} = 5x$$

$$120° = 5x$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 24°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 85



Nos piden "x".

- Por dato: $\alpha + \beta = 120°$
- En los triángulos AEP y PED:

$$m\measuredangle EAP = x - \theta \quad y \quad m\measuredangle ADC = x + \theta$$

$$\Rightarrow \ m\overset{\frown}{BD} = 2x - 2\theta \quad y \quad m\overset{\frown}{AC} = 2x + 2\theta$$

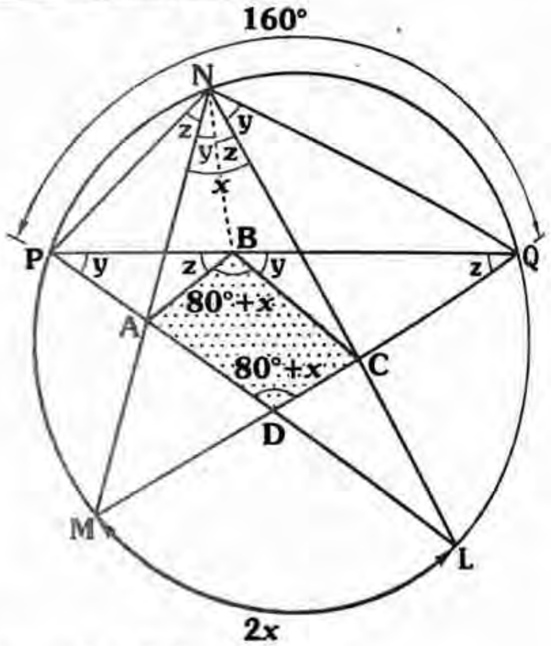
- En la circunferencia:

$$2x + \cancel{2\theta} + 2x - \cancel{2\theta} + \underbrace{\alpha + \beta}_{120°} = 360°$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 60°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 86



Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito: $m\overset{\frown}{ML} = 2x$
- Por ángulo interior: $m\measuredangle PDQ = 80° + x$
- Notemos que los cuadriláteros NPAB y NBCQ son inscriptibles entonces:

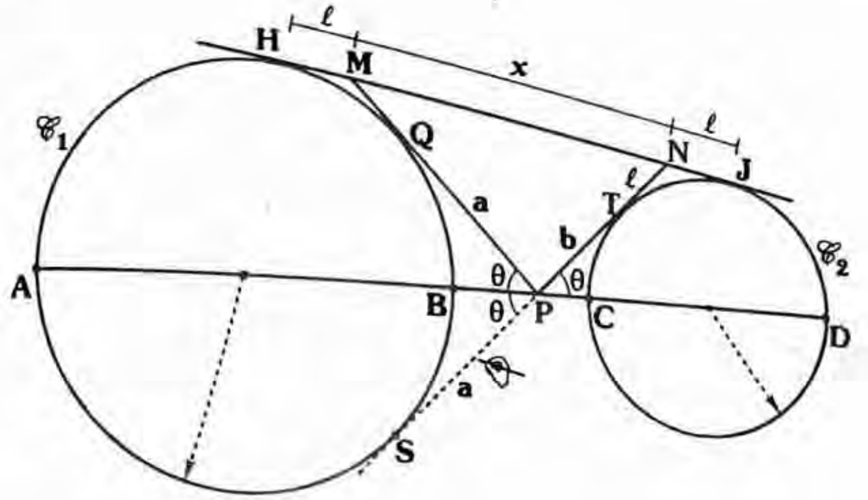
$$y + z = x$$

- En B: $80° + x + \underbrace{y + z}_{x} = 180°$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 50°}$$

Clave A

Resolución N° 87



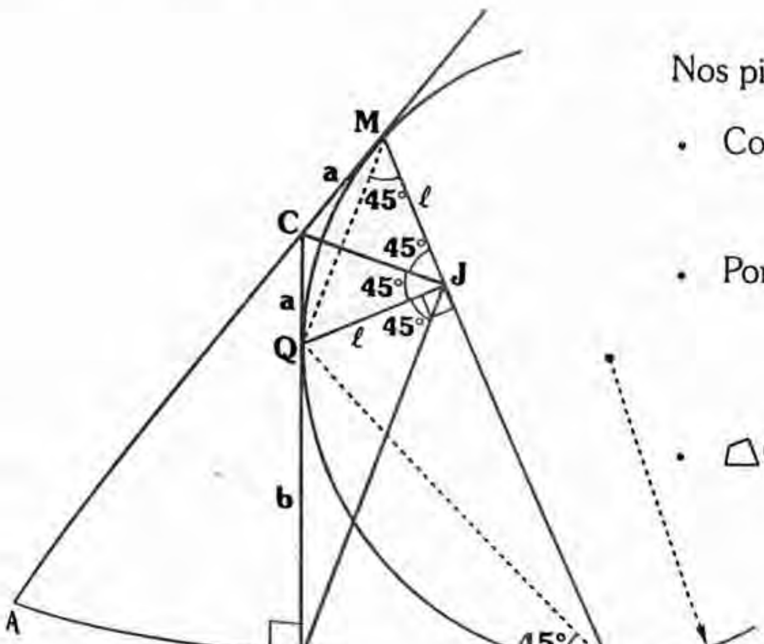
Piden "x" en función de "a" y "b".

- La prolongación de $\overline{TP}$ es tangente a $\mathscr{C}_2$ en S entonces PQ=PS=a.
- Como $NT=NJ=\ell$ y NH=NS $\Rightarrow$ $x+\ell=\ell+b+a$

$$\therefore \; \mathbf{x=a+b}$$

Clave A

Resolución N° 88



Nos piden m∢CJB

- Como ⌂BQJN es inscriptible entonces:

  m∢QJB = 45°

- Por ∢ inscrito:

  m∢QMN = 45°

  ⇒ QJ=JM

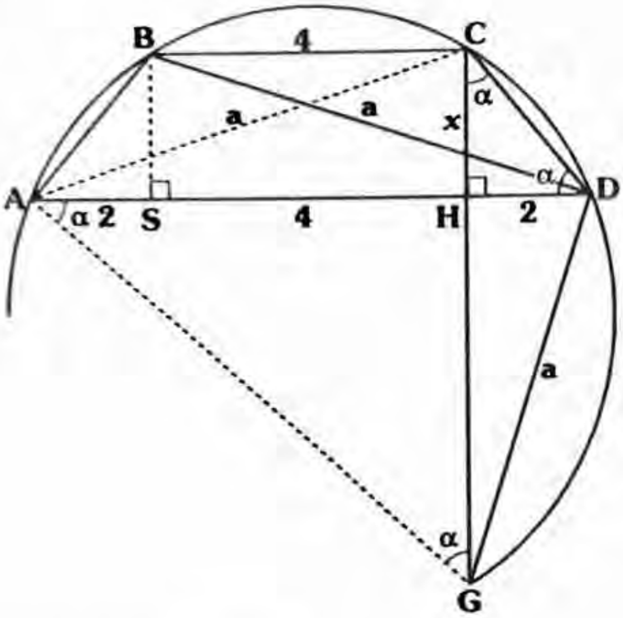
- ⌂QCMJ: Trapezoide simétrico

  ⇒ m∢QJC = m∢CJM = 45°

  ∴ **m∢CJB = 90°**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 89



Nos piden "x".

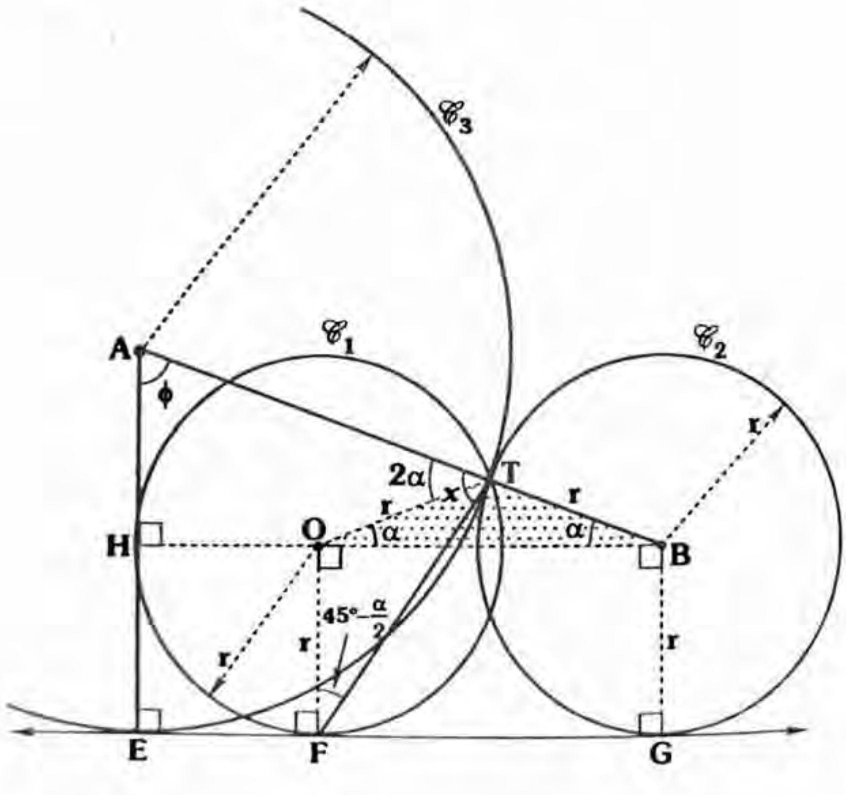
- Como el trapecio ABCD está inscrito entonces ABCD es un trapecio isósceles entonces AC=BD.
- Luego $AC = DG \Rightarrow \overline{AG} // \overline{CD}$ entonces ACDG es también trapecio isósceles

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle HCD = m\measuredangle HDC$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 90



Nos piden "x" en función de ϕ.

- Como dos circunferencias son congruentes y $\phi \neq 90°$ entonces $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$.

- ΔOTB y ΔFOT : isósceles
- FOBG: rectángulo entonces:

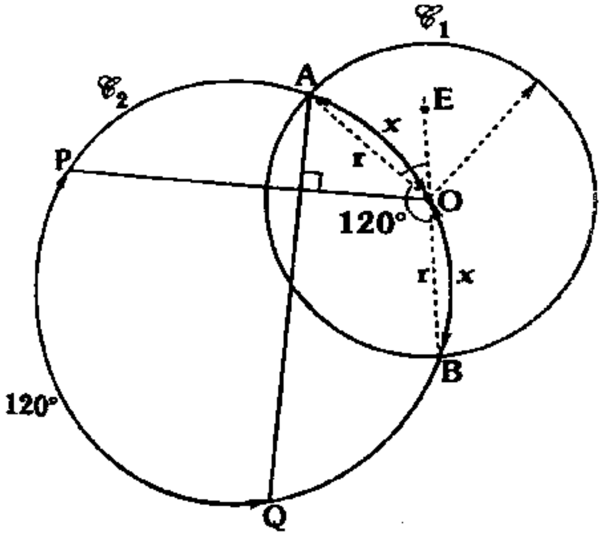
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle FOB = 90°$$

- En ΔFOT : $\quad m\measuredangle OTF = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$
- $x = 2\alpha + 45° - \dfrac{\alpha}{2} = 45° + \dfrac{3}{2}\alpha$
- Como $\alpha + \phi = 90° \;\Rightarrow\; \alpha = 90° - \phi$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 180° - \frac{3}{2}\phi}$$

Clave C

Resolución N° 91



Nos piden $m\widehat{AB}$

- Como $OB = OA \Rightarrow m\widehat{OB} = m\widehat{OA} = x$
- Por ángulo interior:

$$\frac{x+120}{2} = 90°$$

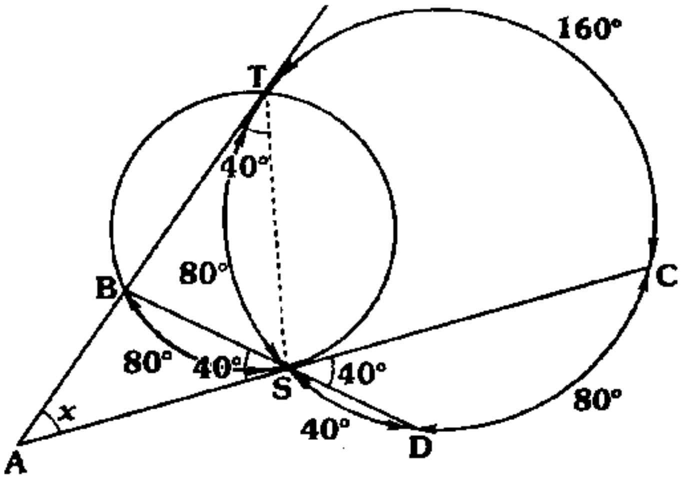
$$\Rightarrow \quad x = 60°$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle AOE = 60°$$

$$\therefore \quad \mathbf{m\widehat{AB} = 120°}$$

Clave C

Resolución N° 92



Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle CSD = 40° \;\Rightarrow\; m\measuredangle BSA = 40°$$

$$m\widehat{BS} = 80° \Rightarrow m\widehat{TS} = 80° \Rightarrow m\widehat{TC} = 160°$$

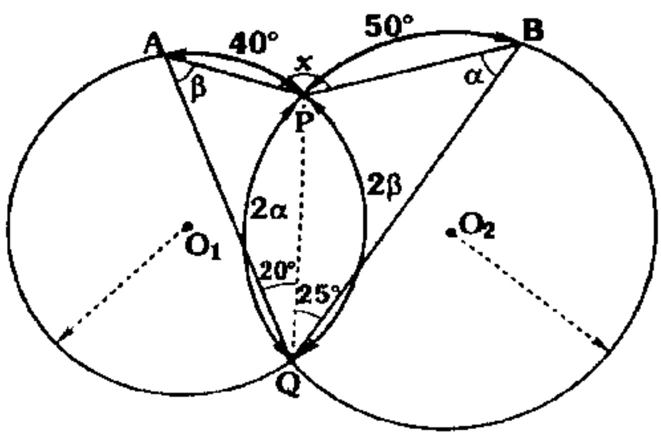
- Por ángulo exterior:

$$x = \frac{160° - 80°}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 40°}$$

Clave D

Resolución N° 93



Nos piden "x"

Dato: $2\alpha+2\beta=110° \Rightarrow \alpha+\beta=55°$

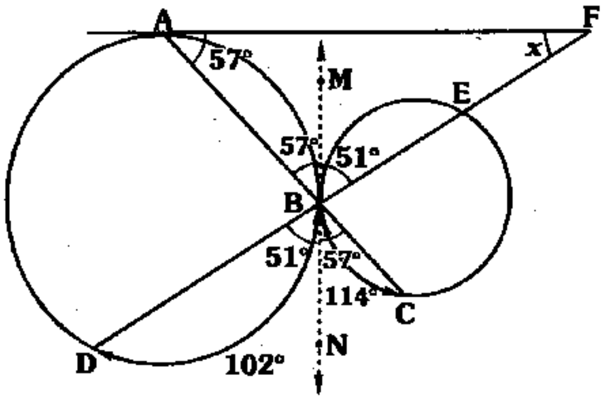
- En $\measuredangle$AQBP:

$$x=\underbrace{\alpha+\beta}_{55°}+20°+25°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=100°}$$

Clave C

Resolución N° 94



Nos piden "x".

- Se traza la tangente en B

$\Rightarrow\ m\measuredangle MBA=m\measuredangle FAB=57°$ y

$m\measuredangle DBN=m\measuredangle MBE=51°$

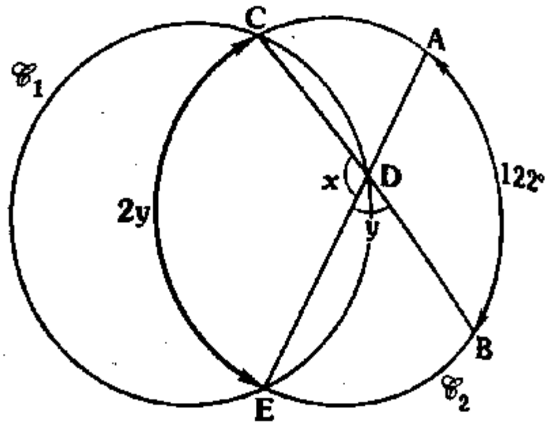
- En $\triangle ABF$:

$$x+57°+57°+51°=180°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=15°}$$

Clave C

Resolución N° 95



Nos piden "x".

Dato: $\mathscr{C}_1\cong\mathscr{C}_2$

- Sea $m\measuredangle EDB=y \Rightarrow m\widehat{CDE}=2y$
- Como $\mathscr{C}_1\cong\mathscr{C}_2 \Rightarrow m\widehat{CDE}=m\widehat{CE}=2y$
- Por ángulo interior:

$$x=\frac{2y+122°}{2} \Rightarrow x-y=61°$$

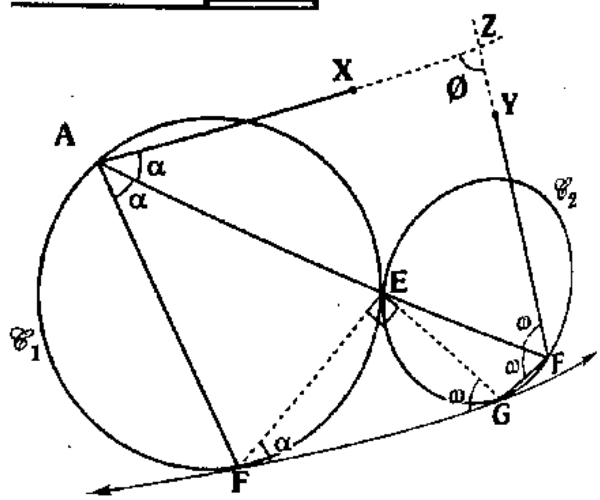
- Como:

$$x+y=180°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=120{,}5°}$$

Clave C

Resolución N° 96



Nos piden "ϕ":

- Por propiedad:

$$m\measuredangle FEG = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\omega=90^\circ$$

- En ΔAZB:

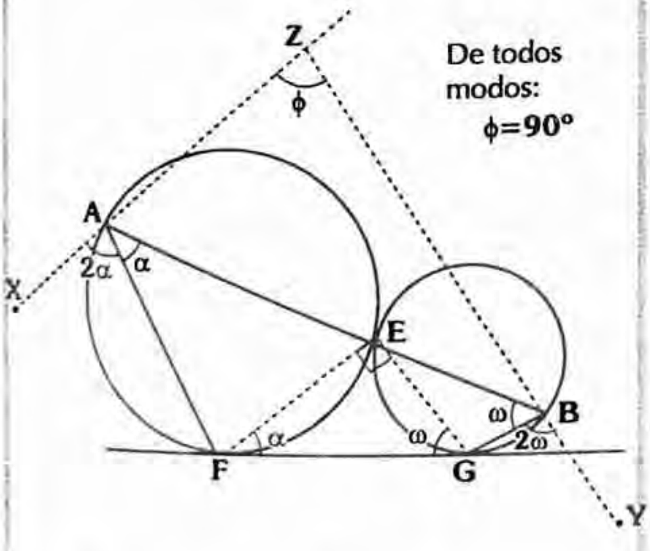
$$\alpha+\omega+\phi=80^\circ$$

$$\therefore \quad \mathbf{\phi=90^\circ}$$

Clave D

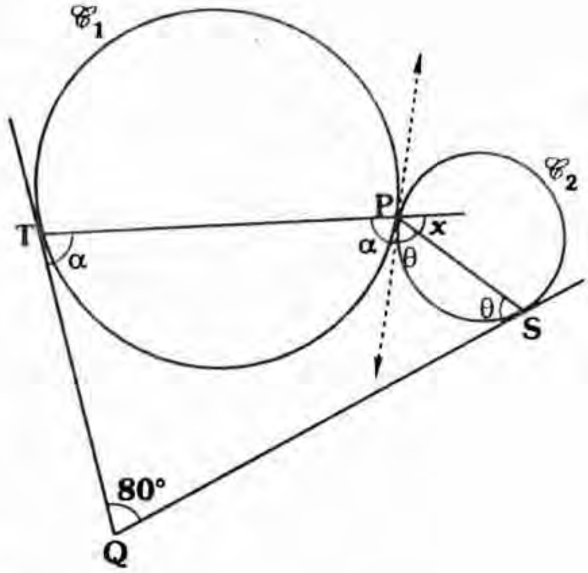
Observación

- *El gráfico, también puede ser así:*



- *Cuando $\overline{AX}$ y $\overline{BY}$ están a uno y otro lado respecto de $\overleftrightarrow{AB}$ entonces "ϕ" no está definido.*

RESOLUCIÓN Nº 97



Nos piden "x".

- Se traza la tangente común en P

$$\Rightarrow \quad x+\theta+\alpha=180^\circ$$

- En el $\triangle$QTPS:

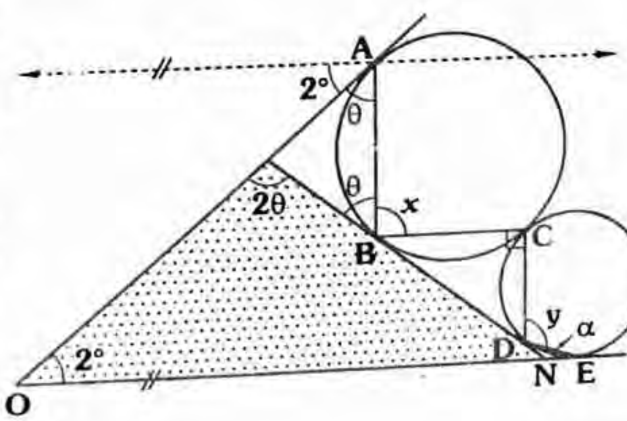
$$2\alpha+2\theta+80^\circ=360^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\theta=140^\circ$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=40^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 98



Nos piden $x+y$

- Por A se traza la paralela a $\overline{OE}$

$$\Rightarrow \quad x+y=2^\circ+\theta+90^\circ+\alpha$$

$$x+y=92^\circ+\theta+\alpha \quad \text{... (I)}$$

- En ΔOMN : $2\theta+2\alpha+2^\circ=180^\circ$

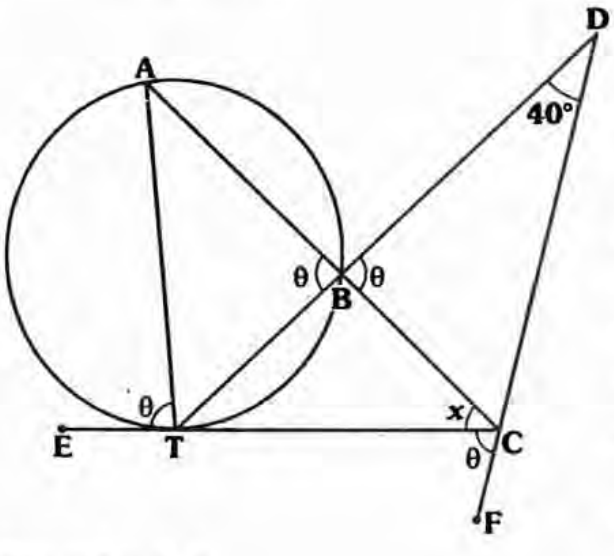
$$\theta+\alpha=89^\circ \quad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II):

$$x+y=181^\circ$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 99



Nos piden "x".

- Como:

$$m\sphericalangle ATE=\theta \;\Rightarrow\; m\sphericalangle TBA=\theta$$

$$\Rightarrow\; m\sphericalangle CBD=\theta$$

- En ΔCBD:

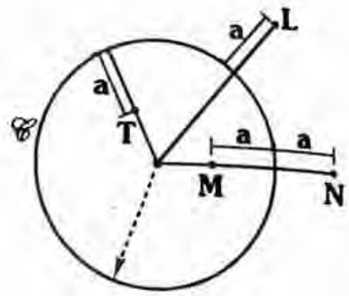
$$x+\not{\theta}=40^\circ+\not{\theta}$$

$$\therefore \; \mathbf{x=40^\circ}$$

Clave B

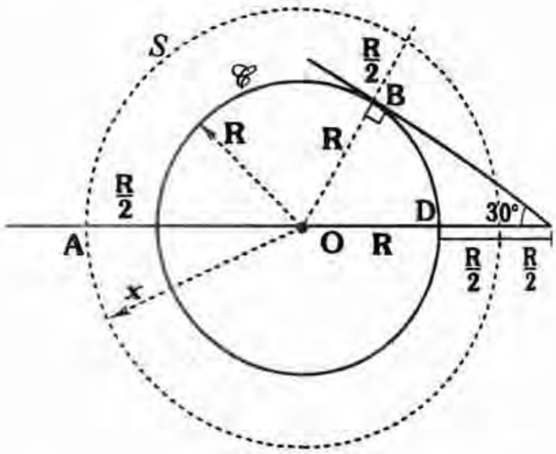
RESOLUCIÓN Nº 100

Considerando:



Los puntos: T, L, M y N equidistan de $\mathscr{C}$.

- En el problema:



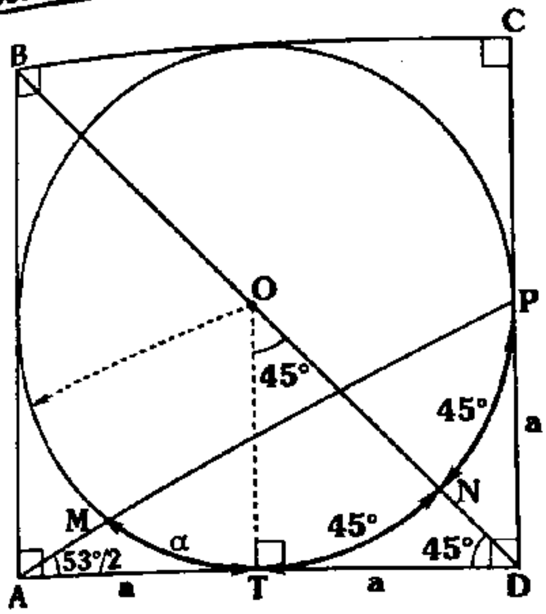
- La circunferencia S es la circunferencia pedida, pues equidista de A, B, C y D y su centro es O y radio:

$$x=R+\frac{R}{2}$$

$$\therefore \; \mathbf{x=\frac{3}{2}R}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 101



Nos piden: $m\widehat{MN}$

- $\measuredangle$ADP: notable de 53°/2
- Como $m\widehat{NT} = m\widehat{NP} = 45°$ entonces por ángulo exterior:

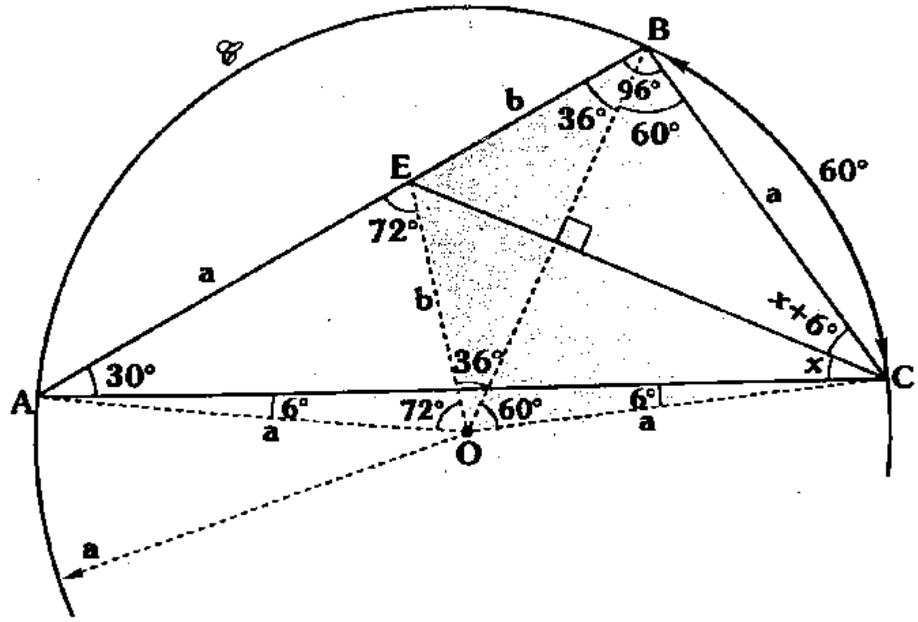
$$\frac{53°}{2} = \frac{90° - \alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 37°$$

- $m\widehat{MN} = \alpha + 45°$

$$\therefore \ \mathbf{m\widehat{MN} = 82°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 102



Nos piden "x".

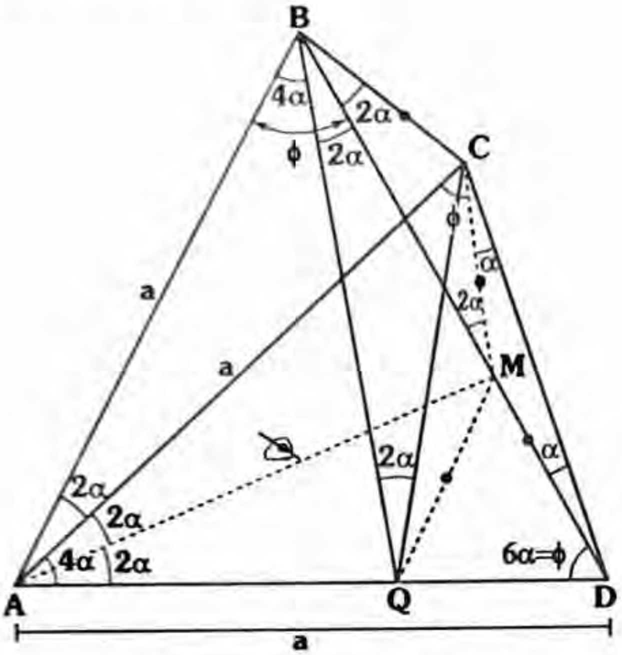
- Se traza la circunferencia circunscrita al ΔABC, cuyo centro es O, como $m\measuredangle BAC = 30°$ entonces: $m\widehat{BC} = 60° \Rightarrow \Delta BOC$ es equilátero
- ΔAEO : isósceles entonces: $m\measuredangle AEO = m\measuredangle AOE = 72° \Rightarrow \Delta OEB$: isósceles $(OE = EB)$
- ◺OEBC: trapezoide simétrico, entonces: $m\measuredangle OCE = m\measuredangle ECB = x + 6°$

$$2x + 12° = 60$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 24°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 103



Nos piden "α":

- Se traza $\overline{AM}$, bisectriz del ∢CAD (M en $\overline{BD}$) entonces ⌂ABCM: inscriptible

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle ACM = m\measuredangle ABM = \phi$$

- $\Delta ACM \cong \Delta ADM$ entonces $AC = AD$ y $CM = MD$ entonces ⌂BCMQ: inscriptible.
- Luego los puntos A, B, C, M y Q son concíclicos

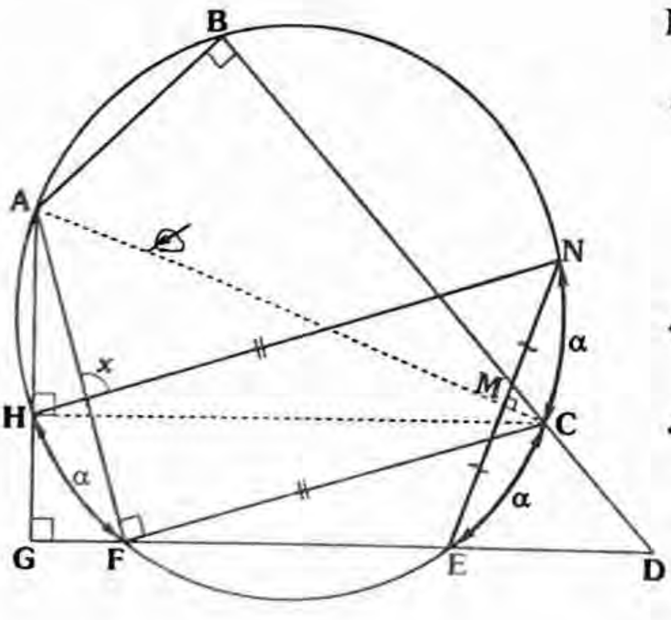
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle QBM = 2\alpha$$

- Luego: $\phi = 6\alpha$, en el ΔABD : equilátero $\Rightarrow \quad 6\alpha = 60°$

$$\therefore \ \boldsymbol{\alpha = 10°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 104



Nos piden "x":

- Como $m\measuredangle ABC = 90°$ entonces $\overline{AC}$ es diámetro

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle AFC = 90°$$

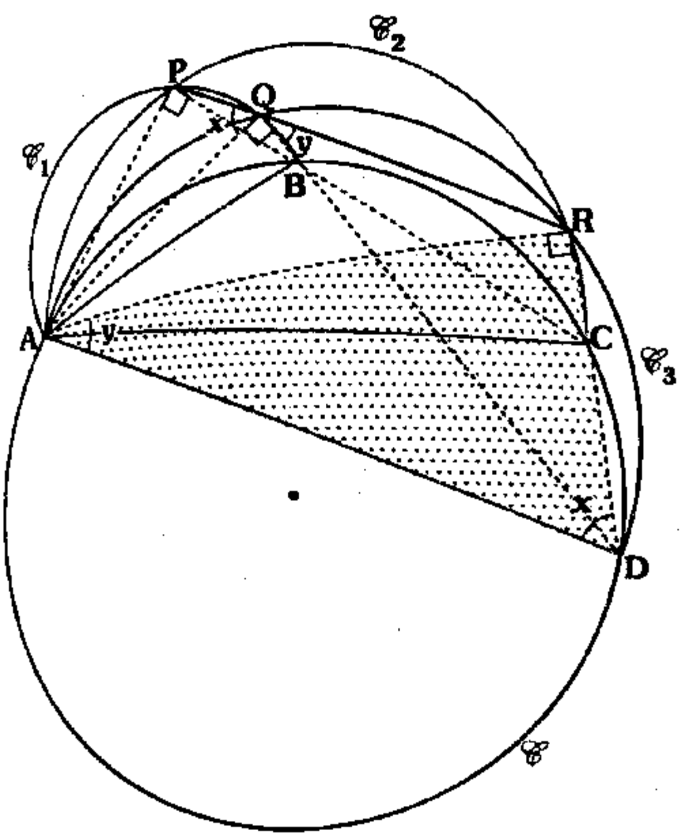
- También $m\overset{\frown}{NC} = m\overset{\frown}{CE}$ y $NM = ME$ entonces C, M y A son colineales.
- Como:

$$m\overset{\frown}{HF} = m\overset{\frown}{NC} \Rightarrow \overline{HN} \parallel \overline{FC}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 90°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 105



En $\mathscr{C}_1$: $m\sphericalangle APB=90°$
En $\mathscr{C}_2$: $m\sphericalangle APC=90°$ } P, B y C: colineales

En $\mathscr{C}_1$: $m\sphericalangle AQB=90°$
En $\mathscr{C}_3$: $m\sphericalangle AQD=90°$ } Q, B y D: colineales

En $\mathscr{C}_2$: $m\sphericalangle ARC=90°$
En $\mathscr{C}_3$: $m\sphericalangle ARD=90°$ } R, C y D: colineales

- Sea $m\sphericalangle AQP=x$ y $m\sphericalangle DQR=y$
- En ⌂AQRD:

$$m\sphericalangle ADR=x$$

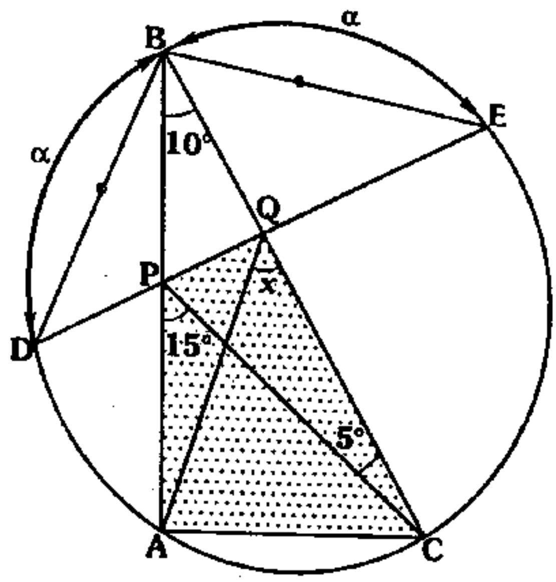
$$m\sphericalangle RAD=y$$

- En ⊿ARD: $x+y=90°$

$\therefore$ **P, Q y R : colineales**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 106



Nos piden "x".

- Como $BD=BE \Rightarrow m\widehat{BD}=m\widehat{BE}$

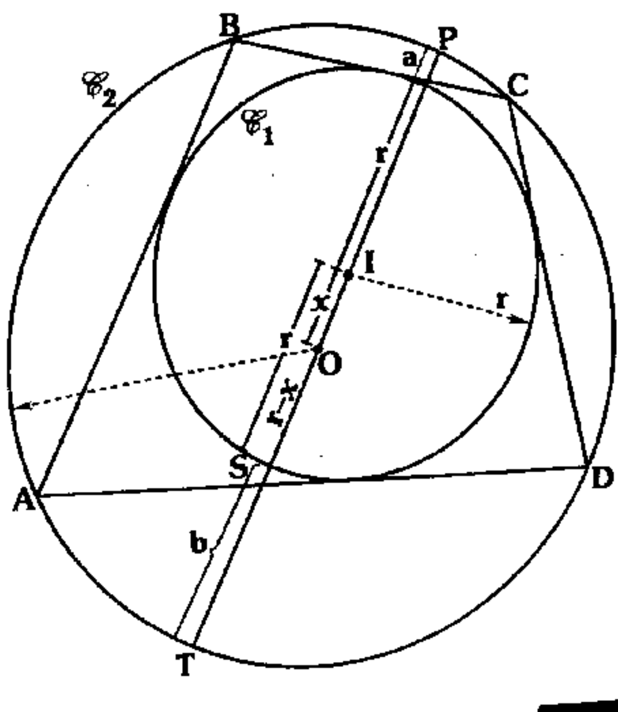
$\Rightarrow$ el ⌂APQC es inscriptible

- Luego: $m\sphericalangle APC=m\sphericalangle AQC$

$$\therefore \quad x=15°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 107



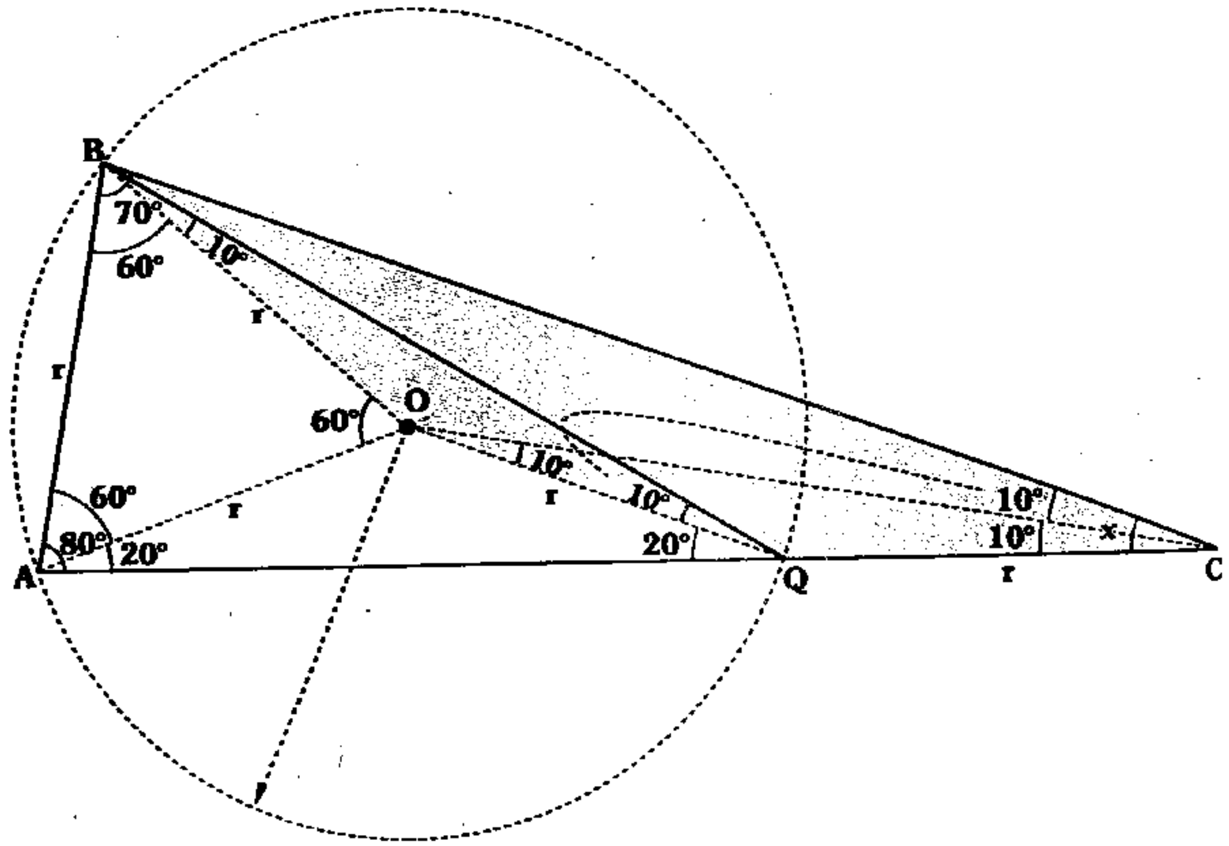
Nos piden "x" en función de a y b.

- Como: $OS = r - x$ y $OP = OT$ $\rightarrow$ $a + \not{r} + x = b + \not{r} - x$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{b-a}{2}}$$

Clave A

Resolución N° 108



Nos piden "x".

- Como m∢AQB entonces se traza la circunferencia circunscrita del ΔABQ, cuyo centro es O entonces ΔAOB : equilátero y el ΔBOQ es isósceles.

- Notemos que OQ=QC ⇒m∢OCQ=10°

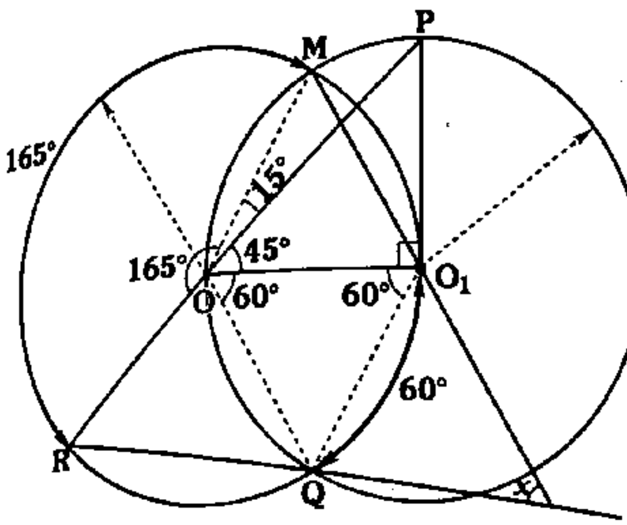
  ⇒ ⏢BOQC es inscriptible

  ⇒ m∢OCQ = 10°

$$\therefore \ \mathbf{x = 20°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 109



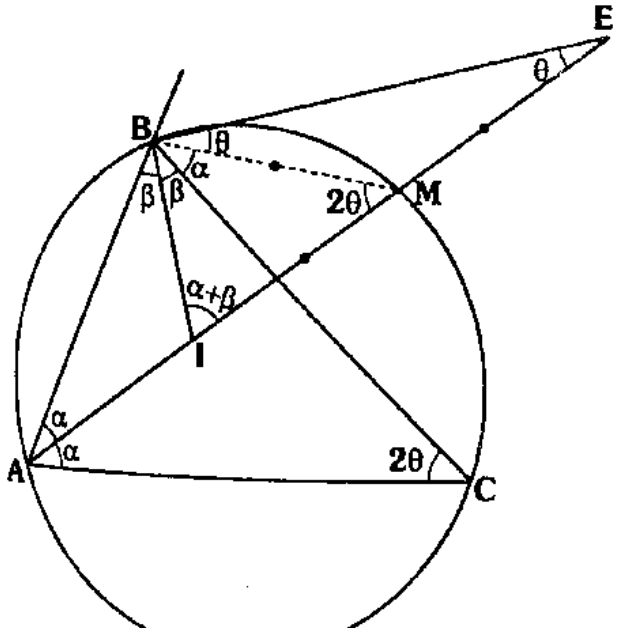
Nos piden "x".

- Notemos que los triángulos OMO_1 y OQO_1 son equiláteros.
- $\triangle OO_1P$: notable de 45°
- $m\measuredangle MOP = 60° - 45° \rightarrow m\measuredangle MOP = 165°$
- Por ángulo exterior:

$$x = \frac{165° - 60°}{2} = 52{,}5°$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 110



Por demostrar: IM=ME

- Donde I es incentro del ΔABC y E es excentro relativo a $\overline{BC}$.
- Sea $m\measuredangle ACB = 2\theta$ entonces por teorema:

$$m\measuredangle AEB = \theta$$

- Como:

$$m\measuredangle AMB = m\measuredangle ACB = 2\theta$$

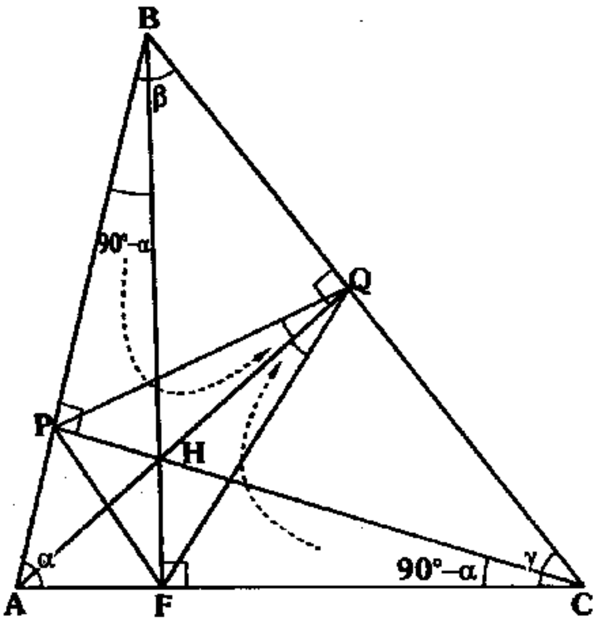
$$m\measuredangle MBE = \theta \Rightarrow MB = ME \quad \text{... (I)}$$

- ΔIMB : isósceles $\Rightarrow$ MB=MI ... (II)

De (I) y (II):

$$\mathbf{ME = MI}$$

RESOLUCIÓN Nº 111



Por demostrar:

A) $m\sphericalangle PQF = 180° - 2\alpha$

B) $m\sphericalangle PFQ = 180° - 2\beta$

C) $m\sphericalangle QPF = 180° - 2\gamma$

- Los tres casos son similares, notemos que los cuadrilateros PBQH y FHQC son inscriptibles:

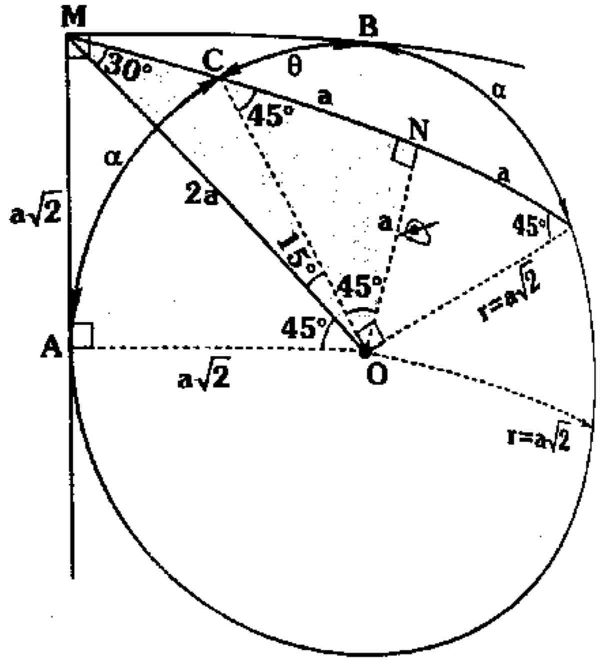
$\Rightarrow$ $m\sphericalangle PQH = m\sphericalangle PBH = 90° - \alpha$

$m\sphericalangle HQF = m\sphericalangle FCH = 90° - \alpha$

$\therefore$ $m\sphericalangle PQF = 90° - \alpha + 90° - \alpha = 180° - 2\alpha$

- Los demás casos se prueban análogamente.

RESOLUCIÓN Nº 112



Nos piden: "α"

- Como $m\widehat{AB} = 90° \Rightarrow \alpha + \theta = 90°$

$\Rightarrow$ $m\sphericalangle COD = 90°$

- En ⊿COD: notable de 45°, se traza la altura ON entonces CN=NO=ND.

$\Rightarrow$ $r = a\sqrt{2}$

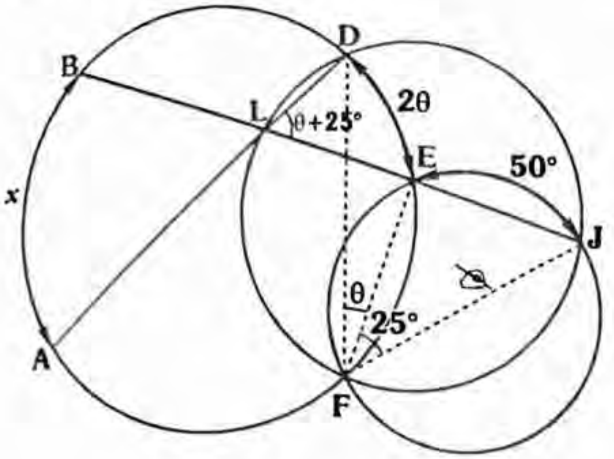
- En ⊿OAM: OM=2a
- Se verifica que el ⊿MNO es notable de 30°
- Notamos que:

$m\sphericalangle MOC = 15°$

$\therefore$ $\alpha = 60°$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 113



Nos piden "x".

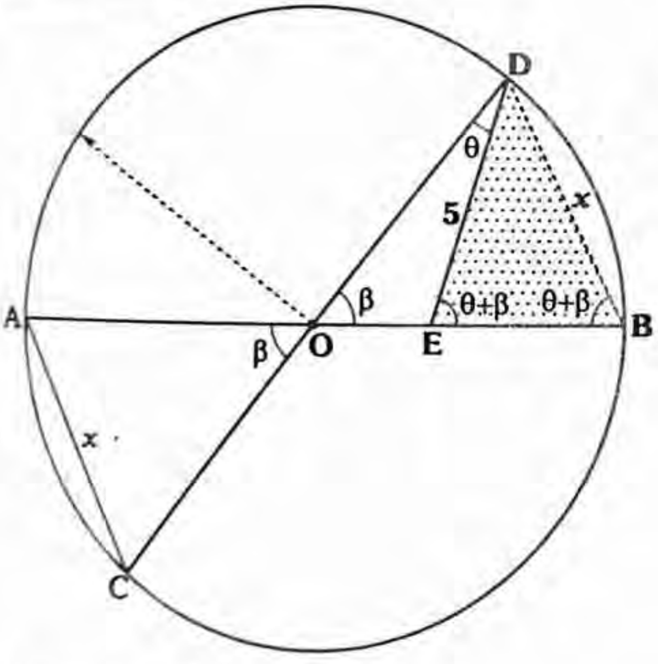
- Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle EFJ=25°$
- Sea $m\sphericalangle DFE=\theta \Rightarrow m\sphericalangle DFJ=\theta+25$
- Como $m\sphericalangle DLJ=m\sphericalangle DFJ=\theta+25°$
- Por ángulo interior:

$$\frac{x+2\theta}{2}=\theta+25°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=50°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 114



Nos piden "x".

Dato: $2\theta+3\beta=180°$

- $\Delta AOC \cong \Delta BOD \Rightarrow BD=x$
- En ΔDOB, como $m\sphericalangle DOB=\beta$

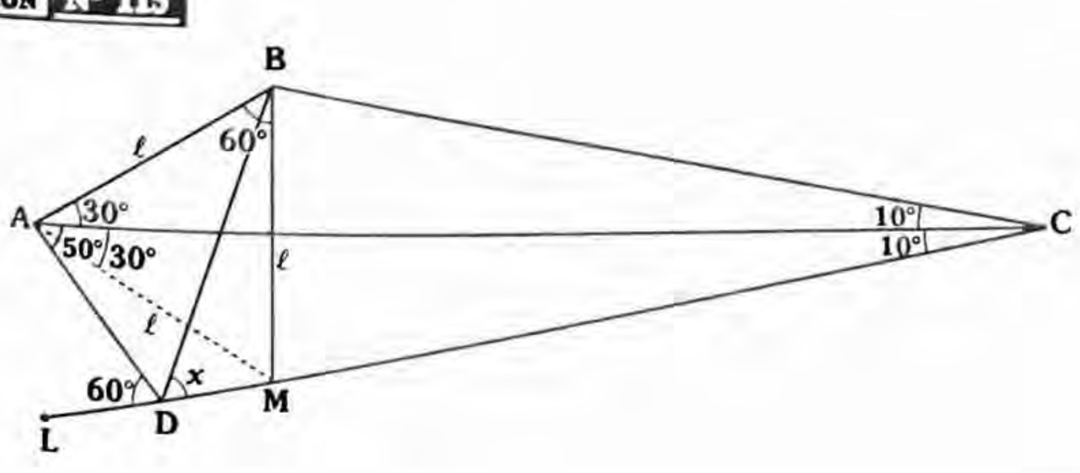
$$\Rightarrow m\sphericalangle OBD=m\sphericalangle ODB=\theta+\beta$$

- Luego notamos que el ΔEDB es isósceles:

$$\therefore \quad \mathbf{x=5}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 115



Nos piden "x".

- Se ubica M en $\overline{CD}$ talque:

$$m\sphericalangle CAM = 30° \Rightarrow \Delta MAC \cong \Delta BAC$$
$$\Rightarrow AB = AM$$

- Luego el ΔMAB es equilátero

$$\Rightarrow m\sphericalangle ABM = 60°$$

- $\triangle$DABM es inscriptible pues:

$$m\sphericalangle ADL = m\sphericalangle ABM$$

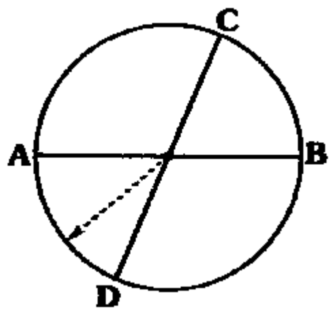
$$\therefore \ \mathbf{x = 60°}$$

Clave D

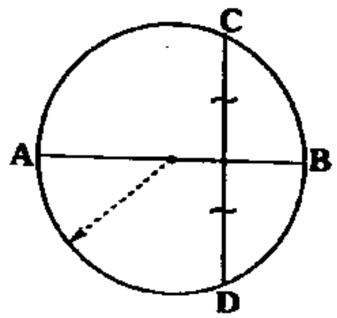
Resolución Nº 116

I) **Falso**

Es que un diámetro también es cuerda

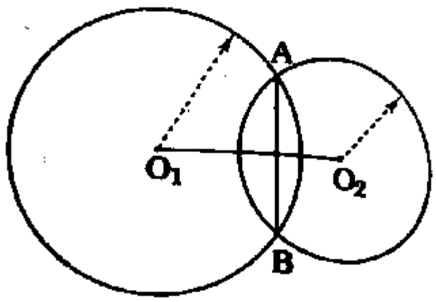


- $\overline{AB}$: biseca a $\overline{CD}$ diámetro y $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son perpendiculares

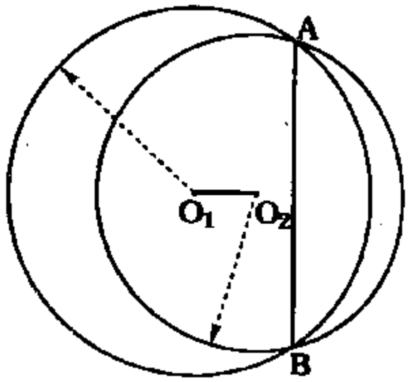


- Si $\overline{CD}$ no es diámetro y $\overline{AB}$ biseca a $\overline{CD} \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{CD}$

II) **Falso**



$\overline{O_1O_2}$ y $\overline{AB}$ son secantes.



$\overline{O_1O_2}$ y $\overline{AB}$ no son secantes.

III) **Verdadero**

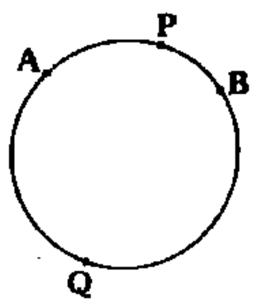
Como el centro equidista de los extremos del segmento entonces pertenece a la mediatriz de la cuerda.

Clave D

Resolución Nº 117

I) **Falso**

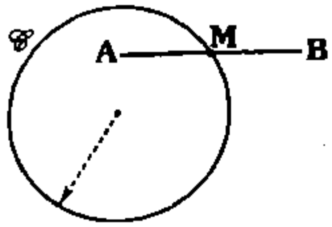
Dos puntos determinan dos arcos



Los arcos determinados son:

$$\overset{\frown}{APB} \ \text{y} \ \overset{\frown}{AQB}$$

II) FALSO



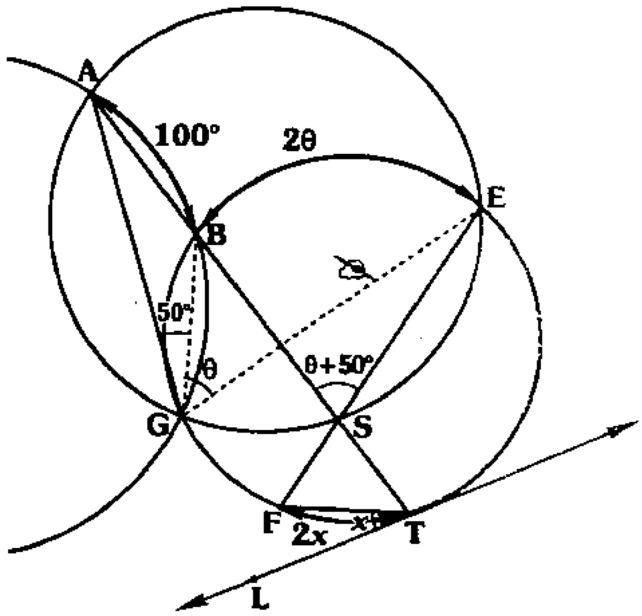
- $\mathscr{C} \cap \overline{AB} = \{M\}$

  Notamos que la intersección es un solo punto.

III) FALSO
Las circunferencias pueden ser también interiores.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 118



Piden: "x"

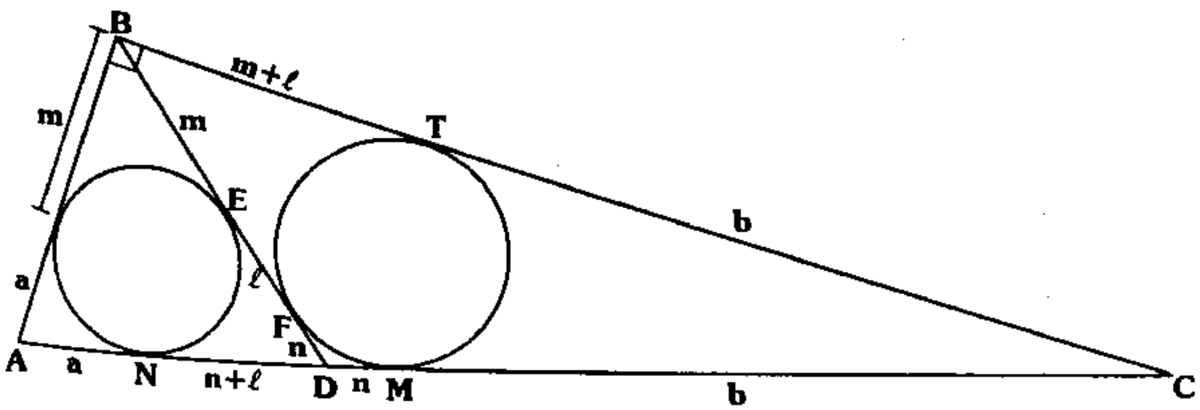
- Como $m\sphericalangle LTF = x \Rightarrow m\widehat{FT} = 2x$
- Sea $m\sphericalangle BGE = \theta \Rightarrow m\widehat{BE} = 2\theta$
- Como $m\sphericalangle AGE = m\sphericalangle ASE = \theta + 50°$
- Por ángulo interior:

$$\theta + 50° = \frac{2x + 2\theta}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 50°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 119



Sea "x" el inradio del $\triangle$ABC

Dato: $m-n=8$

- Por teorema de Poncelet: $AB+BC=AC+2x$

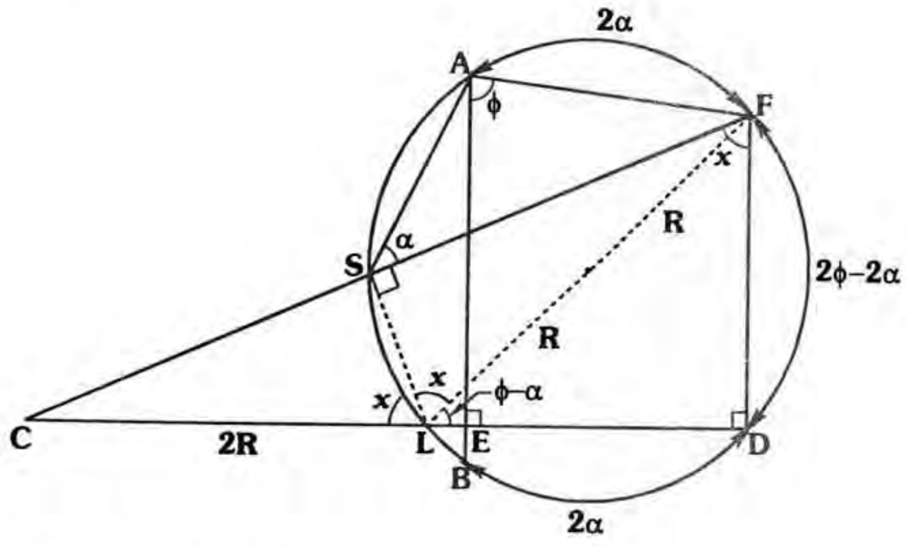
$$\Rightarrow \cancel{a}+m+m+\ell+b=\cancel{a}+2n+\cancel{\ell}+b+2x$$

$$\Rightarrow 2m=2n+2x \quad \Rightarrow \quad x=m-n$$

$$\therefore \; \mathbf{x=8}$$

Clave C

Resolución Nº 120



Nos piden "x" en función de ϕ y α

- Como $m\widehat{AF}=2\alpha \Rightarrow m\widehat{BD}=2\alpha$

$$\Rightarrow m\widehat{FD}=2\phi \Rightarrow m\sphericalangle FLD=\phi-\alpha$$

- $\overline{LF}$: diámetro $\Rightarrow$ CL=LF
- Luego:

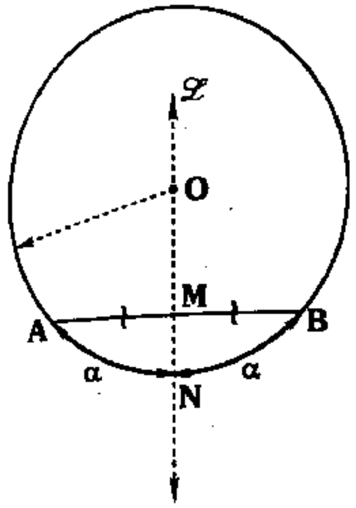
$$2x+\phi-\alpha=180°$$

$$\mathbf{x=90°+\frac{1}{2}(\alpha-\phi)}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 121

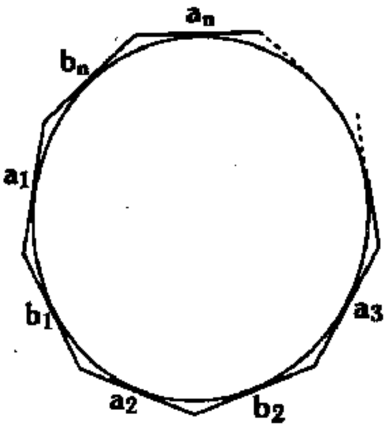
I) VERDADERO



Se cumple: O, M y N son colineales

II) VERDADERO

En todo polígono circunscrito de número par de lados, se cumple:



Se cumple:

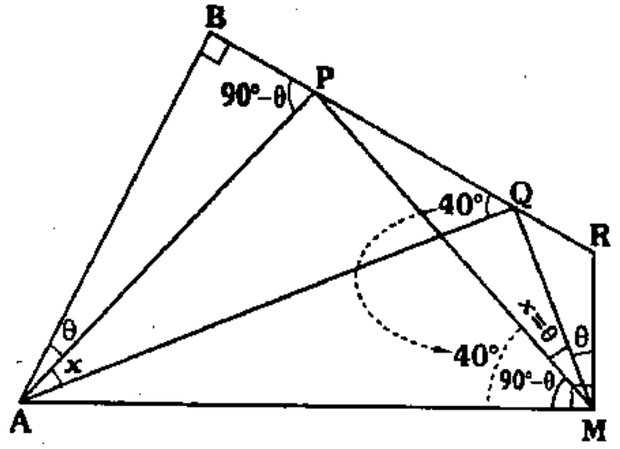
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

III) FALSO

Solamente son inscriptibles, el rectángulo y el cuadrado.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 122



Piden "x".

- Como: $m\measuredangle APB = m\measuredangle AMQ = 90° - \theta$

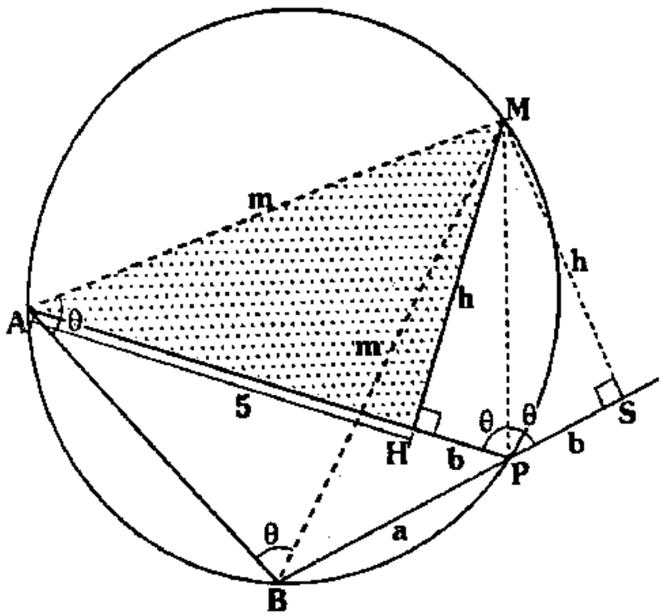
  $\Rightarrow$ ⌂APQM es inscriptible $\Rightarrow x = 0$

- En M: $2x + 40° = 90°$

  $\therefore$ $\mathbf{x = 25°}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 123



Piden: $a + b$

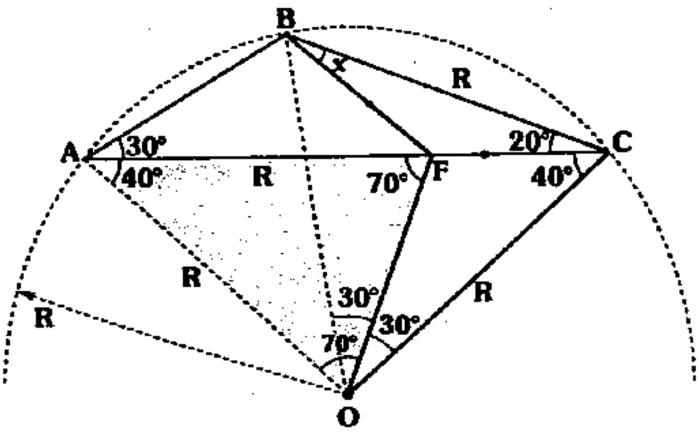
- Como $m\widehat{AM} = m\widehat{BM} \Rightarrow AM = MB$

- También notemos que $\overline{PM}$ es bisectriz del $\measuredangle APS$ entonces PH=PS.
- $\triangle AHM \cong \triangle BSM$

$$\Rightarrow \mathbf{a+b=5}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 124



Nos piden "x".

- Se traza parte de la circunferencia circunscrita al ΔABC de centro O.
- ΔBOC : equilátero y ΔAOF : isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle OFA=70° \Rightarrow m\measuredangle FOC=30°$

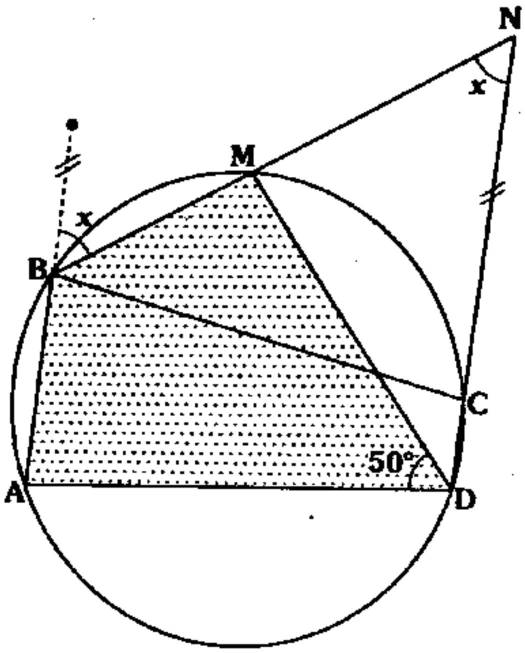
- En el ΔBOC :

como $m\measuredangle BOF = m\measuredangle FOC = 30°$, entonces: FB=FC

$$\therefore \ \mathbf{x=20°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 125



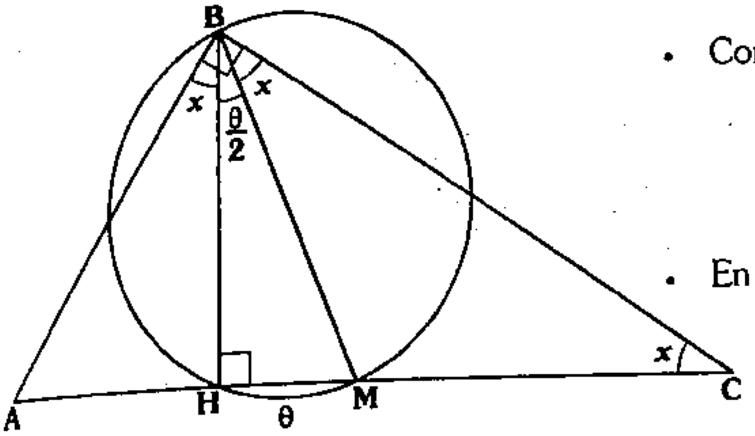
Nos piden x.

- Como $\overline{AB}//\overline{DN} \Rightarrow m\measuredangle SBM = x$
- En el ⌂ABMD:

$$\mathbf{x=50°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 126



Nos piden x.

- Como M es punto medio de

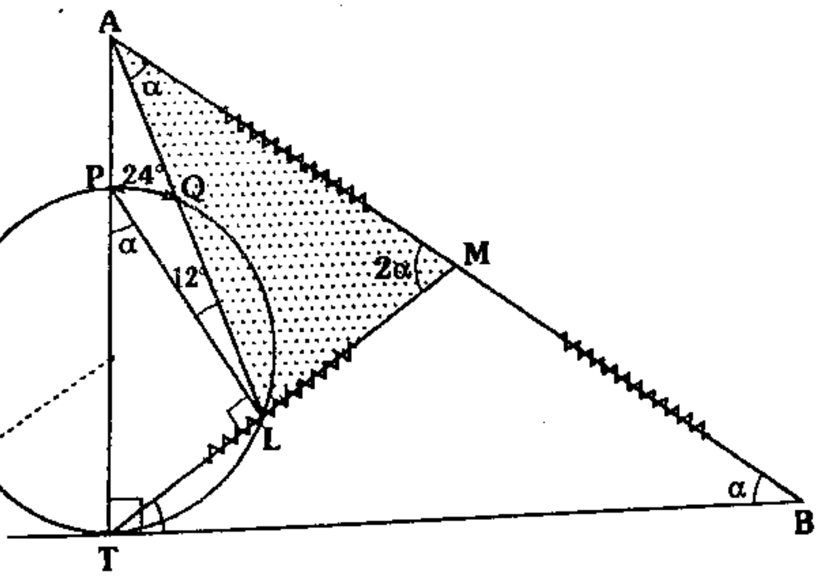
$$\overline{AC} \Rightarrow AM = MC = BM$$

- En B: $2x + \frac{\theta}{2} = 90°$

$$\therefore \; x = 45° - \frac{\theta}{4}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 127



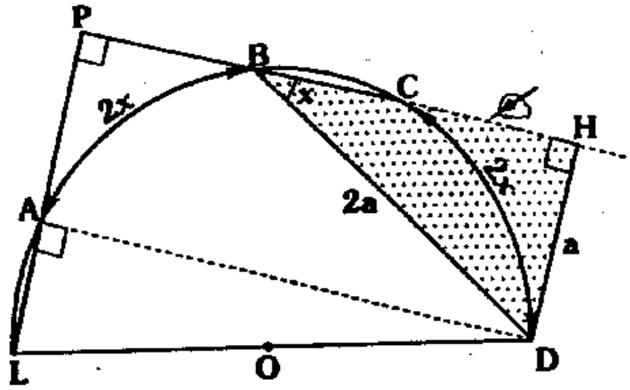
Nos piden α.

- Como M es punto medio de $\overline{AC} \Rightarrow AM = MC = TM$
- ΔTMB: isósceles.
- En ΔALM : $\alpha + 2\alpha = 90° + 12$

$$\therefore \; \alpha = 34°$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 128



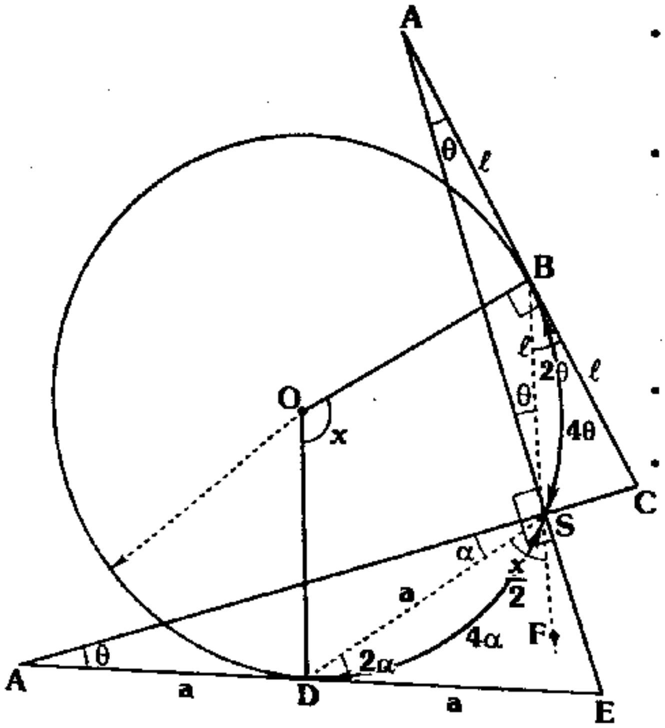
Nos piden: $m\widehat{AB}$

- Como $m\sphericalangle LAD=90° \Rightarrow \overline{AD}//\overline{PC} \Rightarrow m\widehat{CD}=m\widehat{AB}=2x$
- Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle DBC=x$
- En ⊿BHD: notemos que BD=2(DH) $\Rightarrow x=30°$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{CD}=m\widehat{AD}=60°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 129



Nos piden x.

- En los triángulos rectángulos ESC y CSA:

  CD=DS=DE y AB=BC=BS

- Como

  $\Rightarrow\ x=m\widehat{DS}+m\widehat{BS} \ \rightarrow\ x=4\alpha+4\theta$

  $\rightarrow\ x=4(\alpha+\theta)$

- Por propiedad: $m\sphericalangle FSD=\dfrac{x}{2}$
- En S:

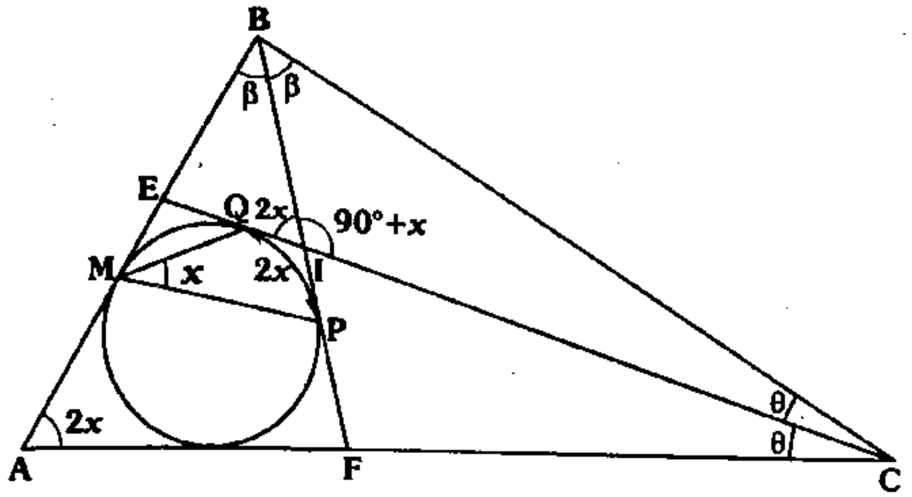
$$\underbrace{\alpha+\theta}+\frac{x}{2}=90°$$

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{2}=90°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=120°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 130



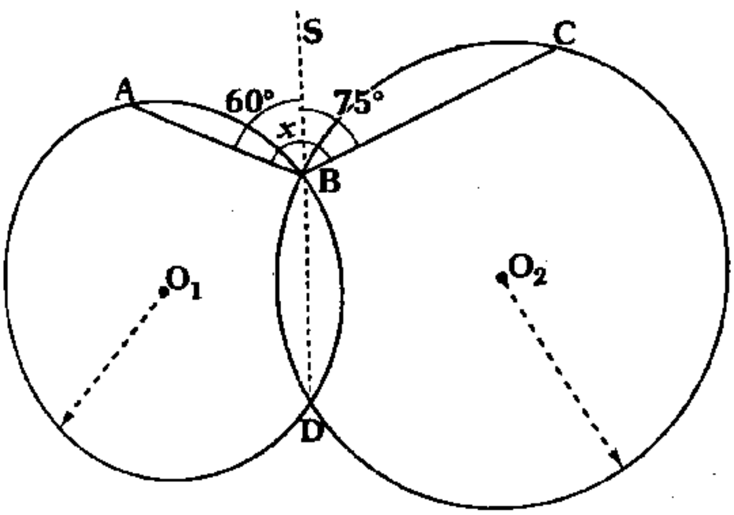
Nos piden m∢BIC

- Por propiedad en el ΔABC: $m\sphericalangle BIC = 90° + x$
- Como $m\sphericalangle QMP = x \rightarrow m\widehat{QP} = 2x \rightarrow m\sphericalangle QIB = 2x$
- En I: $2x + 90° + x = 180° \rightarrow x = 30°$

$$\therefore \ m\sphericalangle BIC = 120°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 131



Nos piden x.

- Datos: $m\widehat{ABD} = 120°$ y

  $m\widehat{CBD} = 150°$

- Por ángulo exinscrito:

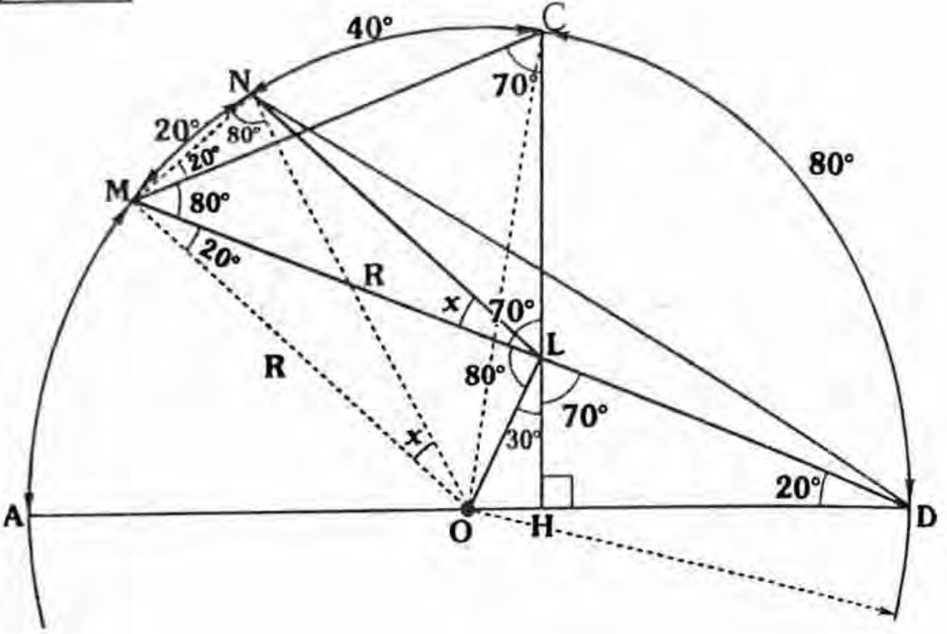
$$m\sphericalangle ABS = \frac{120°}{2} = 60° \quad y$$

$$m\sphericalangle SBC = \frac{150°}{2} = 75°$$

$$\therefore \ x = 135°$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 132



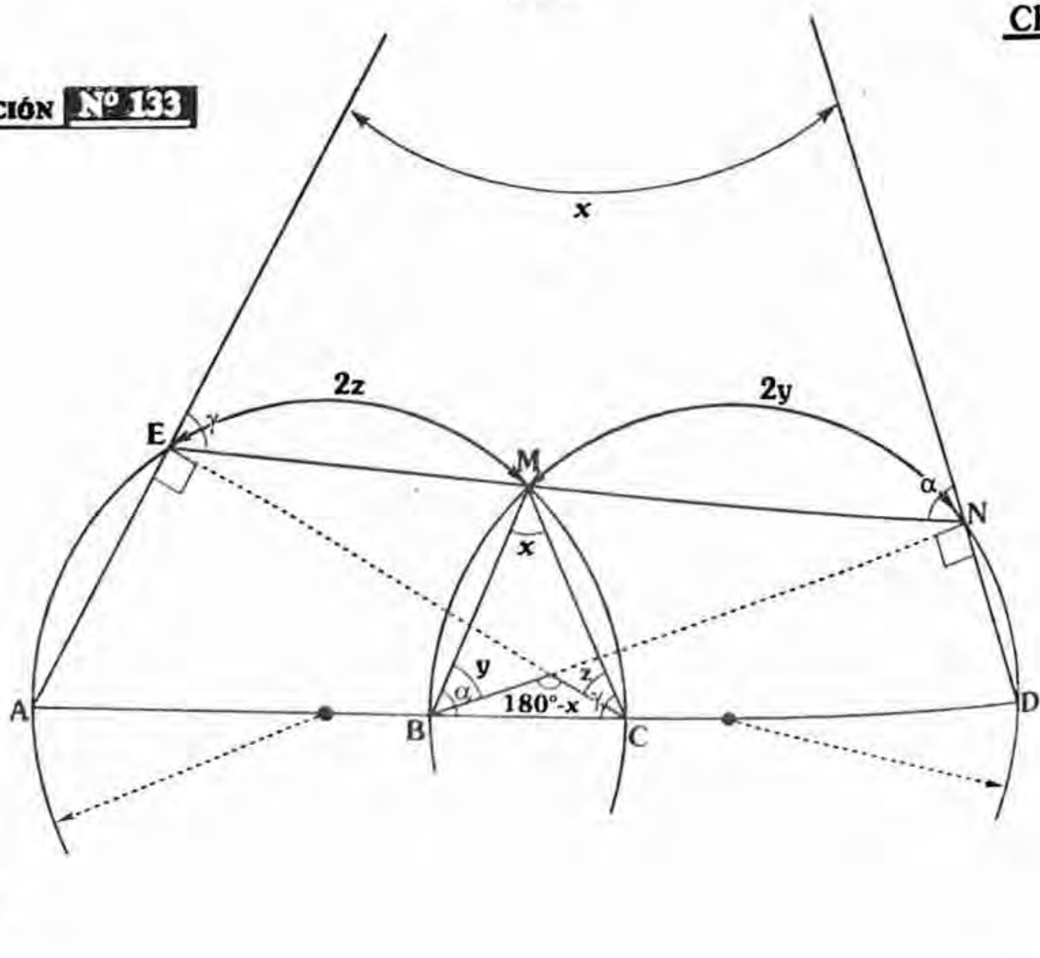
Nos piden x.

- ΔAOM: equilátero
- ΔLMC: isósceles $\Rightarrow CM = ML = R$
- ΔOML: isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle NLM = m\sphericalangle NOM = x$

$$\therefore\ x = 20°$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 133



Nos pide x.

- Dato $2z+2y=\theta \rightarrow z+y=\dfrac{\theta}{2}$
- Sea "S" la intersección de las prolongaciones de $\overline{AE}$ y $\overline{DN}$
- Como los ⏢s AEMC y BMND son inscritos

$\rightarrow$ $m\measuredangle ACM = m\measuredangle NES = \gamma$ y

$m\measuredangle MBD = m\measuredangle MNS = \alpha$

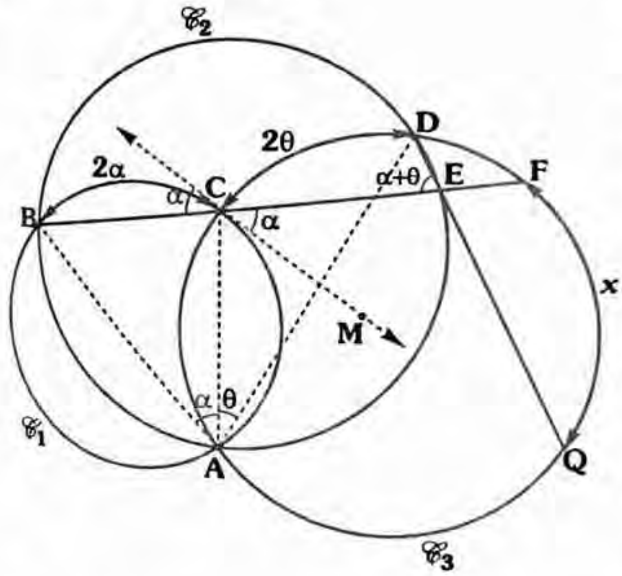
- En ΔESN: $m\measuredangle ESN = x$
- En la región sombreada:

$$180° - x = \underbrace{y+z}_{\frac{\theta}{2}} + x$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 90° - \frac{\theta}{4}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 134



- Demostraremos también que $\overleftrightarrow{CQ}$ es tangente a $\mathscr{C}_3$.
- Para $\overleftrightarrow{CQ}$ sea tangente a $\mathscr{C}_3$, vamos a proceder así: se traza la tangente a $\mathscr{C}_1$ en C, se ubica en dicha recta.
- Sea $m\widehat{BC} = 2\alpha \rightarrow m\measuredangle MCF = \alpha$
- Para que la recta pase por Q será suficiente probar que $m\widehat{FQ} = 2\alpha$.
- Por ángulo interior en $\mathscr{C}_3$:

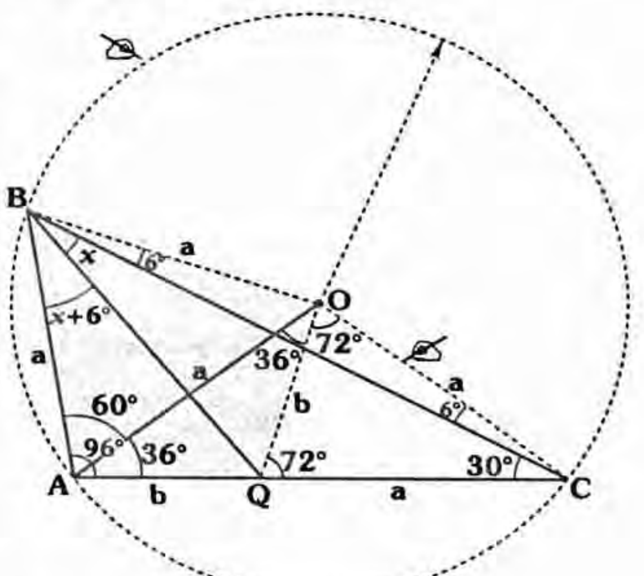
$$\alpha + \theta = \frac{x+2\theta}{2}$$

$$\rightarrow \alpha = x$$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{FQ} = 2\alpha}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 135



Nos piden x.

- Se traza la circunferencia circunscrita al ΔABC de centro O y radio a.
- ΔABO es equilátero
- Notemos que ABOQ es un trapezoide

simétrico

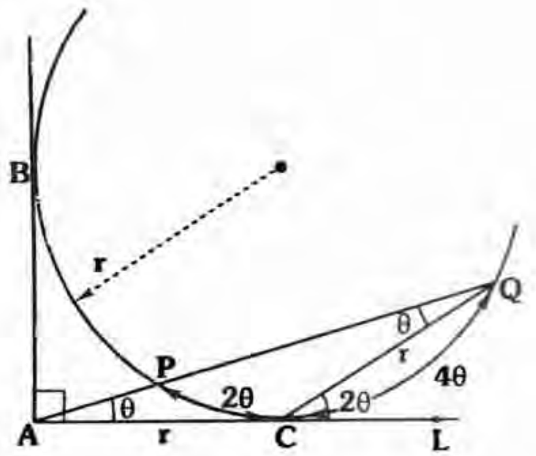
$\rightarrow$ m∢ABQ = m∢QBO = $x + 6$

$\rightarrow$ $2x + 12° = 60°$

$\therefore$ $x = 24°$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 136



Nos piden m∢PAC

- Dato: $m\widehat{CQ} = 2(\underbrace{m\widehat{CP}}_{2\theta})$

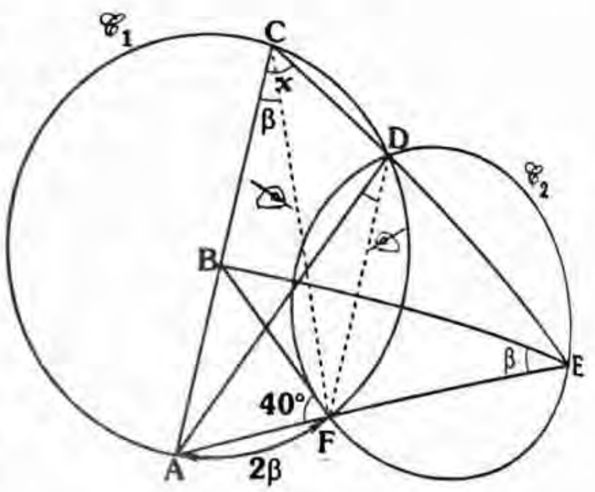
  $\rightarrow m\widehat{CQ} = 4\theta$

- Por ángulo inscrito: m∢PQC = θ
- Por ángulo seminscrito: m∢LCQ = 2θ
- En ΔACQ : m∢QAC = θ
- ΔACQ : isósceles $\rightarrow$ AC = CQ = r
- Como CQ = r $\rightarrow$ $\underbrace{m\widehat{CQ}}_{4\theta} = 60°$

$\therefore$ $\theta = 15°$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 137



Nos piden x.

- Sea $m\widehat{AF} = 2\beta$

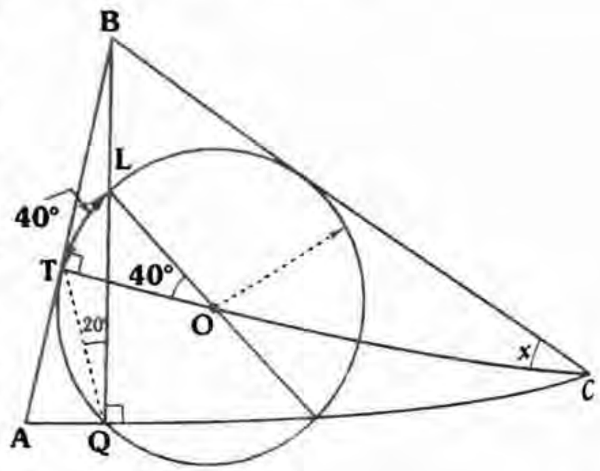
  $\rightarrow$ m∢ACF = β = m∢ADF

- En $\mathscr{C}_2$: m∢FEB = β
- Como m∢BCF = m∢BEF $\rightarrow$ ◻BCEF es inscriptible

$x = 40°$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 138



Nos piden x.

- Por ángulo central:

$$m\widehat{TL} = 40°$$

- Por ángulo inscrito:

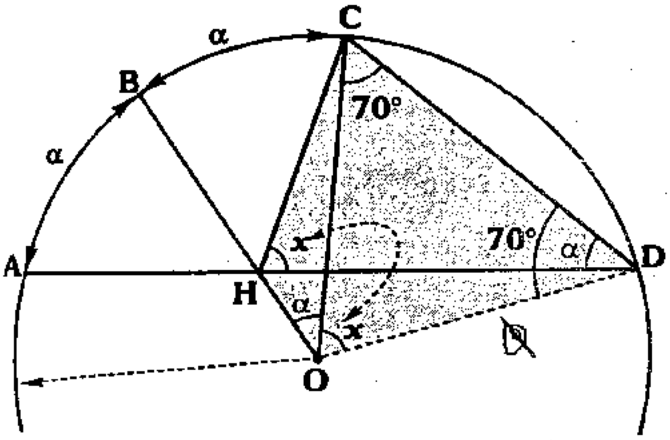
$$m\measuredangle TQB = 20°$$

- $\square QTBC$: inscriptible

$$\therefore \quad \mathbf{x = 20°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 139



Piden x.

- Notemos por ángulo central:

$$m\measuredangle BOC = \alpha$$

y por ángulo inscrito: $m\measuredangle ADC = \alpha$

- $\square OHCD$: inscriptible

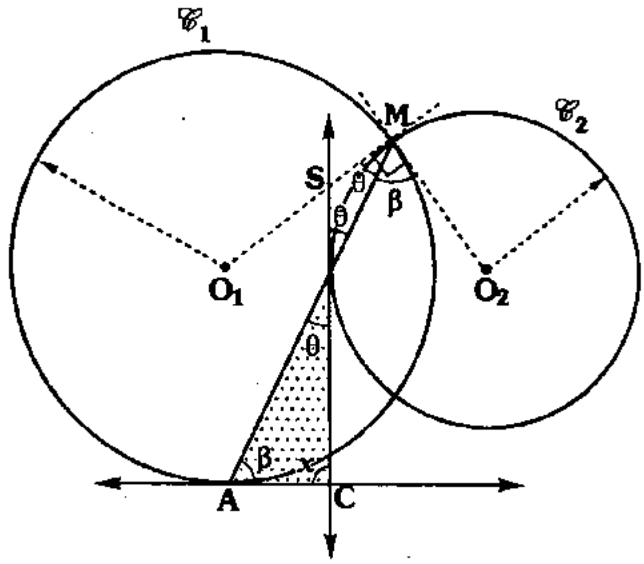
$$\rightarrow \quad m\measuredangle CHD = m\measuredangle COD = x$$

- ΔOCD : isósceles

$$\therefore \quad \mathbf{x = 40°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 140



Nos piden x.

- Como $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales

$$\rightarrow \quad m\measuredangle O_1MO_2 = 90°$$

- $\overleftrightarrow{O_1M}$ es tangente a $\mathscr{C}_2$ y $\overleftrightarrow{O_2M}$ es tangente a $\mathscr{C}_1$.

- $m\measuredangle SBM = m\measuredangle SMB = \theta$ y

$$m\measuredangle O_2MA = m\measuredangle CAM = \beta$$

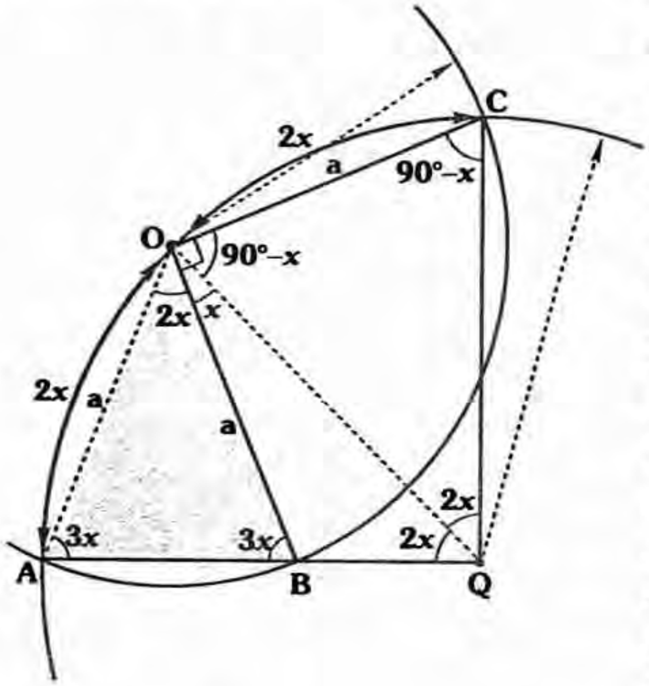
- Como :

$$\theta + \beta = 90°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 90°}$$

Clave E

Resolución N° 141



Nos piden $m\overset{\frown}{AO}$

- Sea $m\overset{\frown}{AO} = 2x \;\rightarrow\; m\sphericalangle AQO = 2x$
- $\square$AOCQ: trapezoide simétrico

$$\rightarrow\; m\sphericalangle OQC = 2x$$

- ΔQOC : isósceles

$$\rightarrow\; m\sphericalangle QOC = 90° - x$$

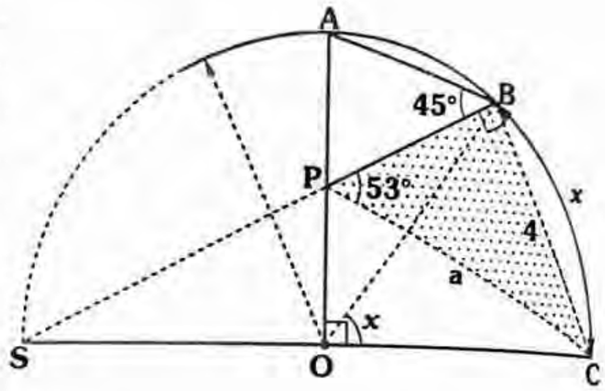
- ΔAOB : isósceles

$$3x + 3x + 2x = 180°$$

$$\therefore\; \mathbf{2x = 45°}$$

Clave C

Resolución N° 142



Piden x.

- Dato: a $\rightarrow$ menor valor entero
- Como $m\sphericalangle ABP = 45° \rightarrow$ al prolongar $\overline{PB}$ y completar el arco, tendremos:

$$m\overset{\frown}{AS} = 90°$$

- Luego $m\sphericalangle SBC = 90°$
- En $\triangle$PBC:

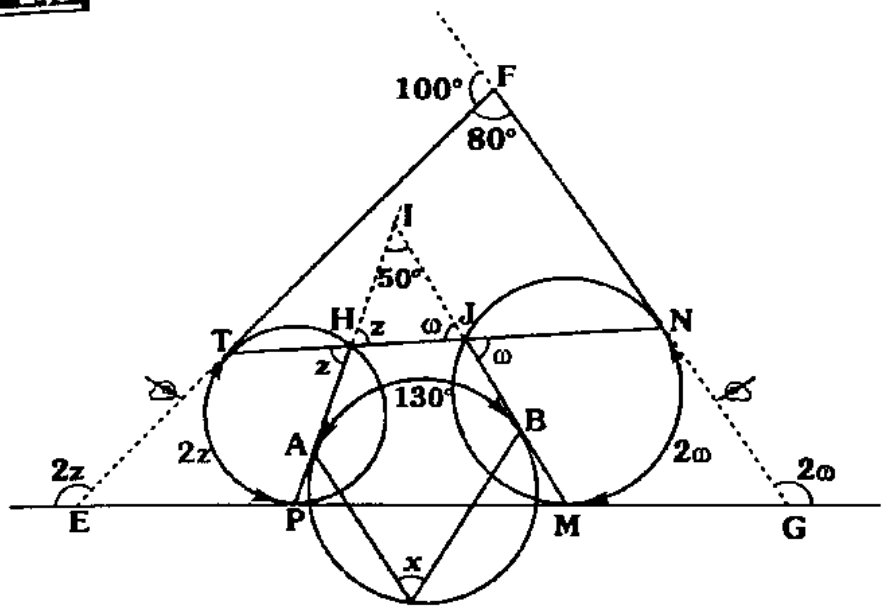
$$a > 4 \;\rightarrow\; a = 5$$

- $\triangle$PBC: notable de 53°
- $\square$OPBC: inscriptible

$$\therefore\; \mathbf{x = 53°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 143



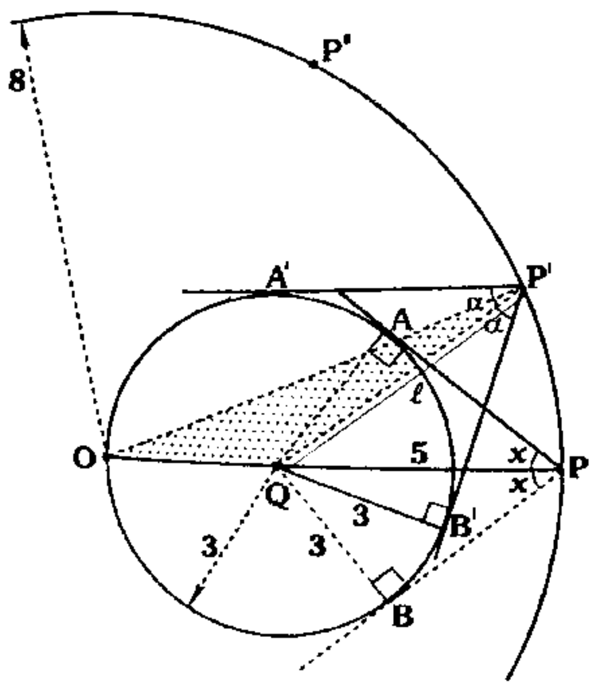
Nos piden x.

- Sea $m\measuredangle THP = z$ y $m\measuredangle MJN = \omega \rightarrow m\widehat{TP} = 2z$ y $m\measuredangle\widehat{MN} = 2\omega$
- En ΔEFG: $2z + 2\omega + 100° = 360° \rightarrow z + \omega = 130°$
- En ΔHJI: $m\measuredangle HIJ = 50° \rightarrow m\widehat{AB} = 130°$

$$\therefore \; x = 65°$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 144



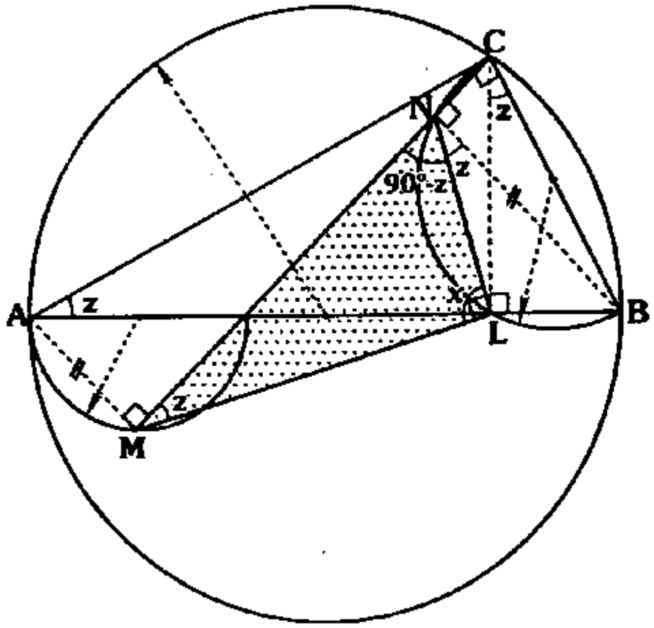
Si por un momento fijamos P, es claro que el mayor ángulo se dará cuando $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangente.

- Veamos los triángulos PBQ y P'B'Q', como $QP > ($ $\rightarrow$ $x > \alpha$
- $m\measuredangle APB$ máximo, será: $2x$

$$\therefore \; m\measuredangle APB = 74°$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 145



Nos piden x.

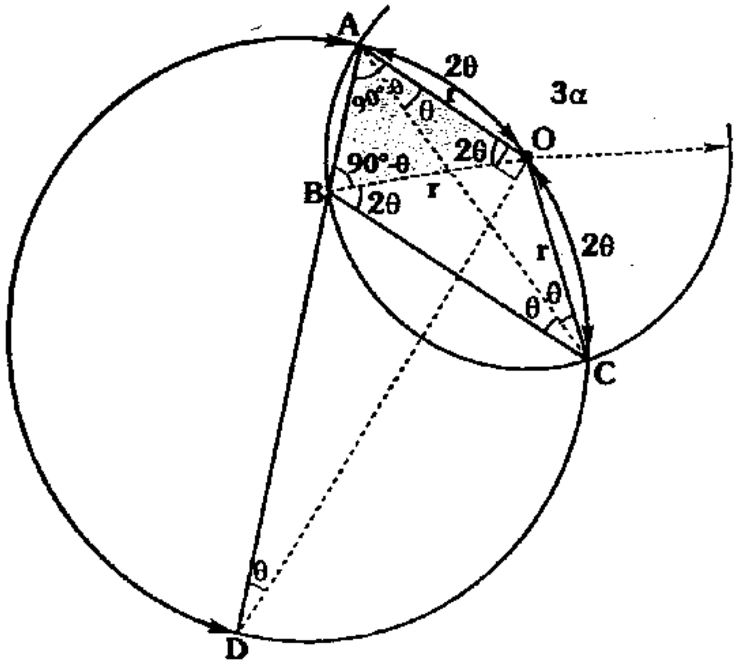
- Notemos que ⌂AMLC es inscriptible
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle CAB = m\sphericalangle CML = z$
- ⌂CNLB: inscrito
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle LCB = m\sphericalangle LNB = z$
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle LNM = 90° - z$
- En ΔMLN :

$$x + z + 90° - z = 180°$$

$$\therefore \ \ \mathbf{x = 90°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 146



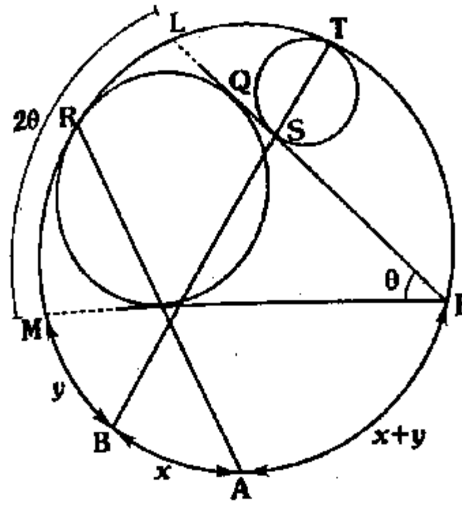
Nos piden $m\widehat{AD}$.

- Sea $m\widehat{AO} = m\widehat{OC} = 2\theta$
- ΔAOC : isósceles
- Como $\overline{AO} // \overline{BC}$ $\rightarrow$ $m\sphericalangle ACB = \theta$
- ΔBOC : isósceles
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle OBC = m\sphericalangle OCB = 2\theta$
- ΔAOB : isósceles
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle OAB = 90° - \theta$
  $\rightarrow$ $m\sphericalangle AOD = 90°$

$$\therefore \ \ \mathbf{m\widehat{AD} = 180°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 147



Nos piden x en función de θ

- Sea $m\widehat{MB} = y$ por ángulo inscrito:

$$m\widehat{ML} = 2\theta$$

- Por propiedad:

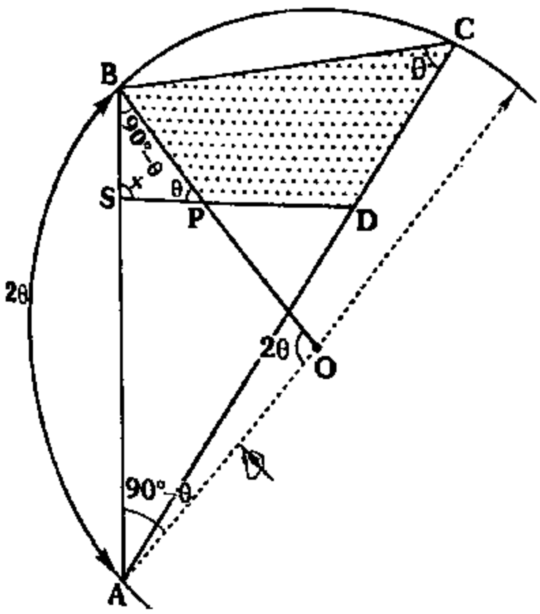
$$m\widehat{MA} = m\widehat{AH} = x + y$$

$$m\widehat{LMB} = m\widehat{BH} \rightarrow 2\theta + y = 2x + y$$

$$\therefore \; x = \theta$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 148



Por demostrar: $\overline{DP} \perp \overline{AB}$

- Sea $m\measuredangle ACB = \theta \rightarrow m\measuredangle AOB = 2\theta$
- En ΔAOB: $m\measuredangle ABO = 90° - \theta$
- En ⌂DPBC que es inscriptible:

$$m\measuredangle BPS = m\measuredangle BCD = \theta$$

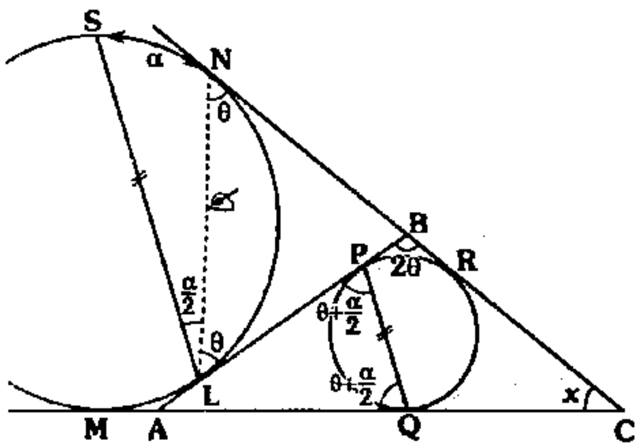
- En ΔBSP: $x + 90° - \theta + \theta = 180°$

$$\Rightarrow x = 90°$$

$$\therefore \; \overline{AB} \perp \overline{PD}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 149



Nos piden x en función de α.

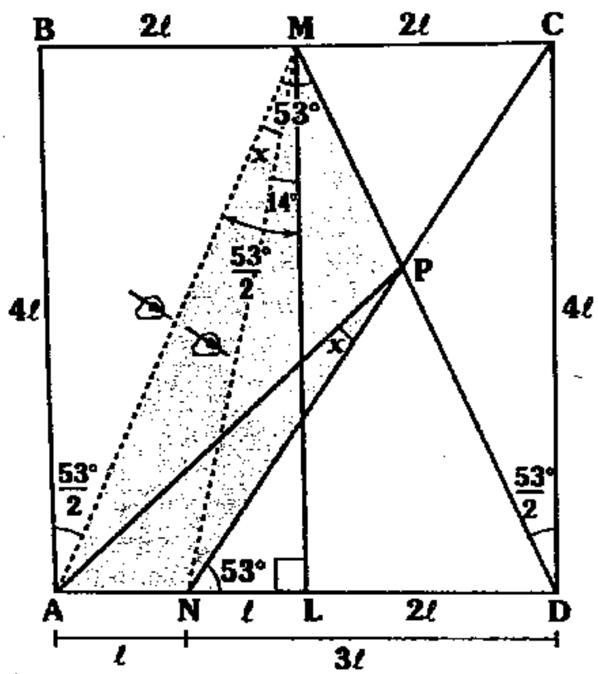
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle SLN = \dfrac{\alpha}{2}$
- Sea $m\measuredangle BLN = \theta \rightarrow m\measuredangle LBC = 2\theta$
- Como $\overline{LS} // \overline{QP} \rightarrow m\measuredangle LPQ = \theta + \dfrac{\alpha}{2}$
- En ⌂QPBC:

$$x + 2\theta = \theta + \frac{\alpha}{2} + \theta + \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \; x = \alpha$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 150



Nos piden x.

- Notemos que: $m\sphericalangle CND = m\sphericalangle AMD = 53°$

  $\rightarrow$ ⌂AMPN es inscriptible

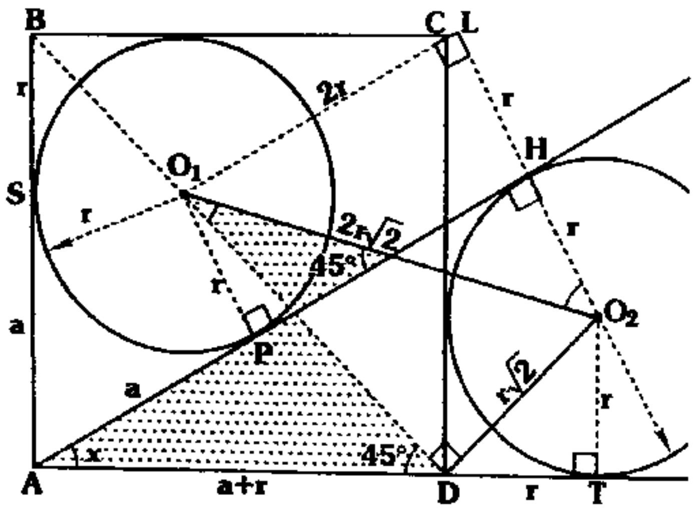
  $\rightarrow\ m\sphericalangle AMN = x$

- Sea traza $\overline{ML} \perp \overline{AD}$ (L en $\overline{AD}$)
- ⊿NLM: notable de 14°
- Finalmente: $x + 14° = \dfrac{\overset{26°30'}{\widehat{53°}}}{2}$

$\therefore$ **x = 12°30'**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 151



Nos piden x.

- Sea **r** el radio de las circunferencias congruentes y AS=a $\rightarrow$ AD=a+r y DT=r
- Como AP=a $\rightarrow$ PH=2r
- B, O_1 y D: colineales
- ⊿ O_1LO_2: notable de 45°

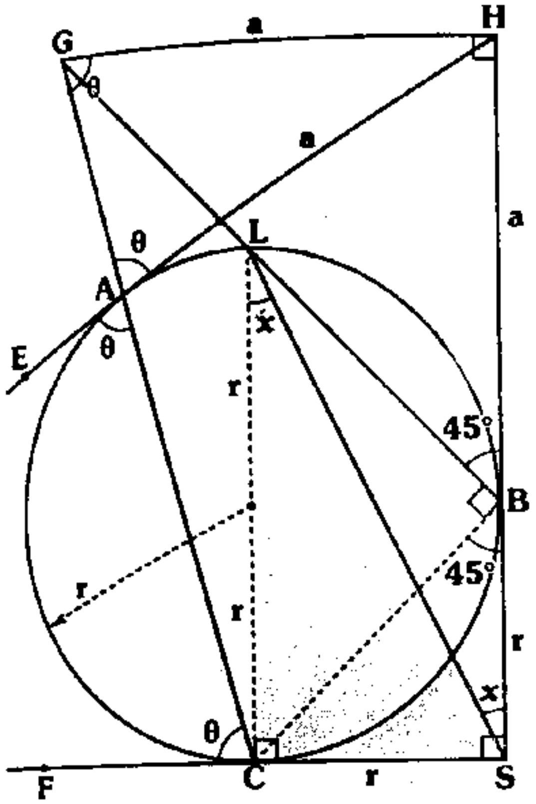
  $\rightarrow\ O_1O_2 = 2r\sqrt{2}$

- ⊿ O_1DO_2: notable de 30°
- En la región sombreada: $x + 45° = 30° + 45°$

$\therefore$ **x = 30°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 152



Nos piden x.

- Notemos que:

$$m\sphericalangle FCA = m\sphericalangle EAC = \theta$$

- Como $\overline{GH} // \overline{FS} \rightarrow m\sphericalangle HGA = \theta$

$$\rightarrow HG = HA = HB$$

$$\rightarrow m\sphericalangle GBH = 45°$$

- $CS = SB \rightarrow m\sphericalangle CBS = 45°$

$$\rightarrow m\sphericalangle CBL = 90°$$

$$\rightarrow \overline{LC} \text{ es diámetro}$$

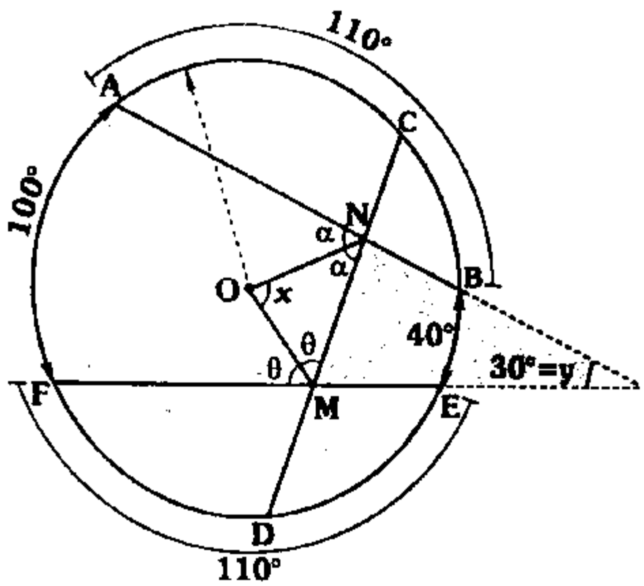
$\rightarrow \overline{CL} // \overline{SB} \rightarrow m\sphericalangle CLS = x$

- ⊿LCS: notable

$$\therefore \; \boldsymbol{x = \frac{53°}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 153



Piden x.

- Como AB=FE=CD

$$\rightarrow m\widehat{AB} = m\widehat{FE} = m\widehat{CD} = 110°$$

- Luego $m\widehat{AF} = 100°$
- Por ángulo exterior:

$$y = \frac{100° - 40°}{2} = 30°$$

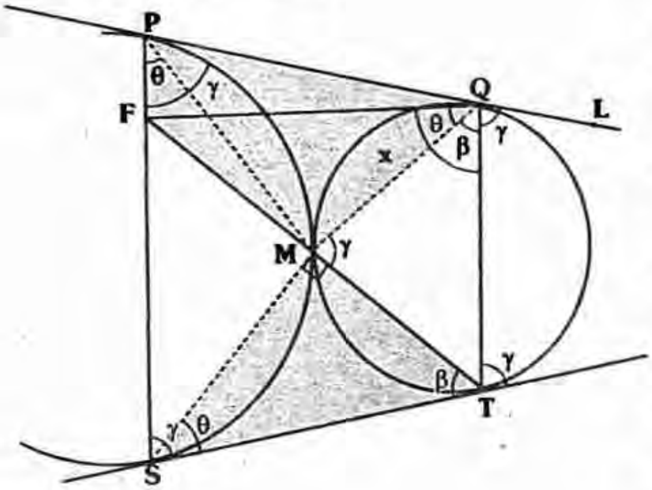
- En el ΔNML, por propiedad:

$$x = 90° - \frac{30°}{2}$$

$$\therefore \; \boldsymbol{x = 75°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 154



Nos piden x.

- Propiedad:

  $-m\sphericalangle SMT = 90° \rightarrow \theta+\beta=90°$

$m\sphericalangle PST = m\sphericalangle SPQ = m\sphericalangle TQL = m\sphericalangle TMQ = \gamma$

- $\square$FPQM: inscriptible

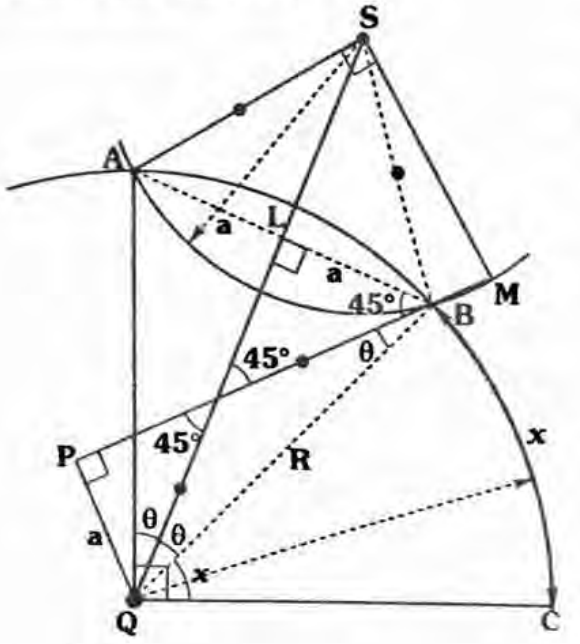
  $\rightarrow m\sphericalangle FPM = m\sphericalangle FQM = \theta$

- Notemos $x = \theta + \beta$

$\therefore\ \mathbf{x = 90°}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 155



Nos piden x.

- ASBQ: trapezoide simétrico

  $\rightarrow \overline{QS} \perp \overline{AB} \rightarrow AL = LB = PQ$

- $\triangle BPQ \cong \triangle BLQ \rightarrow m\sphericalangle PBQ = \theta$

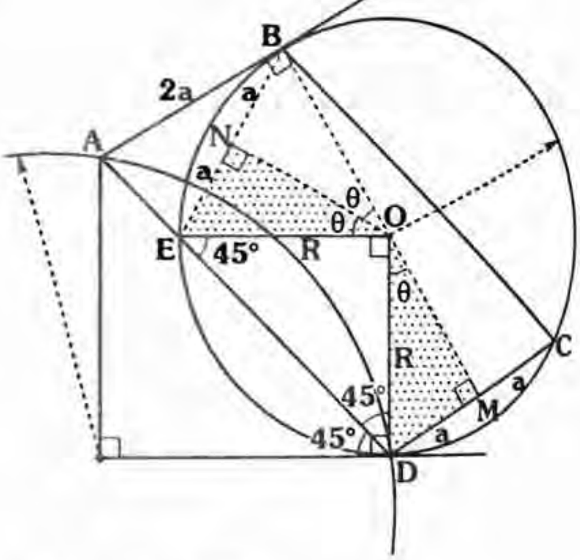
- Luego en Q: $x + 2\theta = 90°$

- En $\triangle QLB$: $45° + 2\theta = 90°$

$\therefore\ \mathbf{x = 45°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 156



Nos piden $m\overset{\frown}{CD}$.

- Como $\overline{OB} \perp \overline{AB}$ $\rightarrow$ al prolongar $\overline{BO}$ se tendrá:

  $\overline{BM} \perp \overline{CD} \rightarrow CM = MD = a$

- $AB = BE = CD = 2a$

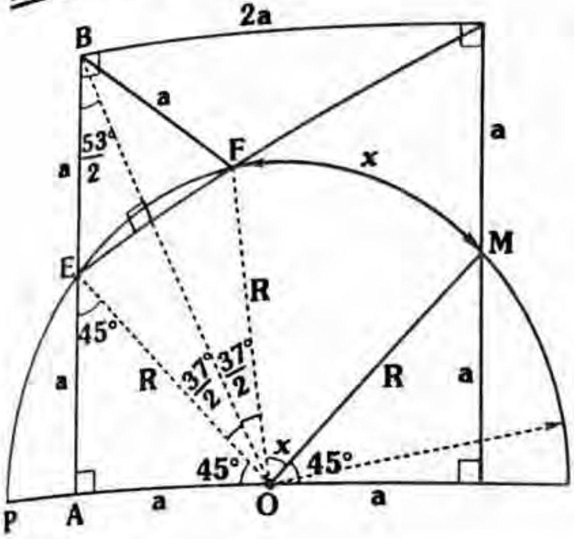
- $\triangle ENO \cong \triangle DMO$.

- En "O": $3\theta + 90° = 180° \rightarrow \theta = 30°$

$\therefore\ \mathbf{m\overset{\frown}{CD} = 60°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 157



Nos piden x.

- Notemos que $\triangle$BAC: notable de $53°/2$
- BEGF: trapezoide simétrico

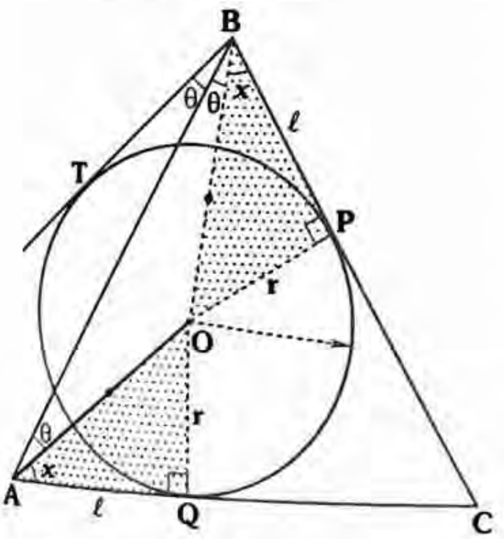
  $\rightarrow m\measuredangle EOB = m\measuredangle BOF = 37°/2$

- En "O": $45° + 37° + x + 45° = 180°$

$\therefore\ \ \boldsymbol{x = 53°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 158



Nos piden x.

- Notemos que $CQ = CP \Rightarrow AQ = BP$

  $\rightarrow \triangle AQO \cong \triangle OPB \rightarrow AO = OB$

- Como

  $\overline{TB} // \overline{AO} \rightarrow m\measuredangle TBA = m\measuredangle OAB = \theta$

  $m\measuredangle OBA$

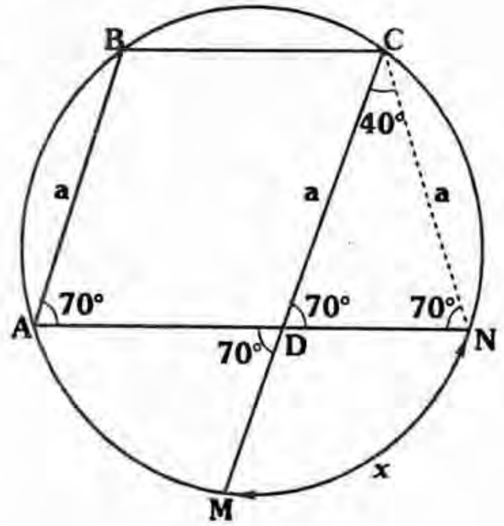
- Como $\overrightarrow{BO}$ bisectriz del ángulo TBP

  $\rightarrow x = 2\theta \;\; y \;\; x + \theta = 90°$

$\therefore\ \ \boldsymbol{x = 40°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 159



Nos piden x.

- ABCD: paralelogramo

  $\rightarrow \overline{BC} // \overline{AN}$

  $\rightarrow AB = CN$

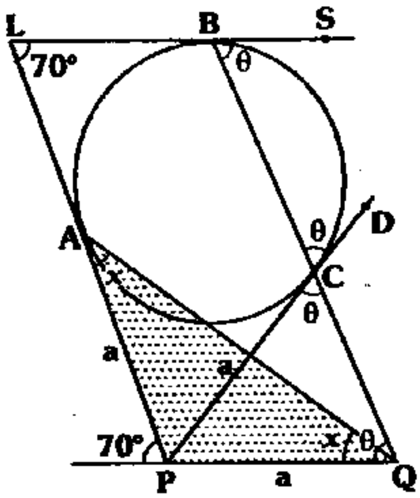
- ΔDCN : isósceles

  $\rightarrow m\measuredangle DNC = 70° \;\; y \;\; m\measuredangle MCN = 40°$

$\therefore\ \ \boldsymbol{x = 80°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 160



Nos piden x.

- Como

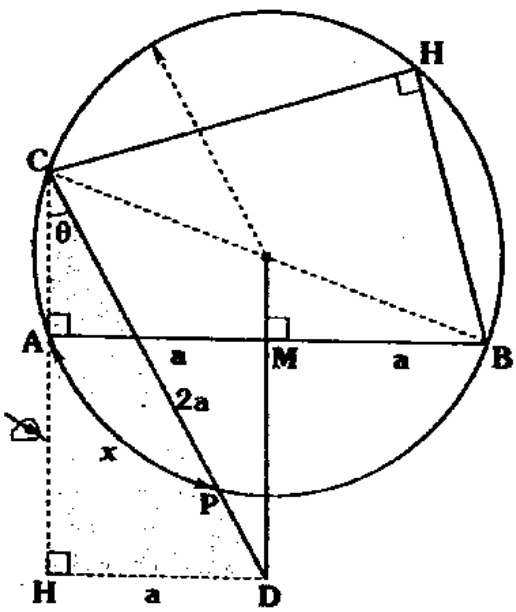
 $\overline{LB}//\overline{PQ} \rightarrow m\measuredangle PQB = m\measuredangle SBQ = \theta$

- $m\measuredangle SBC = m\measuredangle BCD = \theta$
- ΔPCQ : isósceles $\rightarrow$ $PQ=a$
- ΔPAQ : isósceles $\rightarrow x+x=70°$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=35°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 161



Nos piden x.

- Como $m\measuredangle CHB=90° \rightarrow \overset{\frown}{CB}$ es diámetro $\rightarrow m\measuredangle CAB=90°$
- Se prolonga $\overline{CA}$ y se traza $\overline{DH} \perp \overline{CA}$ $\rightarrow$ AMDH rectángulo.

 $\rightarrow DH=MA=a$ y $CD=2a$

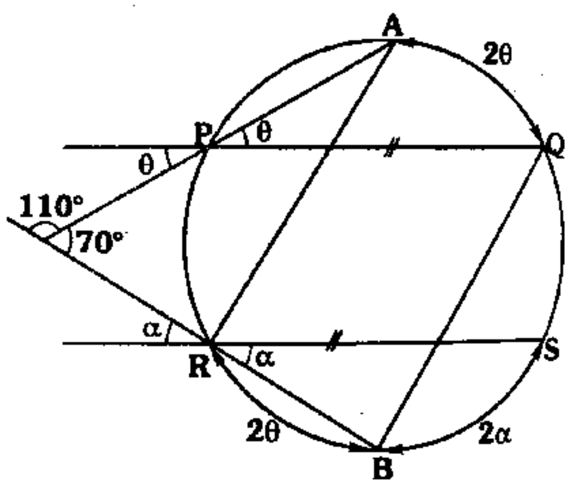
- ⊿DHC: notable, pues: $CD=2(HD)$

 $\rightarrow \theta=30°$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=60°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 162



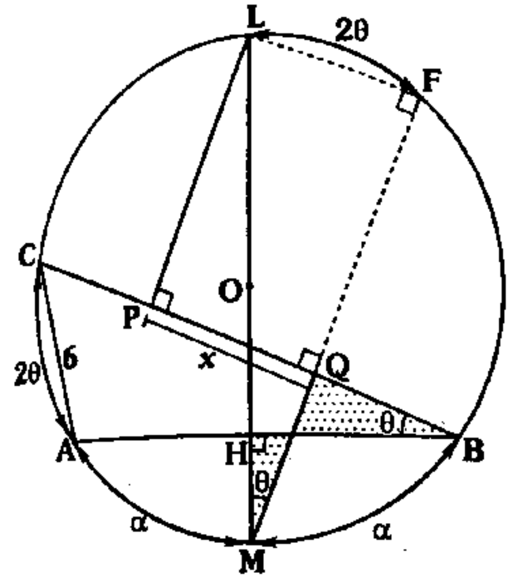
Nos piden $m\overset{\frown}{RBS}$

- Como $\overline{RA}//\overline{BQ} \rightarrow m\overset{\frown}{RB}=m\overset{\frown}{AQ}=2\theta$
- Sea $m\overset{\frown}{BS}=2\alpha$
- Como $\overline{PQ}//\overline{RS} \rightarrow \alpha+\theta=70°$

$\therefore$ $\boldsymbol{m\overset{\frown}{RBS}=2\alpha+2\theta=140°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 163



Nos piden x.

- Como $m\widehat{AM} = m\widehat{MB} \rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AB}$
- En la región sombreada.

$$m\measuredangle HMQ = m\measuredangle HBQ = \theta$$

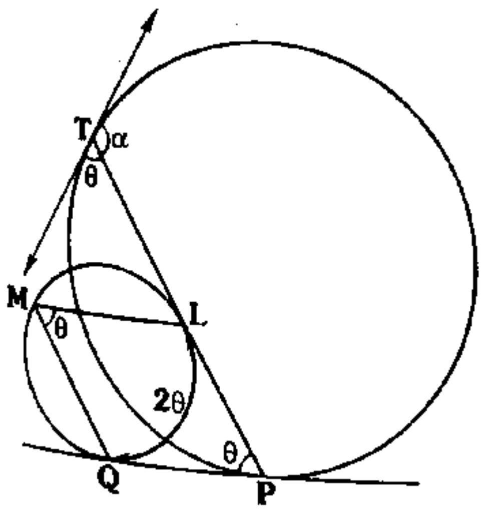
- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AC} = m\widehat{LF} \rightarrow AC = LF$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 6}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 164



Nos piden α.

- Como MLQP es un paralelogramo

$$\rightarrow m\measuredangle LMQ = m\measuredangle LPQ = \theta$$

- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{LQ} = 2\theta \quad \rightarrow \theta + 2\theta = 180°$$

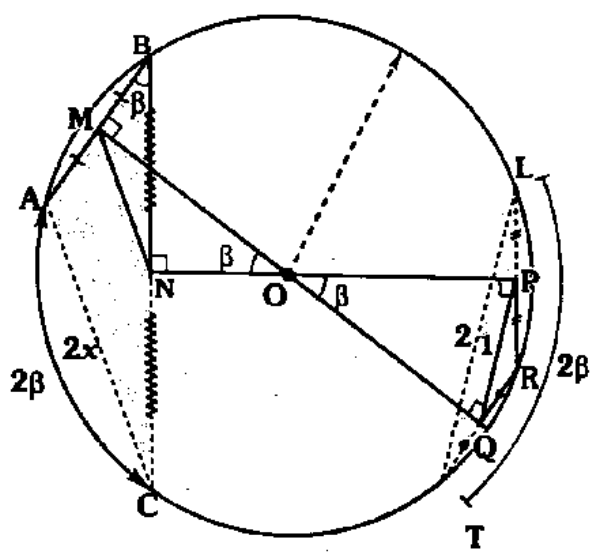
$$\rightarrow \quad \theta = 60°$$

- En T: $\theta + \alpha = 180°$

$$\therefore \ \boldsymbol{\alpha = 120°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 165



Nos piden x.

- Sea $m\measuredangle NOM = \beta \rightarrow m\measuredangle NBM = \beta$ y $m\widehat{LT} = 2\beta$
- Por base media en:

  * ΔACB: $AC = 2x$

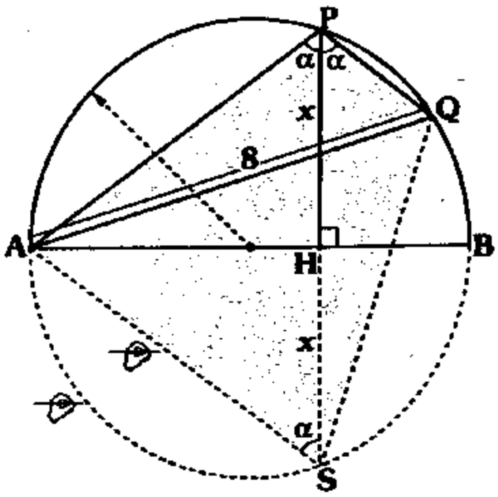
  * ΔLRT: $CT = 2$

- Como $m\widehat{AC} = m\widehat{LT} \rightarrow 2x = 2$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 1}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 166



Nos piden x.

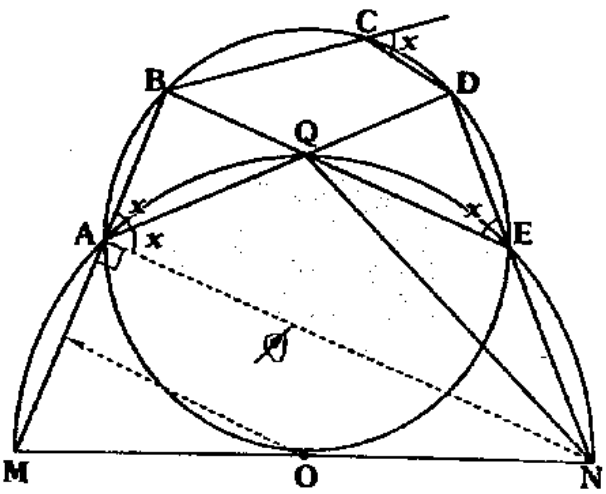
- Se completa la circunferencia y se prolonga $\overline{PH}$ hasta S $\rightarrow$ m∢ASP $= \alpha$
- APQS: trapecio isósceles

$$2x = 8$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 167



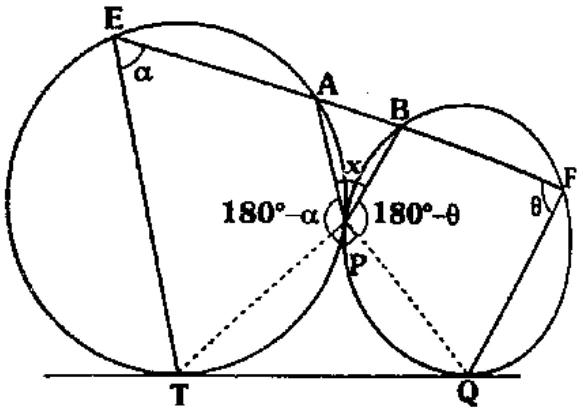
Nos piden x.

- ⌂ABCD inscrito $\rightarrow$ m∢BAD $= x$
- ⌂BCDE inscrito $\rightarrow$ m∢BED $= x$
- ⌂AQEN inscrito $\rightarrow$ m∢MAN $= x$
- Como m∢NAM $= 90° \rightarrow 2x = 90°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 45°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 168



Nos piden x.

Dato: $\alpha + \theta = 140°$

- En los ⌂s inscritos TPAE y PBFQ:

  m∢TPA $= 180° - \alpha$ y

  m∢QPB $= 180° - \theta$

- En P:

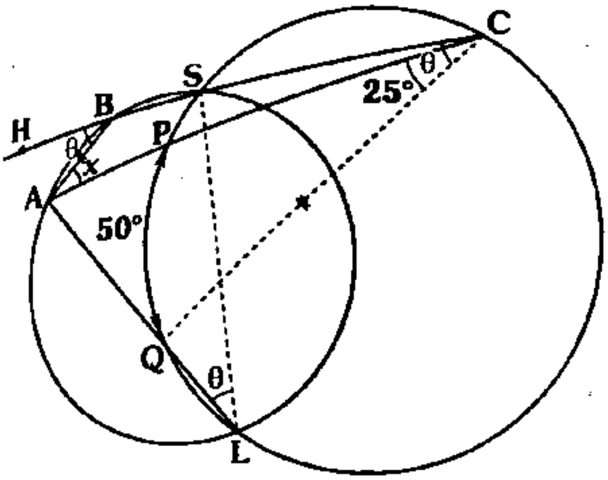
$$x + 180° - \alpha + 90° + 180° - \theta = 360°$$

$$\rightarrow x = \alpha + \theta - 90°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 50°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 169



Nos piden x.

- Sea $m\measuredangle ALS=\theta$

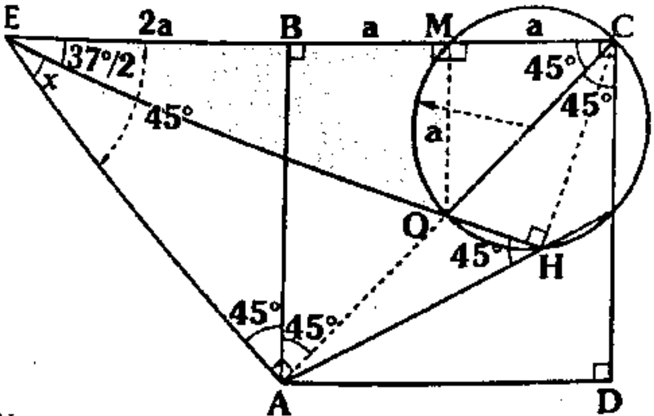
  $\rightarrow m\measuredangle HBA=\theta$ y $m\measuredangle QCS=\theta$

- Luego $\overline{AB}\,//\,\overline{QC}$
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle QCP=25°$

$$\therefore\ x=25°$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 170



Nos piden x.

- Como O es centro del cuadrado ABCD
  $\rightarrow$ A, O y C son colineales
- Notamos que $m\measuredangle AHE=m\measuredangle ACE$
- ⌂EAHC: inscriptible

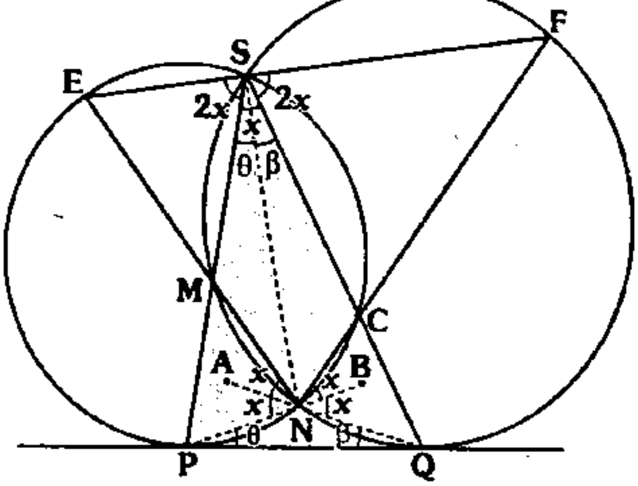
  $\rightarrow m\measuredangle CAE=90°$

- En ⊿CAE: $CB=BE=2a$
- ⊿OMKE: notable de $37°/2$

$$\therefore\ x=53°/2$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 171



Nos piden x.

- Sea $m\measuredangle PSN=\theta$ y $m\measuredangle NSQ=\beta$

  $\rightarrow x=\theta+\beta$

- En ΔPNQ: $m\measuredangle ANP=m\measuredangle BNQ=x$
- En ⌂PNCS y ⌂QNMS: ambos inscritos, se cumple:

  $m\measuredangle ANE=m\measuredangle BNC=x$

- También:

  $m\measuredangle PNE=m\measuredangle PSE=2x$

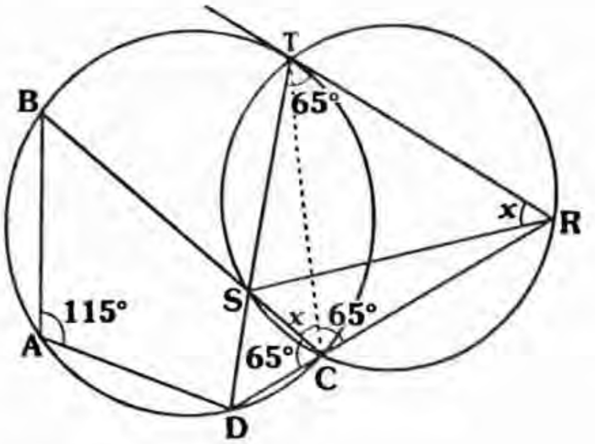
  $m\measuredangle QNF=m\measuredangle QSF=2x$

- En "S": $2x+x+2x=180°$

$$\therefore\ x=36°$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 172



Nos piden x.

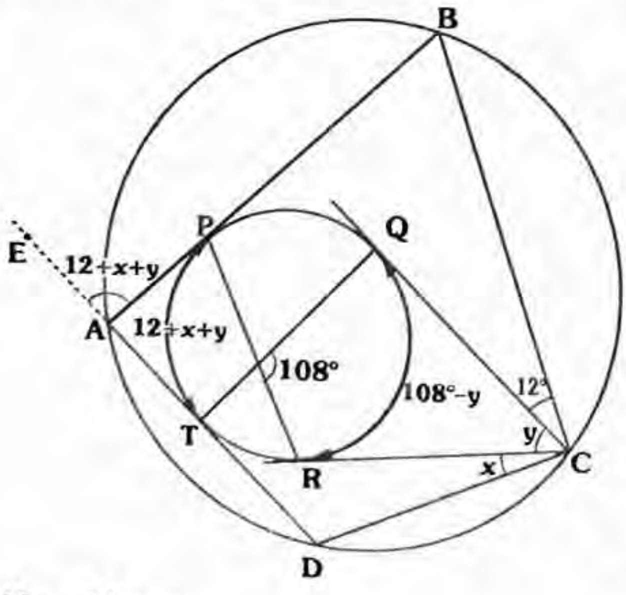
- En ⌂ABCD inscrito: $m\measuredangle DCB = 65°$
- En ⌂SCRT: $m\measuredangle STR = 65°$
- Como

  $m\widehat{TCD} = 130° \rightarrow m\measuredangle TCR = 65°$
- En "C": $65° + x + 65° = 180°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 50°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 173



Nos piden x.

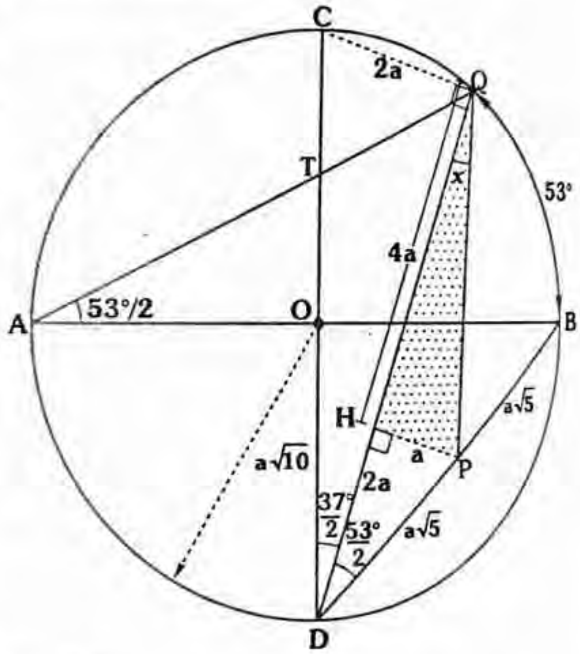
- Sea $m\measuredangle QCR = y \rightarrow m\widehat{QR} = 180° - y$
- En ⌂ABCD: $m\measuredangle EAB = 12 + x + y$
- Por propiedad: $m\widehat{PT} = 12 + x + y$
- Por ángulo interior:

$$108° = \frac{12° + x + \cancel{y} + 180° - \cancel{y}}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 24°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 174



Piden x.

- Como OT=TC $\rightarrow$ AO=2(OT)

  $\rightarrow m\measuredangle OAT = \frac{53°}{2}$

- Luego $m\widehat{QB} = 53° \rightarrow m\measuredangle QDB = \frac{53°}{2}$

  y $m\measuredangle CDQ = \frac{37°}{2}$

- Se traza $\overline{PH} \perp \overline{DQ}$ (H en $\overline{DQ}$)

- En ⊿PHD:

  PH=a, HD=2a y $DP=a\sqrt{5}$

- En ⊿CQD:

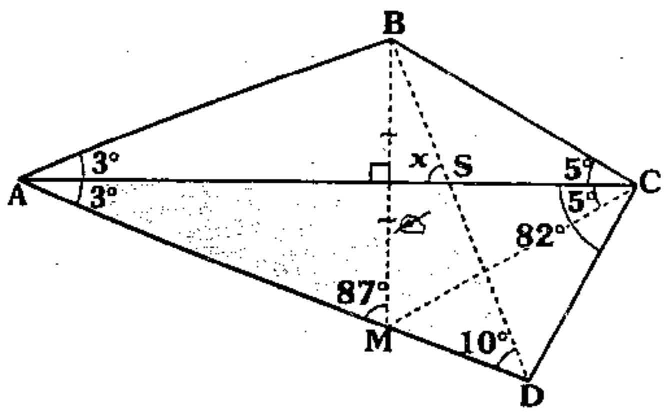
  $CD=2a\sqrt{10}$ → CQ=2a y QD=6a

  → QH = 4a

- En ⊿PHQ: **x=14°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 175



Nos piden x.

- Se traza $\overline{BM} \perp \overline{AC}$
- ΔABM: isósceles → $m\measuredangle BMA = 87°$
- Como $m\measuredangle BMA = m\measuredangle BCD$

  → ⌂MBCD

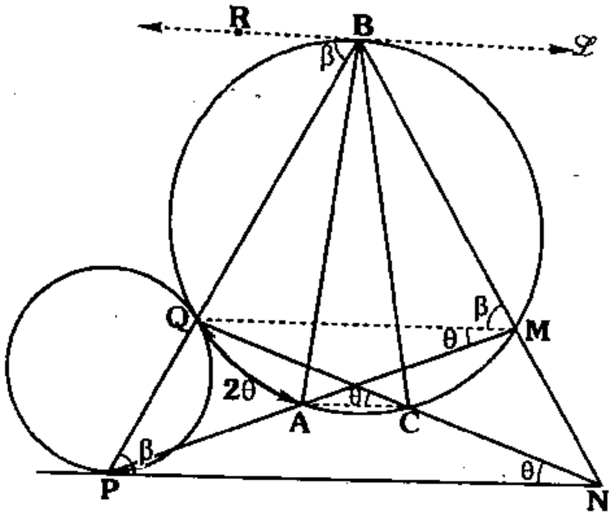
- Es incriptible → $m\measuredangle BDM = 10°$
- En ΔASO:

$$x = 3° + 10°$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x=13°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 176



Nos piden $\dfrac{AB}{AC}$.

- Como $m\widehat{PQ} = m\widehat{QB}$

  → $m\measuredangle QPN = m\measuredangle QNB = \beta$

- ⌂PQMN: inscriptible
- Luego $m\measuredangle PNQ = m\measuredangle PMQ = m\measuredangle ACQ$

  → $\overline{AC} // \overline{PN}$

- Cuando trazamos la tangente $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en A
- Notaremos:

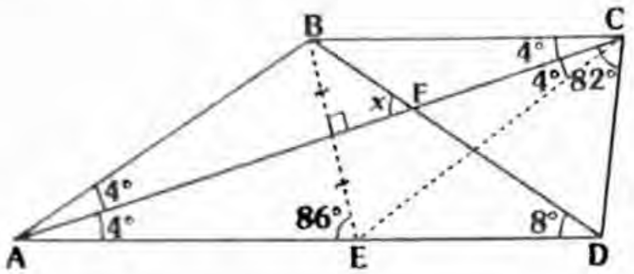
  $m\measuredangle PBR = \beta \rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{PN} // \overline{AC}$

- Como $\overline{AC} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ → AB=BC

$$\therefore \ \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{BC}} = \mathbf{1}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 177



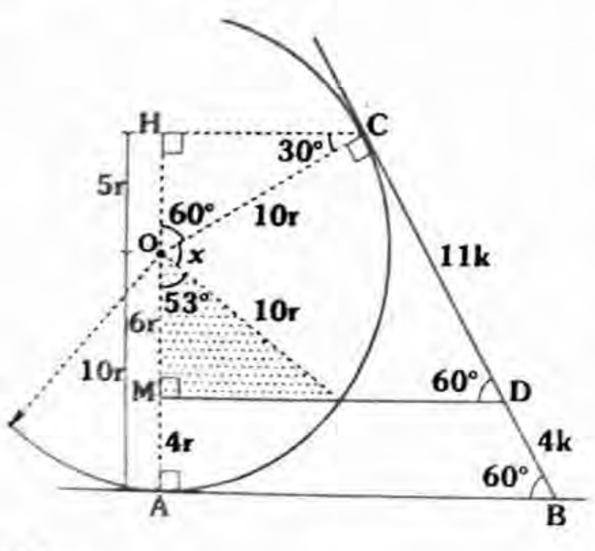
Nos piden x.

- Se traza $\overline{BE} \perp \overline{AD} \rightarrow \triangle BAE$: isósceles
  $\rightarrow m\measuredangle BEA = 86°$
- Observemos que $m\measuredangle BEA = m\measuredangle BCD$
  $\rightarrow$ ⏢EBCD: incriptible
  $\rightarrow m\measuredangle EDF = 8°$
- En $\triangle AFD$: $x = 4° + 8°$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 12°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 178



Piden x.

- Se prolonga $\overline{AO}$ y se traza $\overline{CH} \perp \overleftrightarrow{AO}$
- ⊿OHC: notable de 30° $\rightarrow OC = 2(OH)$

Como $\dfrac{HM}{MA} = \dfrac{11}{4} \rightarrow$ sea $OC = 10r$

$\rightarrow OH = 5r \rightarrow AH = 15r \rightarrow AM = 4r$

$\rightarrow OM = 6r$

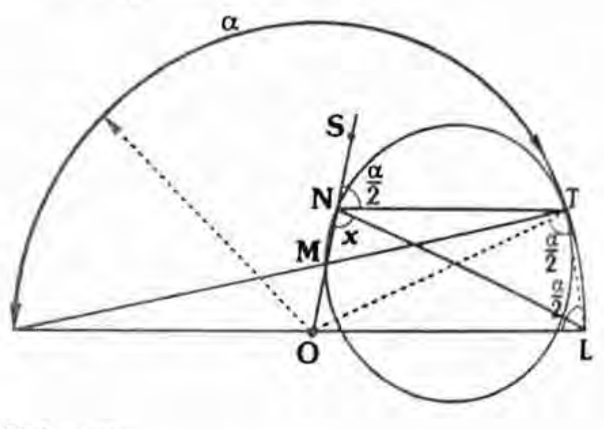
- ⊿OME: notable de 53°
- En "O":

$$x + 60° + 53° = 180°$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 67°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 179



Piden x.

- Como $m\overset{\frown}{AT} = m\overset{\frown}{MT} = \alpha$

  $\rightarrow m\measuredangle ALT = m\measuredangle SNT = \dfrac{\alpha}{2}$

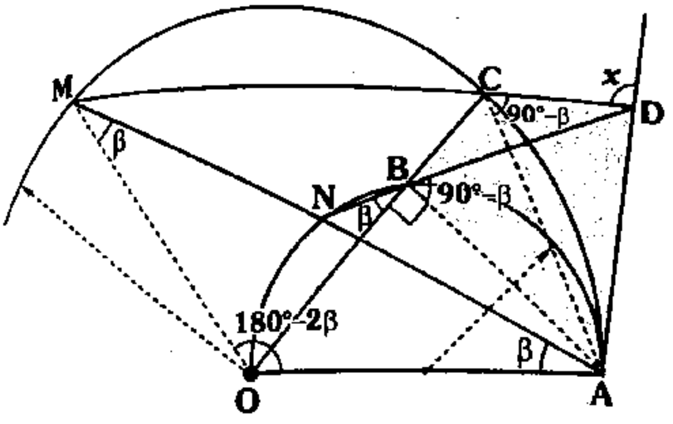
  $\rightarrow$ ⏢ONTL: inscriptible
- $\triangle OTL$: isósceles

  $\rightarrow m\measuredangle OTL = m\measuredangle OLT = \dfrac{\alpha}{2}$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = \frac{\alpha}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 180



Nos piden x.

- Como $m\sphericalangle OAM = \beta$

  $\rightarrow\ m\sphericalangle AOM = 180° - 2\beta$

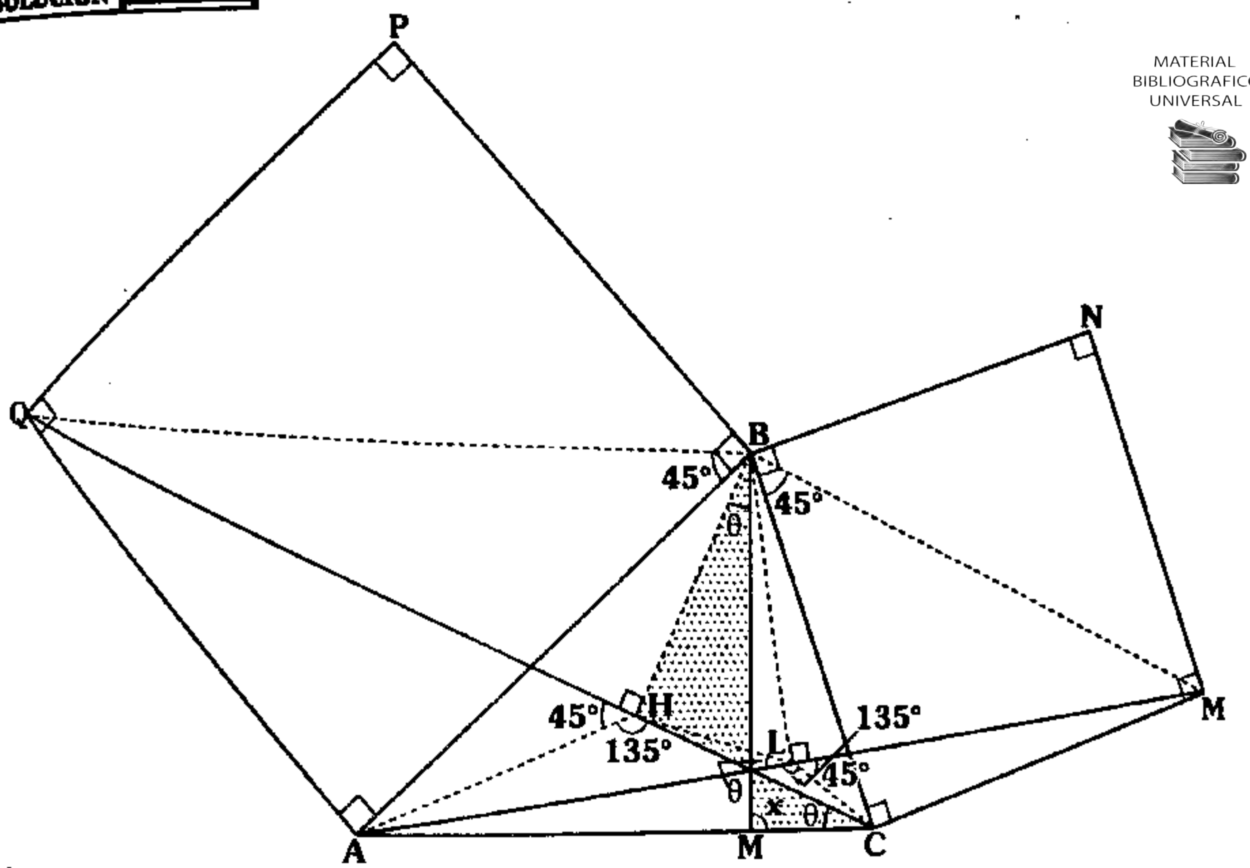
- $m\sphericalangle NBO = \beta \rightarrow\ m\sphericalangle ABD = 90° - \beta$

- ⌂ABCD: inscriptible

  $\therefore\ \boldsymbol{x = 90°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 181



Por demostrar: $\overline{BS} \perp \overline{AC}$

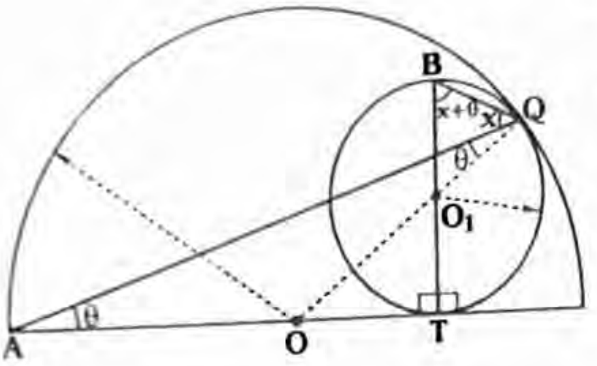
- Se traza $\overline{BH} \perp \overline{QC}$ y $\overline{BL} \perp \overline{AM}$ (H en $\overline{AC}$ y L en $\overline{AM}$)
- ⌂AHBQ y ⌂CLBM: inscriptible $m\sphericalangle AHQ = 45°$ y $m\sphericalangle CLM = 45°$

  ⌂AHLC: inscriptible $\rightarrow\ m\sphericalangle ACH = m\sphericalangle ALH = \theta$
- En la región sombreada: $x + \theta = 90° + \theta$

$\therefore\ \boldsymbol{x = 90°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 182



Nos piden x.

- O, O_1 y Q: colineales
- ΔAOQ : isósceles

  $\rightarrow m\measuredangle OAQ = m\measuredangle OQA = \theta$

- ΔO_1BQ : isósceles

  $\rightarrow m\measuredangle O_1QB = m\measuredangle O_1BQ = x+\theta$

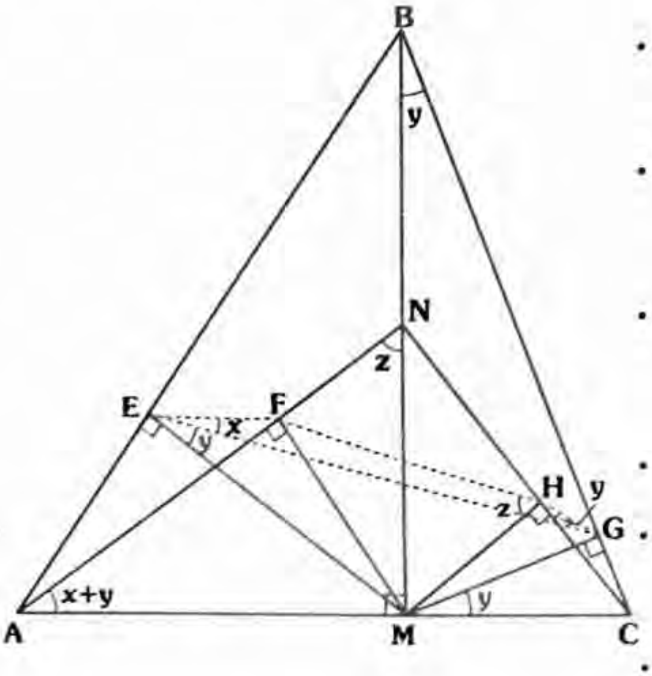
- En la región sombreada:

$$x + x + \not\theta = 90° + \not\theta$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 45°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 183



- Por demostrar que el ⌂EFHG es inscriptible
- Sea $m\measuredangle FEG = x$; $m\measuredangle FHM = z$ y $m\measuredangle CHG = y$
- Luego ⌂EFHG es inscriptible

$$\Leftrightarrow\ x + y + z = 90°$$

- ⌂MHGC: inscriptible $\rightarrow m\measuredangle GMC = y$

  $\rightarrow m\measuredangle MBC = y$

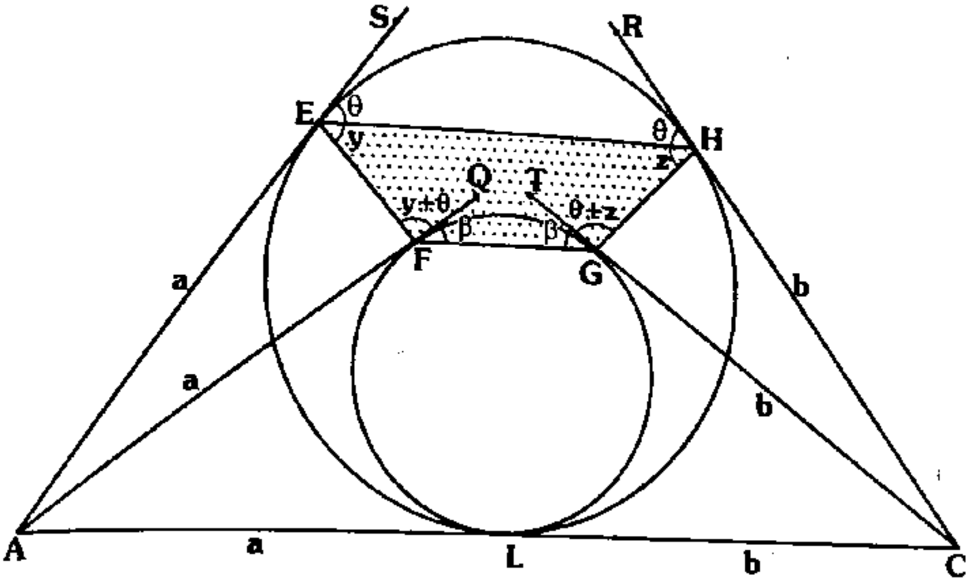
- ⌂MHGC: inscriptible $\rightarrow m\measuredangle MEG = y$
- ⌂AEFM: inscriptible

  $\rightarrow m\measuredangle MQF = x + y$

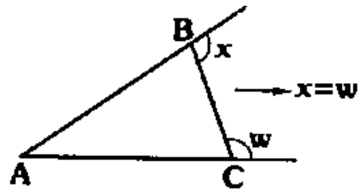
- ⊿AMN: $x + y + z = 90°$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 184



- Por demostrar que ⌂FEHG es inscriptible.
- Usaremos la siguiente propiedad: Si AB=AC



- En los ángulos isósceles AEF y CGH: $m\sphericalangle SEF = m\sphericalangle QFE = y + \theta$

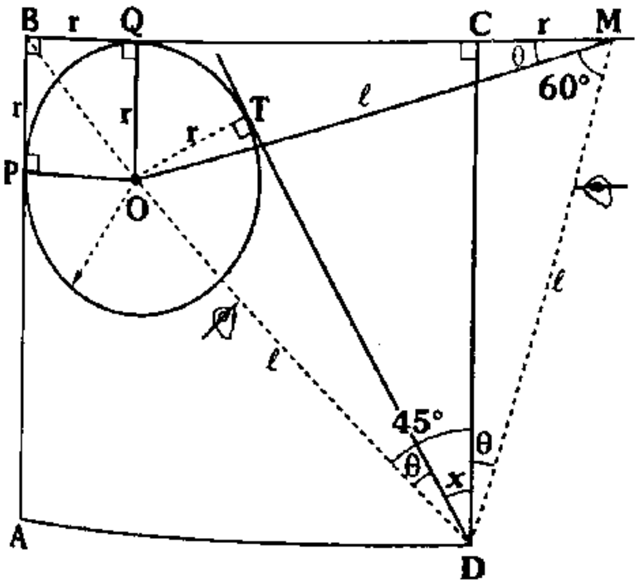
$m\sphericalangle TGH = m\sphericalangle RHG = \theta + z$

- En ⌂EFGH: $2y + 2\theta + 2\beta + 2z = 360°$

$y + \theta + \beta + z = 180°$

∴ ⌂EFGH: Inscriptible.

RESOLUCIÓN Nº 185



Nos piden x.

- Prolongamos $\overline{BC}$ hasta M tal que CM=r
- Luego: ⊿OTD ≅ ⊿OQM ≅ ⊿MCD

$\rightarrow$ OD = OM = MD

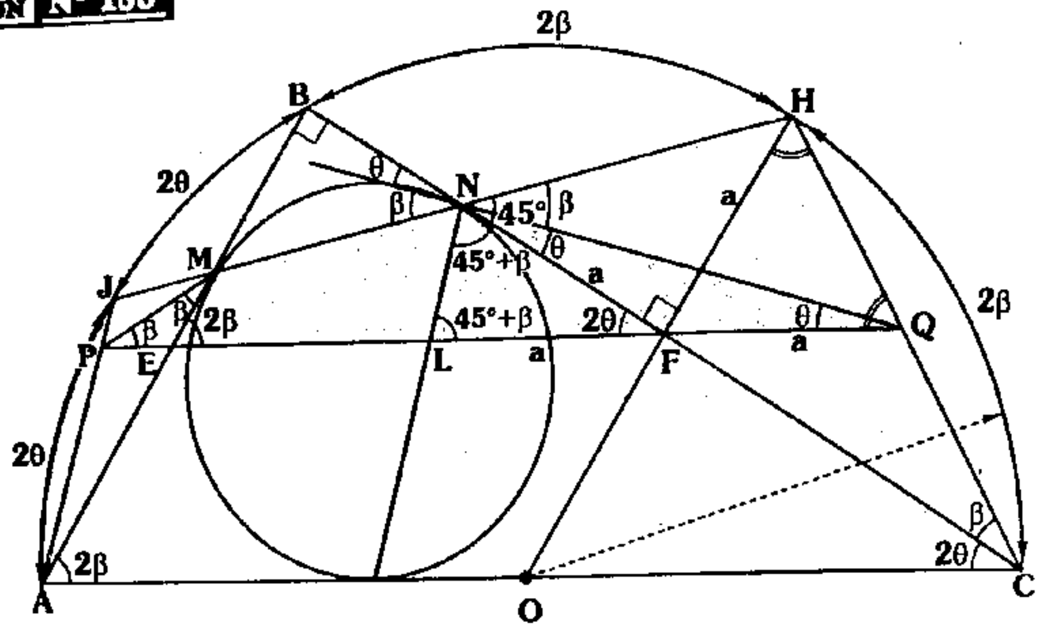
$\rightarrow$ ΔOMD : equilátero

- $45° + \theta = 60° \rightarrow \theta = 15°$
- $x + 2\theta = 60°$

∴ $x = 30°$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 186



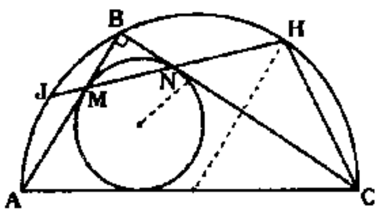
- Por demostrar: $\triangle$PMNQ es inscriptible
- Por propiedad $m\widehat{AJ} = m\widehat{JB} = 2\theta$ y $m\widehat{BH} = m\widehat{HC} = 2\beta$

  O, F y H: colineales
- ΔLNF : isósceles $\rightarrow$ $LF = FN = FQ$

  ΔNFQ : isósceles
- Análogamente: EP=PM
- Como $\theta + \beta = 45° \rightarrow m\measuredangle QNH = \beta$

  $\therefore$ $\triangle$PMNQ: Inscriptible.

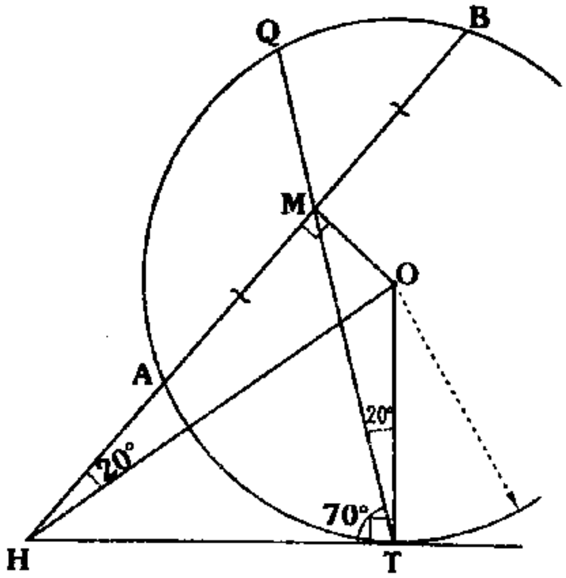
Propiedad



Se cumple:

- $m\widehat{JBH} = 90°$
- $m\widehat{AJ} = m\widehat{JB}$ y $m\widehat{BH} = m\widehat{HC}$

RESOLUCIÓN Nº 187



Nos piden $m\widehat{TAQ}$.

- Como AM=MB $\rightarrow$ $\overline{OM} \perp \overline{AB}$
- $\triangle$HMOT: inscriptible

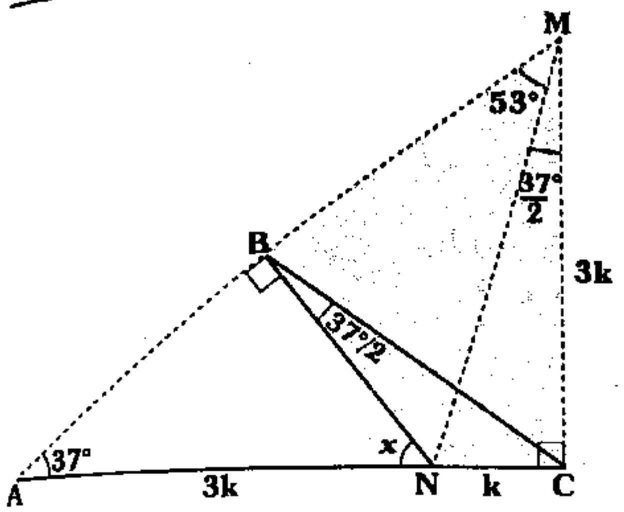
  $\rightarrow m\measuredangle OTM = 20°$

  $\rightarrow m\measuredangle HTQ = 70°$

  $\therefore$ $\mathbf{m\widehat{TAQ} = 140°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 188



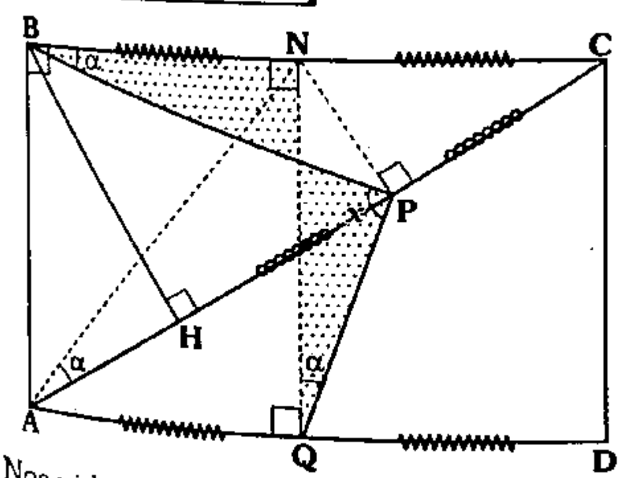
Nos piden x.

- Se prolonga $\overline{AB}$ hasta M tal que m∢ACM = 90°
- ⊿ACM: notable de 37° → CM=3k
- ⊿NCM: notable de 37°/2
  - → ⌂NBMC: inscriptible
  - → m∢NBA = 90°

$\therefore\ x = 53°$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 189



Nos piden x.

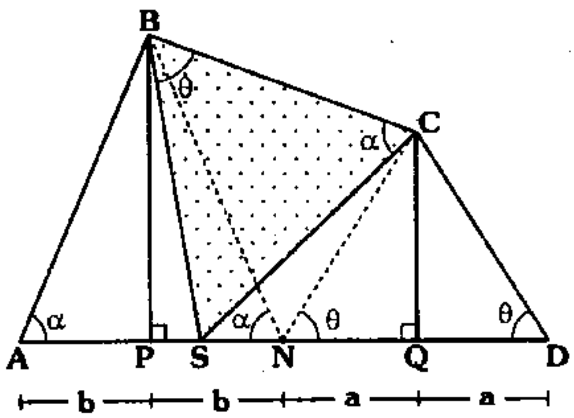
- Se traza $\overline{QN} \perp \overline{BC}$ → BN = NC
- En ⊿BHC: $\overline{NP}$ es base media → $\overline{NP} \perp \overline{AC}$
- Como ⌂ ABNP y ⌂ANPQ son inscriptibles
  - → m∢PBN = m∢NAP = m∢NQP = α
- En la región sombreada:

$$x + \alpha = 90° + \alpha$$

$$\therefore\ x = 90°$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 190



- Se ubica N en $\overline{PQ}$ tal que:

$$NQ = QD = a$$

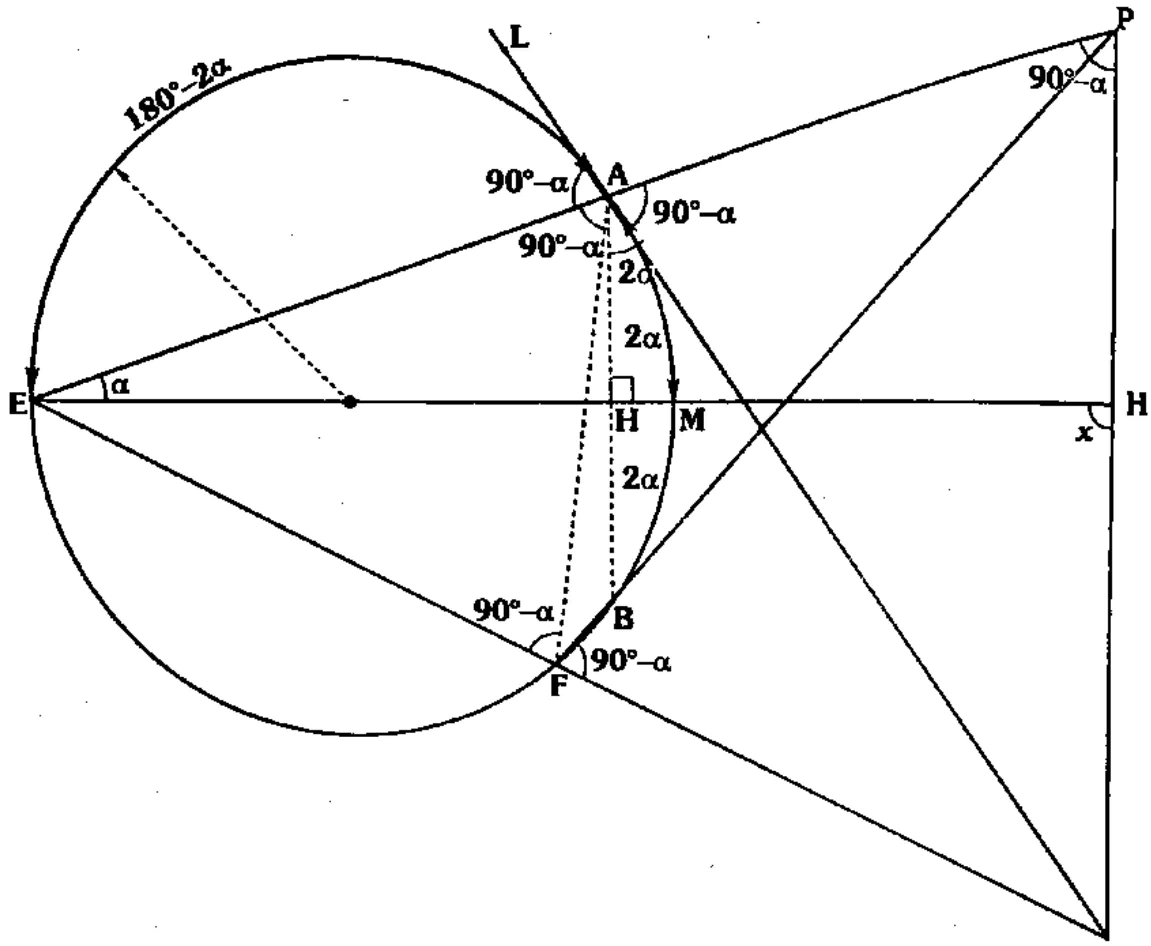
$$\rightarrow\ m∢DNC = \theta$$

- Luego el ⌂SBCN es inscriptible
  - → m∢BNA = α
  - → ΔABN es isósceles
  - → ΔP = PN = b

$$\therefore\ \mathbf{AD = 2(a+b) = 2(PQ)}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 191



Piden x.

- Como $m\widehat{AM} = m\widehat{MB} = 2\alpha \rightarrow \overline{EM} \perp \overline{AB}$
- Por ángulo inscrito:

$$m\sphericalangle AEM = \alpha \rightarrow m\sphericalangle EAH = 90° - \alpha$$

- ⌂ABFE: inscrito $\rightarrow m\sphericalangle LAE = 90° - \alpha$
- Por ángulo semiinscrito:

$$m\sphericalangle LAE = 90° - \alpha \rightarrow m\sphericalangle FAG = 90° - \alpha$$

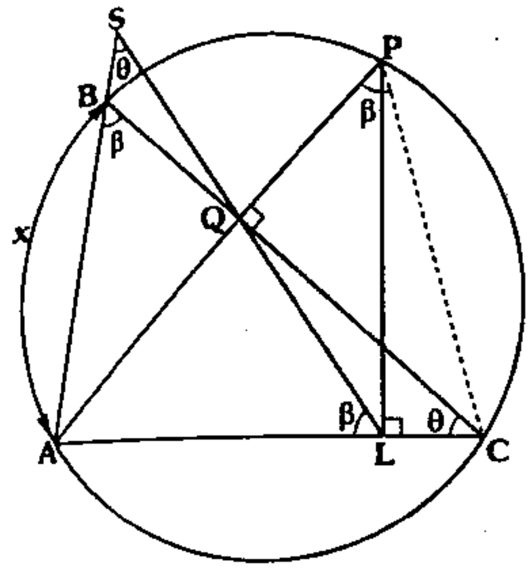
⌂FAPG: inscriptible $\rightarrow m\sphericalangle GPA = 90° - \alpha$

- En $\Delta EPH: x = 90° - \alpha + \alpha$

$$\therefore \; \boldsymbol{x = 90°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 192



Nos piden x.

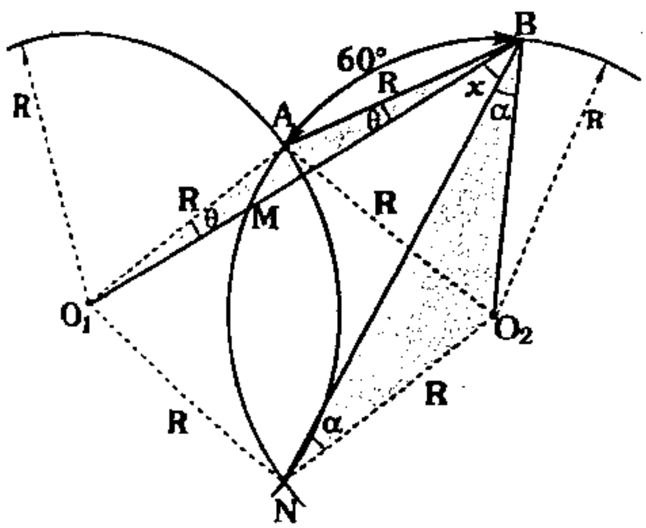
- Sea $m\sphericalangle ABC = \beta \rightarrow m\sphericalangle APC = \beta$
- $\triangle$QPCL: inscriptible

  $\rightarrow m\sphericalangle QLA = \beta$
- En la región sombreada: $m\sphericalangle QCL = \theta$

$$\therefore \quad x = 2\theta$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 193



Nos piden $m\overset{\frown}{MN}$.

- Como las circunferencias tienen igual radio $\rightarrow O_1AO_2N$ es un rombo

$$\rightarrow \quad \overline{O_1A} \parallel \overline{NO_2}$$

- ΔO_1AO_B y ΔNO_2B son isósceles
- Notemos que $x = \theta + \alpha$, pues:

$$\overline{O_1A} \parallel \overline{NO_2}$$

- ΔAO_2B : equilátero

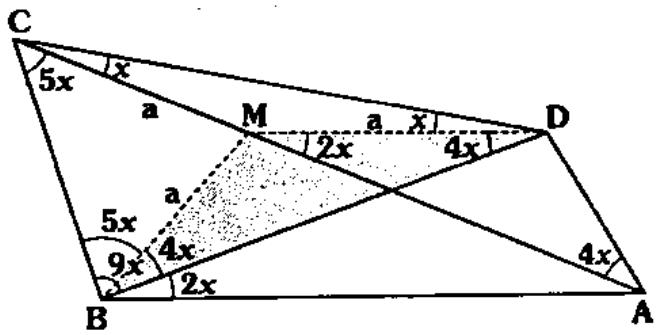
$$x + \theta + \alpha = 60°$$

$$\rightarrow \quad x = 30°$$

- Por ángulo inscrito; $m\overset{\frown}{MN} = 60°$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 194



Nos piden x.

- Se ubica M en $\overline{AC}$ tal que:

$$m\sphericalangle DBM = 4x$$

$\rightarrow$ $\triangle$BMDA es inscriptible

$\rightarrow m\sphericalangle AMD = 2x$

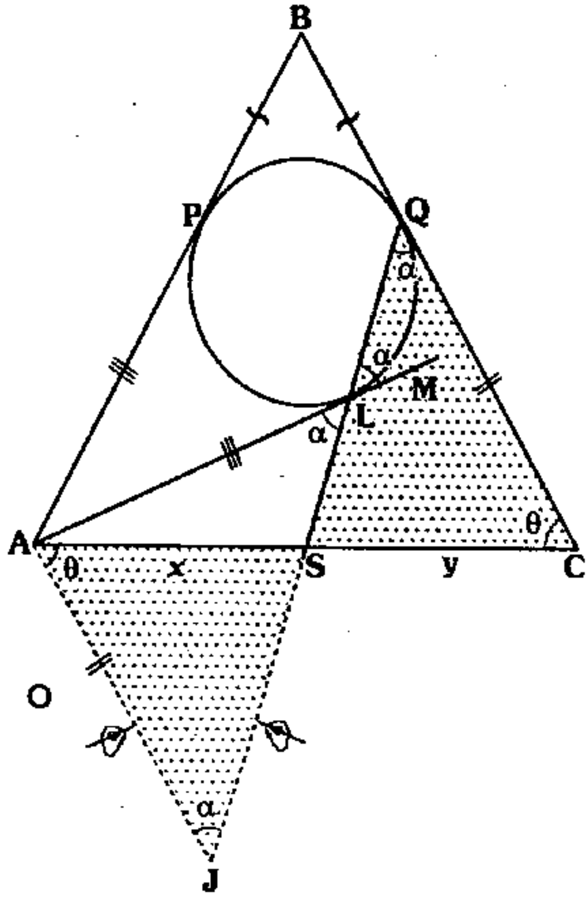
- ΔCMD y ΔBMC : isósceles

  $\rightarrow BM = MC = MD$
- ΔBMD : isósceles $\rightarrow m\sphericalangle MDB = 4x$
- ΔBCD : $\quad 9x + 6x + 5x = 180°$

$$\therefore \quad x = 9°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 195



Sea $AS = x$ y $SC = y$

Por demostrar: $x = y$

- Como $m\measuredangle CQM = m\measuredangle QLM = \alpha$

$$\rightarrow \ m\measuredangle ALS = \alpha$$

- Se prolonga $\overline{QL}$ hasta J tal que:

$$m\measuredangle QJA = \alpha$$

$$\rightarrow \ \overline{AJ} // \overline{BC}$$

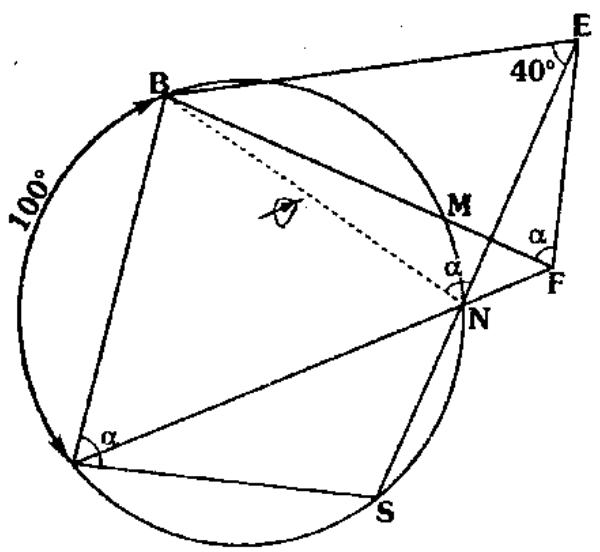
$$\rightarrow \ m\measuredangle JAS = \theta$$

- $\Delta JAS \cong \Delta QCS$ (ALA)

$$\therefore \ \boldsymbol{x = y}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 196



Nos piden $m\overset{\frown}{MN}$.

- ◠ABNS: inscriptible

$$\rightarrow \ m\measuredangle BNE = \alpha$$

- ◠ABNS: inscriptible

$$\rightarrow \ m\measuredangle BFN = 40°$$

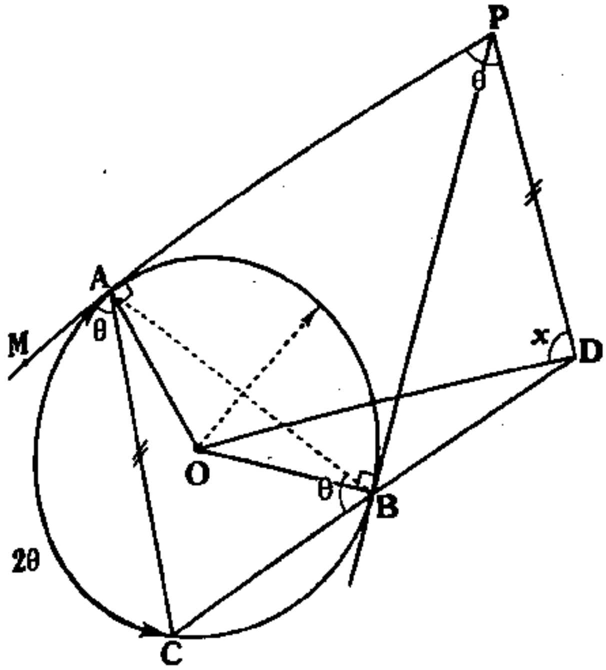
- Por ángulo exterior:

$$40° = \frac{100° - m\overset{\frown}{MN}}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{m\overset{\frown}{MN} = 20°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 197



Piden x.

- Sea $m\overset{\frown}{AC} = 2\theta$

  $\rightarrow$ $m\measuredangle MAC = \theta = m\measuredangle ABC$

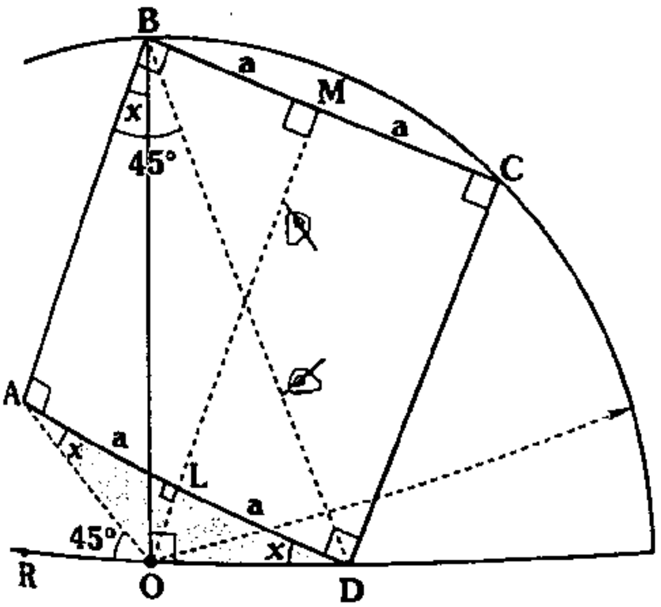
  $\rightarrow$ $m\measuredangle APD = \theta$

- ⌂APDB: inscriptible
- También ⌂OAPB: inscriptible
- Los puntos O, A, P, D y B son concíclicos de diámetro $\overline{OP}$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 90^\circ}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 198



Piden x.

- ⌂OABD: inscriptible

  $\rightarrow$ $m\measuredangle AOR = 45^\circ$

- Se traza $\overline{OM} \perp \overline{BC}$

  $\rightarrow$ BM=MC y AL=LD

  $\rightarrow$ AO=OD

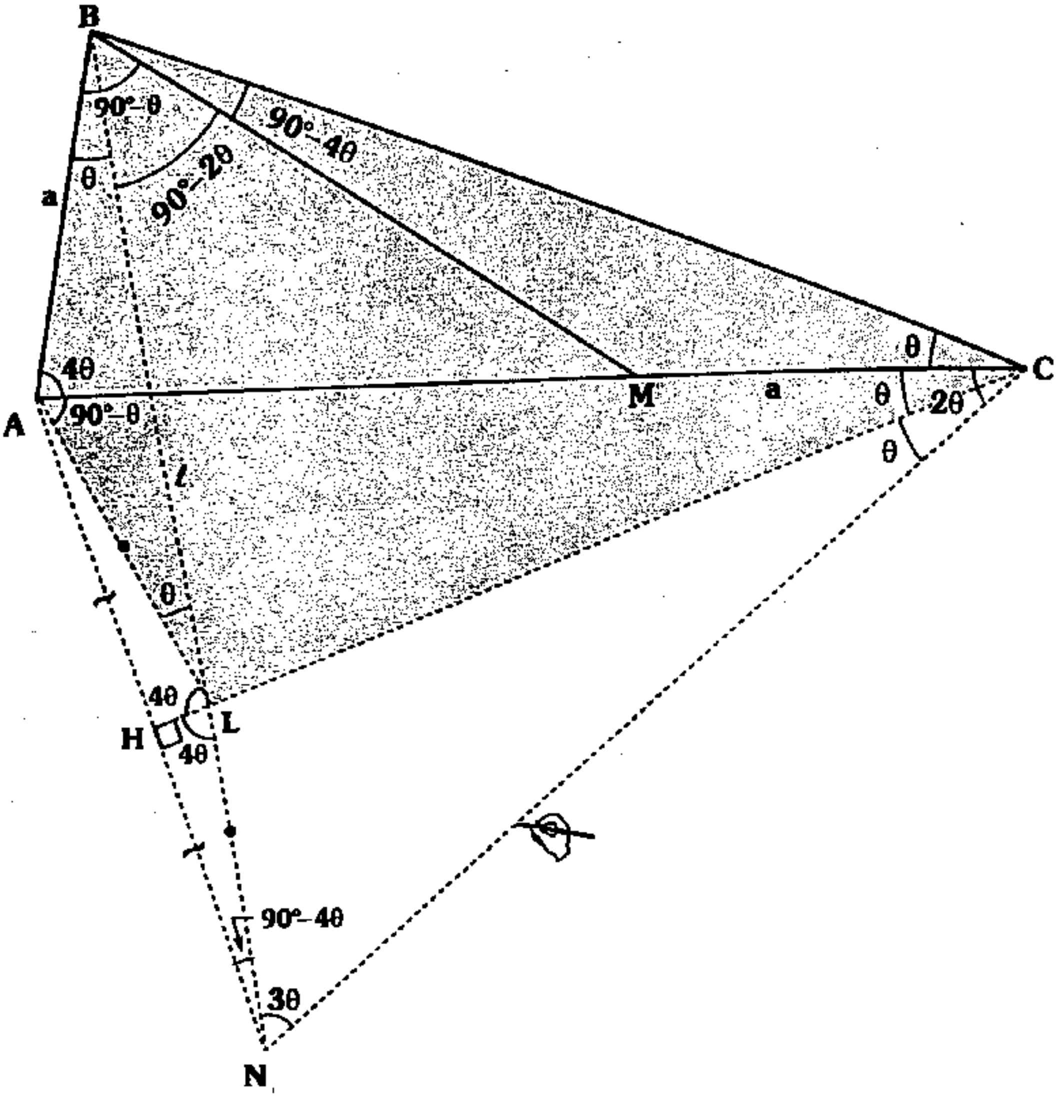
- ΔAOD : isósceles

$$x + x = 45^\circ$$

$$\therefore \; x = \frac{45^\circ}{2}$$

Clave D

Resolución Nº 199



Nos piden θ.

- Se ubica M tal que $m\sphericalangle ABN = \theta$ y BN=BC

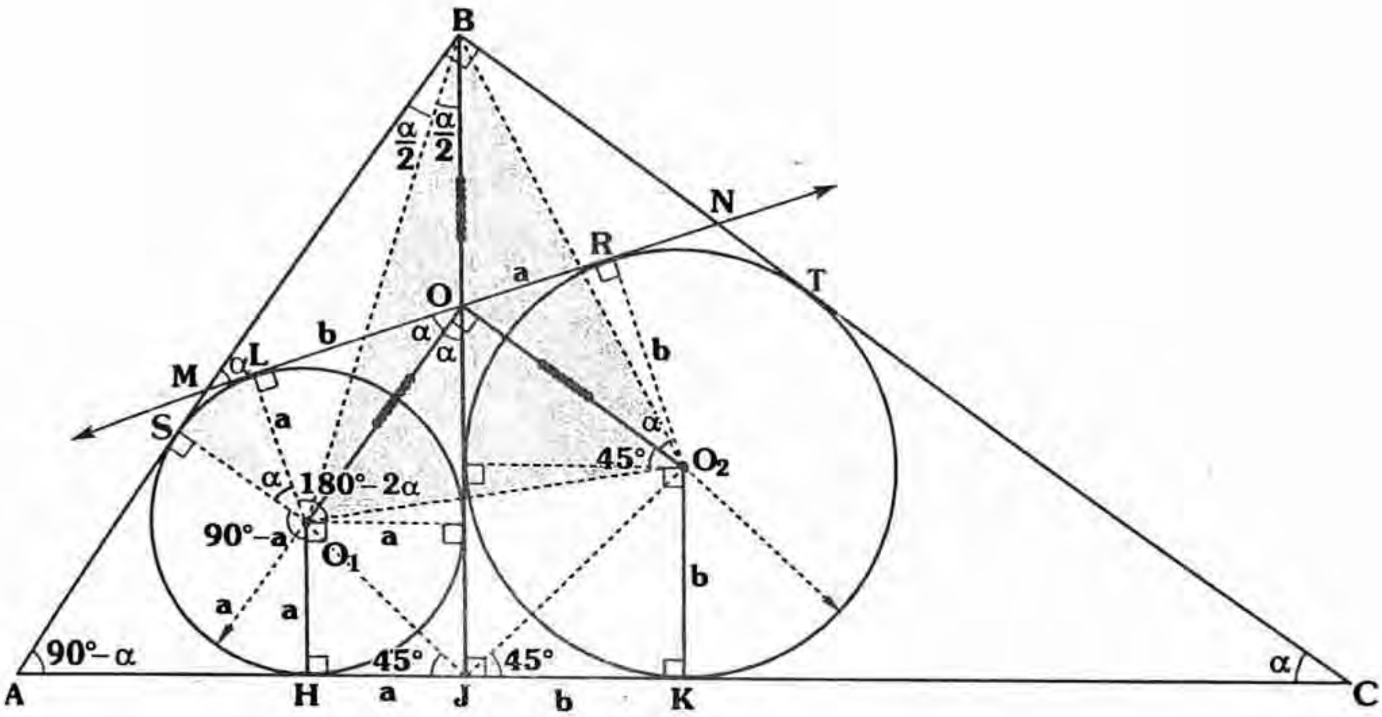
$$\rightarrow \Delta ABN \cong \Delta CBM \rightarrow m\sphericalangle ABN = 90° - 4\theta$$

- $m\sphericalangle NBC = 180° - 6\theta \rightarrow m\sphericalangle BNC = 3\theta$ y $m\sphericalangle ACN = 2\theta$
- ΔACN : isósceles, se traza la altura CH $\rightarrow m\sphericalangle ALH = m\sphericalangle HLN = 4\theta$
- ⌂ABCL: inscriptible $\rightarrow m\sphericalangle ALB = \theta$
- En L: $4\theta + 4\theta + \theta = 180°$

$$\therefore \ \theta = 20°$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 200



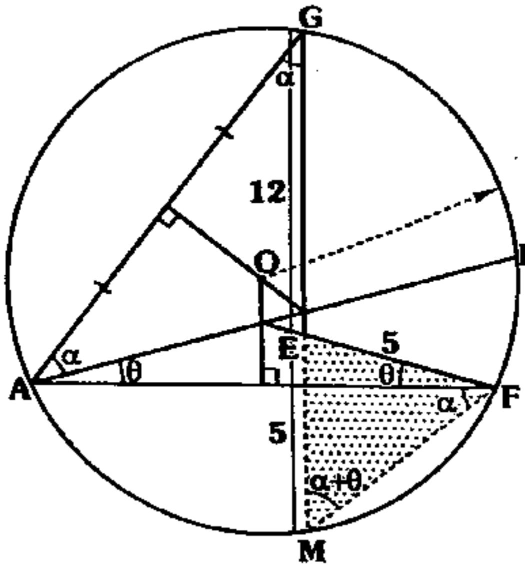
Nos piden demostrar que el ⌂AMNC es inscriptible.

- Por propiedad: HJ=OR=a y JK=OL=b
- $\triangle O_1LO \cong \triangle O_2RO \rightarrow OO_1OO_2$ y $m\measuredangle O_1OO_2 = 90°$
- Como $m\measuredangle O_1BO_2 = 45°$, $m\measuredangle O_1OO_2 = 90°$ y $O_1O = OO_2 \rightarrow O$ es circuncentro del $\Delta O_1OO_2 \rightarrow m\measuredangle OBO_1 = \dfrac{\alpha}{2}$
- Luego $m\measuredangle ABJ = \alpha = m\measuredangle BCA$
- En O_1: $m\measuredangle SO_1L = \alpha \rightarrow m\measuredangle LMB = \alpha$

$\therefore$ ⌂AMNC: inscriptible

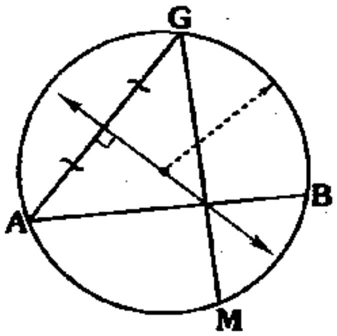
Clave B

Resolución Nº 201



Nos piden AB.

- Usaremos la siguiente propiedad
  Se cumple: AB=GM



- Sea $m\sphericalangle BAG = \alpha$

  $\rightarrow m\sphericalangle AGM = \alpha = m\sphericalangle AFM$

- Sea $m\sphericalangle BAF = \theta \rightarrow m\sphericalangle EFA = \theta$
- Por ángulo inscrito:

  $$m\sphericalangle GAF = m\sphericalangle EMF = \alpha + \theta$$

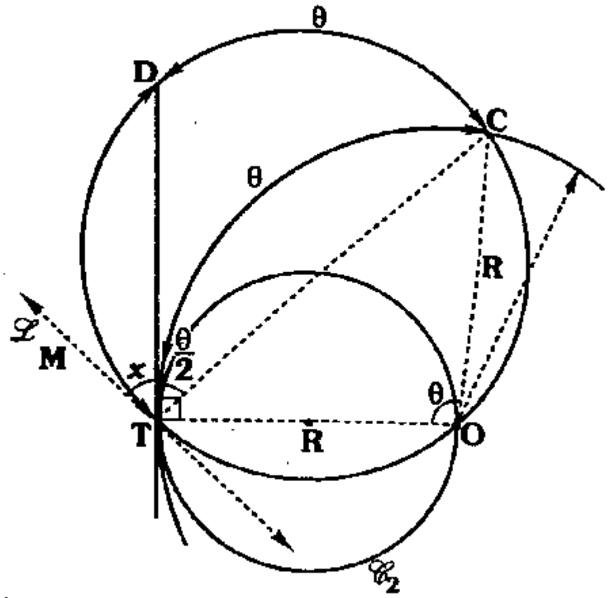
- ΔEMF : isósceles $\rightarrow EM=EF=5$

  $$\rightarrow GM = 12+5=17$$

  $$\therefore\ \mathbf{AB=17}$$

Clave B

Resolución Nº 202



Sea "x" la medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

- Se traza la tangente en T

  $$\rightarrow m\sphericalangle MTD = x$$

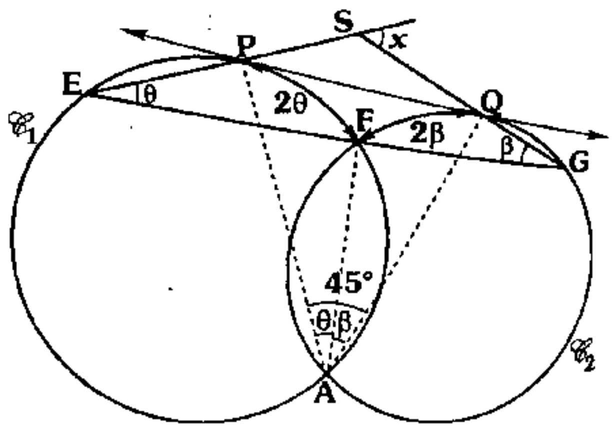
- $m\sphericalangle DTC = \dfrac{\theta}{2} \rightarrow m\overset{\frown}{TC} = \theta \rightarrow$ por ángulo central: $m\sphericalangle TOC = \theta$
- Por ángulo inscrito:

  $$m\overset{\frown}{TDC} = 2\theta \rightarrow m\overset{\frown}{TD} = \theta$$

  $$\therefore\ x = \frac{\theta}{2}$$

Clave D

Resolución Nº 203



Nos piden x.

- Como $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales por propiedad: $m\measuredangle PAQ = 45°$

- Sea:

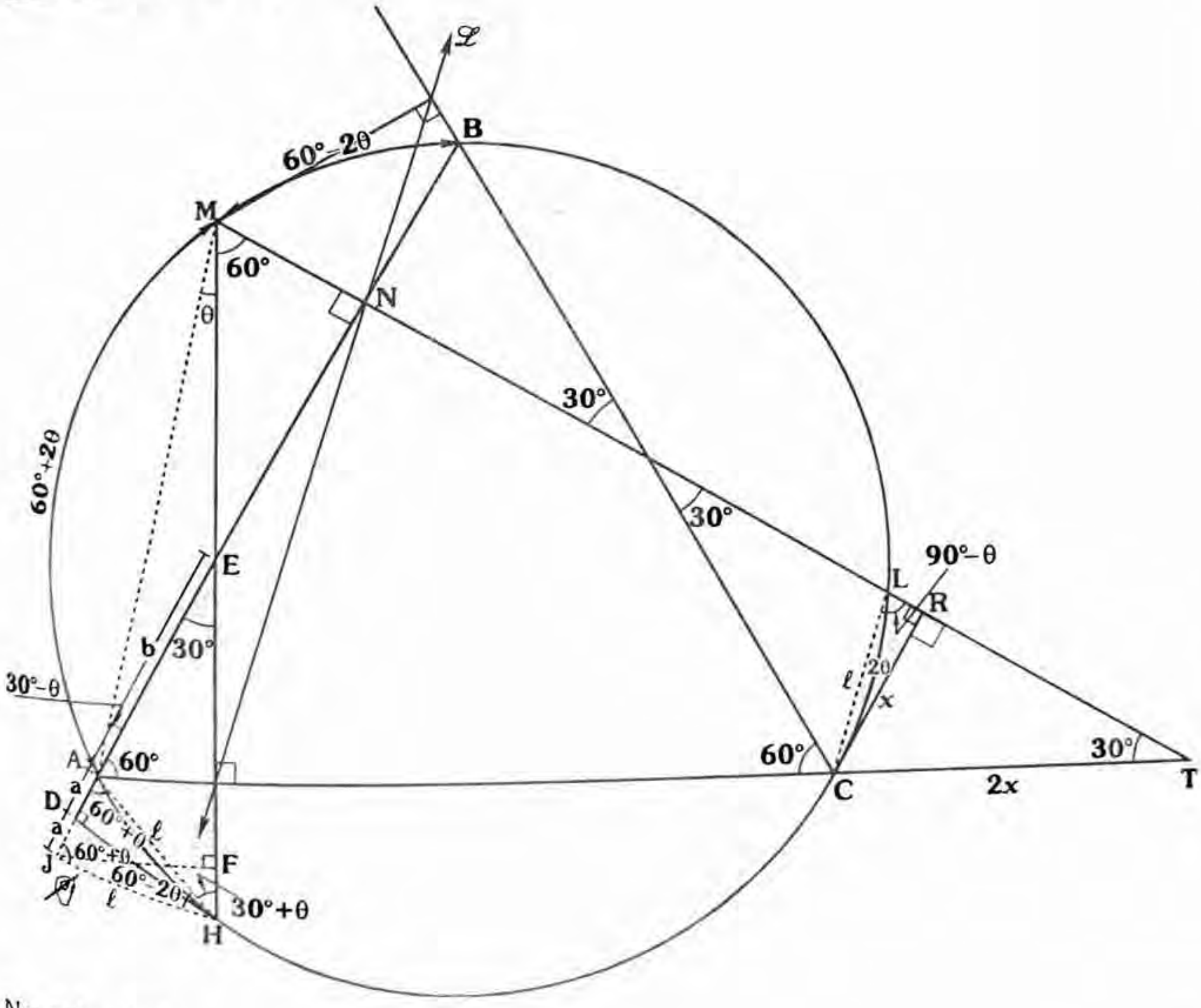
$$\left.\begin{aligned} m\measuredangle PEF = \theta &\rightarrow m\measuredangle PAF = \theta \\ m\measuredangle QGF = \beta &\rightarrow m\measuredangle QAF = \beta \end{aligned}\right\} \theta + \beta = 45°$$

- ΔESG: $x = \theta + \beta$

$$\therefore \; \mathbf{x = 45°}$$

Clave D

Resolución Nº 204



Nos piden CT.

- Se traza $\overline{CR} \perp \overline{LT}$ (R en $\overline{LT}$) CT=2x y CR=x.
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es recta de Simson de M respec to del $\Delta ABC \rightarrow m\measuredangle MNA = 90°$ m
- Sea $m\widehat{AH} = 2\theta \rightarrow m\measuredangle AMH = \theta$
- Completando ángulos:

$$m\measuredangle MAN = 30° - \theta$$

$$\rightarrow m\measuredangle CLT = 90° - \theta$$

- Por ángulo exterior:

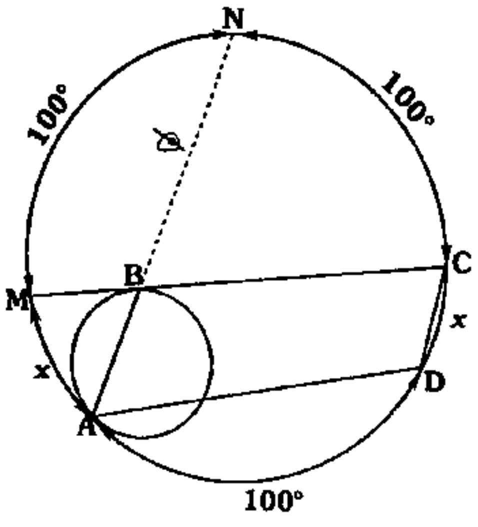
$$30° = \frac{m\widehat{AH} - m\widehat{CL}}{2} \rightarrow m\widehat{CL} = 2\theta$$

- Es decir $m\widehat{AH} = m\widehat{CL} \rightarrow AH=CL$
- Se prolonga $\overline{AD}$ hasta J tal que AD=DJ=a → AH=JH
- $\triangle$JFE: notable de 30° $\rightarrow JF = \dfrac{b+2a}{2}$
- $\triangle HFJ \cong \triangle LRC$: $\rightarrow x = \dfrac{b+2a}{2}$

$$\therefore \ \mathbf{CT = b + 2a}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 205



❖ Nos piden x.

- Como ABCD es paralelogramo $\rightarrow \overline{AN} // \overline{CD} \rightarrow m\widehat{AD} = m\widehat{NC} = 100°$ y $\overline{MC} // \overline{AD} \rightarrow m\widehat{MA} = x$
- Por propiedad:

$$m\widehat{MN} = m\widehat{NC} = 100°$$

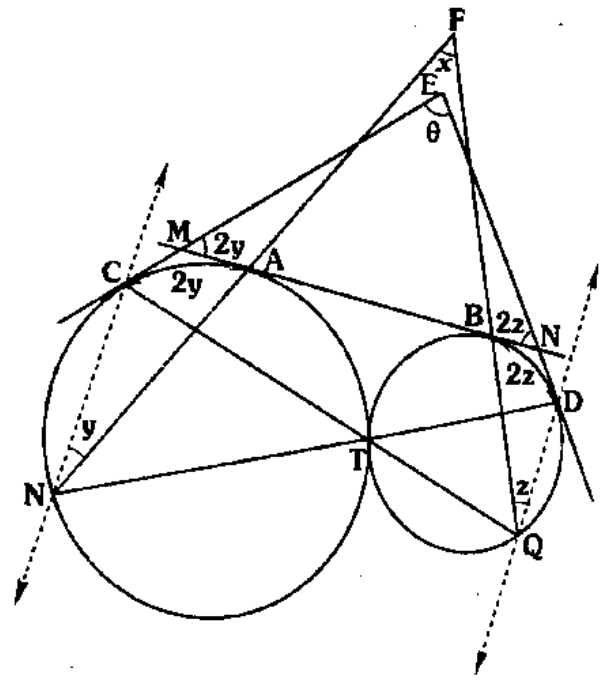
- Finalmente:

$$2x + 100 + 100 + 100 = 360°$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 206



❖ Nos piden x.

- Por propiedad:

$$\overline{NC} // \overline{QD} \rightarrow x = y + z$$

- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AC} = 2y \ \ y \ \ m\widehat{BD} = 2z$$

$$\rightarrow m\measuredangle AME = 2y \ \ y \ \ m\measuredangle BNE = 2z$$

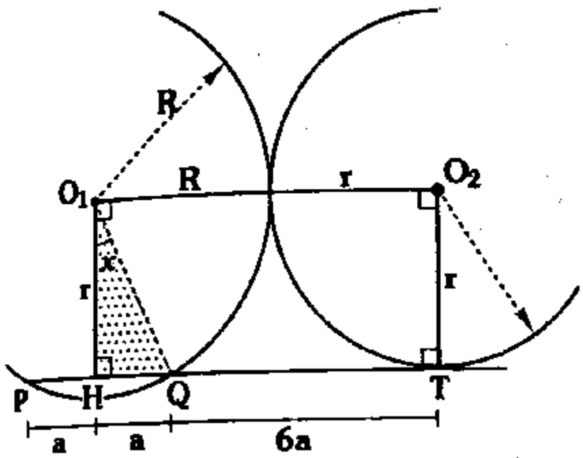
- En $\Delta AME: 2y+2z+\theta=180°$

$$y+z=90°-\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=90°-\frac{\theta}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 207



Nos piden $m\widehat{PQ}$.

- Notemos que HO_1O_2T es rectángulo
- Luego: $R+r=6a$ ...(1)
- En $⊿HO_1Q: R^2=r^2+a^2$

$$\to R^2-r^2=a^2$$

$$\to (R+r)(R-r)=a^2$$

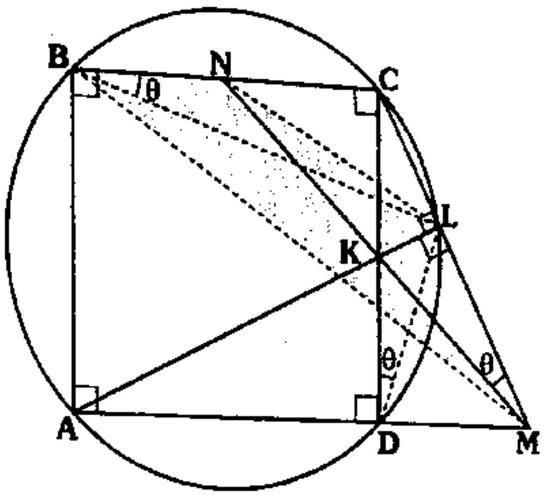
$$\to R-r=\frac{a}{6} \quad ...(2)$$

- De (1) y (2): $R=\dfrac{25a}{7}$
- $⊿O_1HQ$: notable $x=16°$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{PQ}=32°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 208



- Lo que nos piden demostrar en realidad es que el ⌂BNLM es inscriptible
- Notamos que el ⌂DKLM es inscriptible

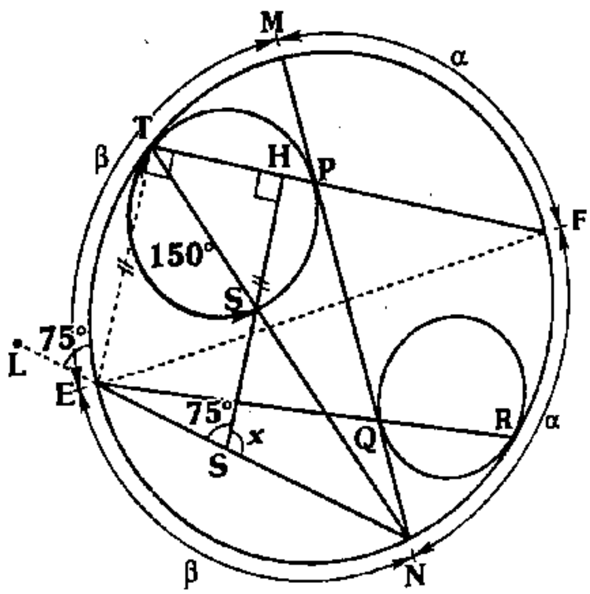
$\to m\measuredangle CDL=m\measuredangle KML=\theta$

$\to m\widehat{CL}=2\theta$

- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle CBL=\theta$
- Como $m\measuredangle NBL=m\measuredangle NML$

$\therefore$ ⌂BNLM es inscriptible

RESOLUCIÓN Nº 209



Piden x.

- Por propiedad: $m\widehat{MF} = m\widehat{FN} = \alpha$

$m\widehat{NE} = m\widehat{EM} = \beta$

$\rightarrow \alpha + \beta = 180°$

- Es decir $\overline{EF}$ es diámetro

$\rightarrow$ m∢ETF = 90° $\rightarrow$ $\overline{ET} // \overline{SH}$

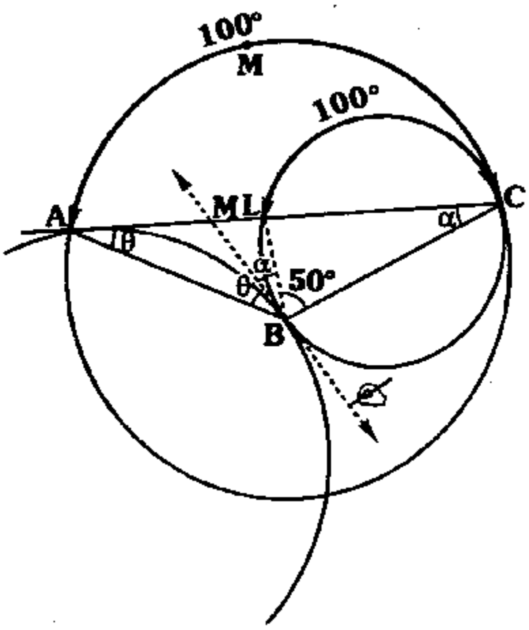
- Como: $m\widehat{TS} = m\widehat{TN} = 150°$

$\rightarrow$ m∢LET = 75°

$\therefore$ **x=105°**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 210



Nos piden m∢ABC.

- Por propiedad:

$m\widehat{AC} = m\widehat{LC} = 100°$

- Se traza la tangente en B

$\rightarrow$ m∢MAB = m∢MBA = θ y

m∢MBL = m∢BCL = α

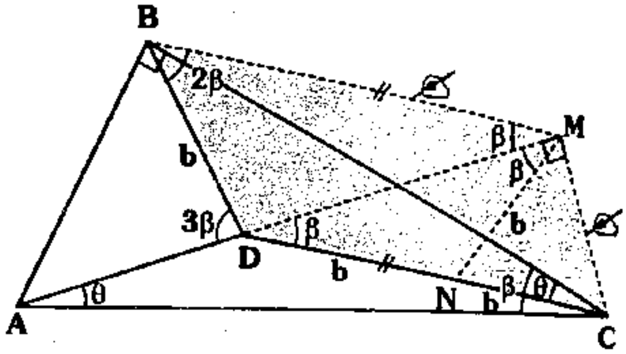
- En ΔABC: $2x + 2\theta + 50° = 180°$

$\rightarrow \alpha + \theta = 65°$

$\therefore$ **m∢ABC=115°**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 211



Nos piden $\dfrac{CD}{BD}$.

- Se prolonga $\overline{AD}$ hasta M tal que m∢AMC = 90°

$\rightarrow$ ⌂ABMC: inscriptible

- Notemos que:

m∢AMB = β y m∢CDM = β

$\rightarrow$ $\overline{DN} // \overline{BM}$

- En ⊿DMC: se traza la mediana MN

$\rightarrow$ DN=NC=NM=b

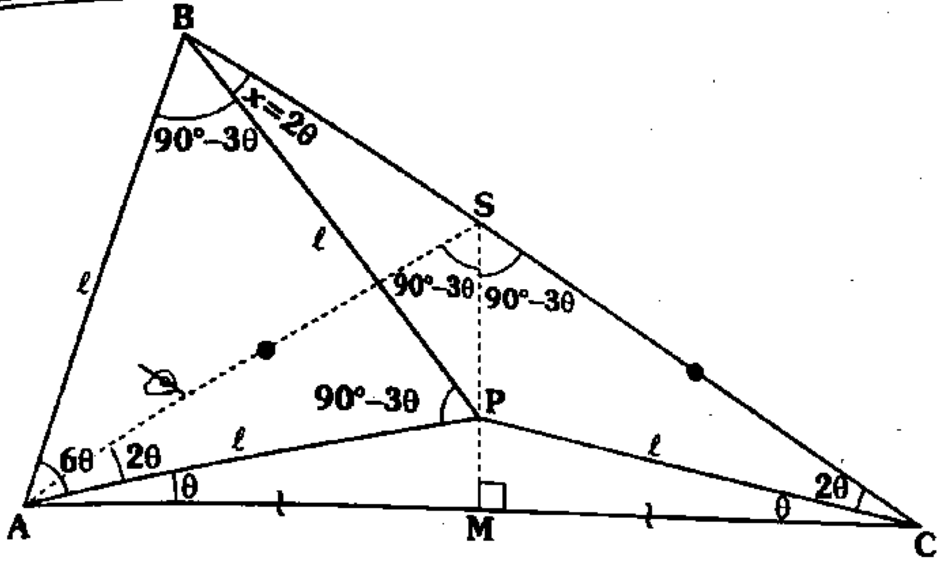
- ⌂DBMN: trapecio isósceles

BD=MN $\rightarrow$ CD=2b y BD=b

$\therefore$ $\mathbf{\dfrac{CD}{BD} = 2}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 212



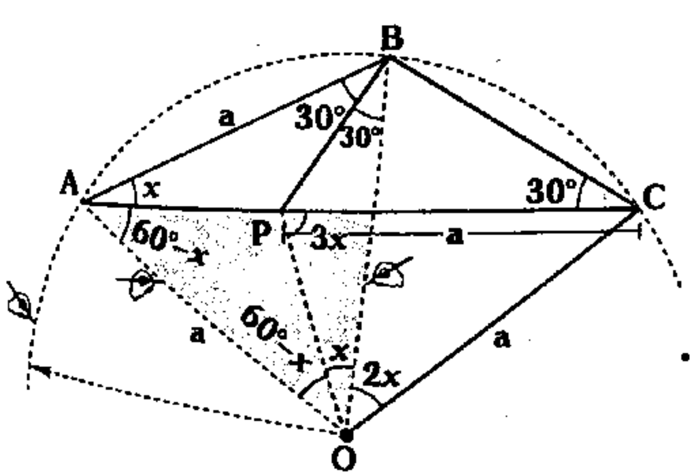
Nos piden x.

- Se traza la recta $\overline{PM}$ $\rightarrow$ AM=MC $\rightarrow$ AS=SC
  $\rightarrow$ $m\measuredangle ASM = m\measuredangle MSC = 90° - 3\theta$
- ⌂ABSP: inscriptible $\rightarrow$ $x = 2\theta$ $\rightarrow$ PB = PC
- ΔABP: equilátero $\rightarrow$ $6\theta = 60° \rightarrow \theta = 10°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 20°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 213



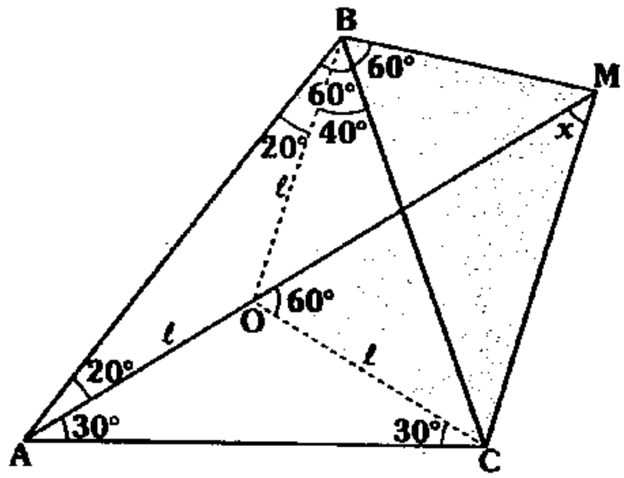
Nos piden x.

- Se traza la circunferencia circunscrita al ΔABC cuyo centro es O.
  $\rightarrow$ ΔAOB: equilátero
  $\rightarrow$ $m\measuredangle ABP = m\measuredangle PBO = 30°$
  $\rightarrow$ AP=PO
  $\rightarrow$ $m\measuredangle PAO = m\measuredangle AOP = 60° - x$
- ΔOPC: isósceles
  $\rightarrow$ $m\measuredangle OPC = m\measuredangle POC = 3x$
- En ΔAOP: $3x = 60° - x + 60° - x$

$$\therefore\ \mathbf{x = 24°}$$

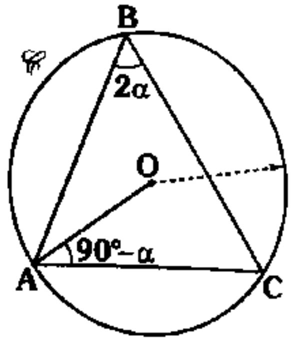
Clave B

RESOLUCIÓN Nº 214



Piden x.

- Usaremos:

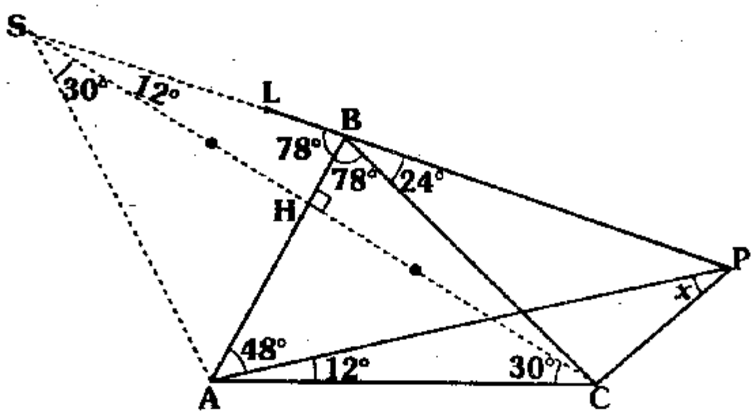


"O" es el centro de $\mathscr{C}$

- Se ubica el circuncentro O del ΔABC, el cual se encuentra en $\overline{AM}$.
- Como AO=OC → m∢COM = 60°
- ⌓COBM: inscriptible ∴ **x=40°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 215



Nos piden x.

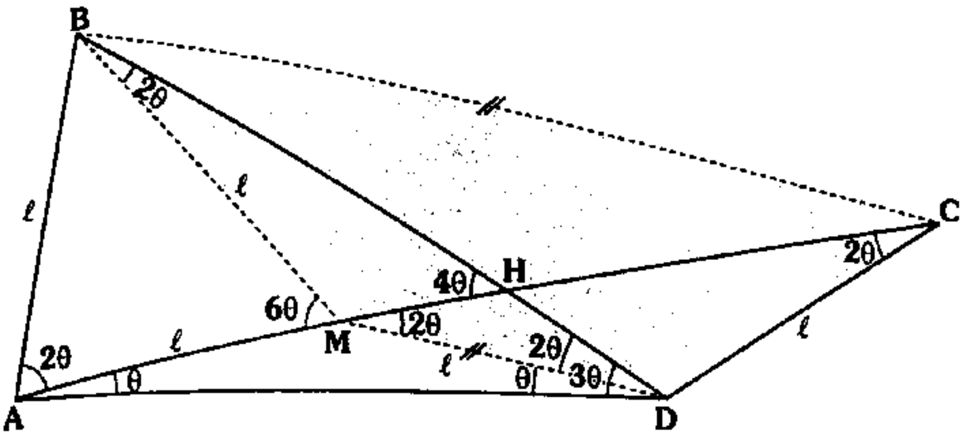
- Al prolongar $\overline{PB}$ hasta L, notamos: m∢LBA = 78°
- Se traza $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ cuya prolongación corta a $\overleftrightarrow{PB}$ en S.

→ m∢CSB = 12° y m∢ASC = 30°

- ⌓ASPC: inscriptible ∴ **x=30°**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 216

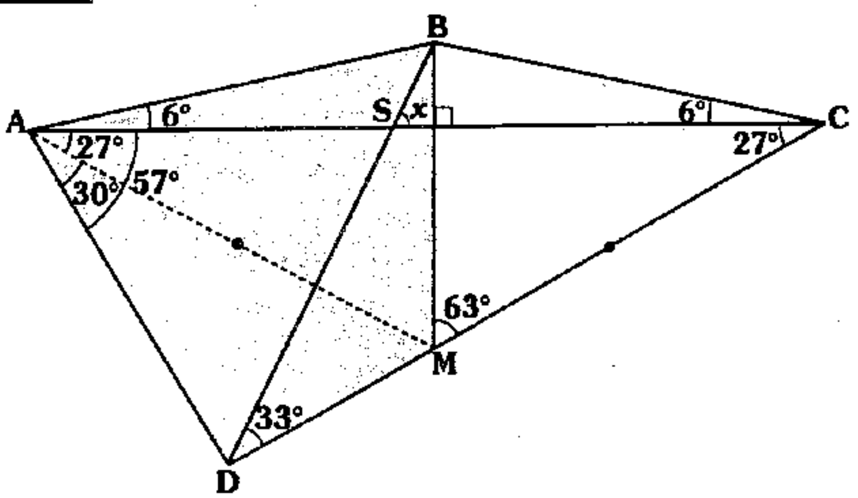


Nos piden θ.

- Se traza $\overline{BM}$, M en $\overline{AC}$ tal que $m\measuredangle AMB = 6\theta \rightarrow AM = BM$ también: $m\measuredangle MBD = 2\theta$
- $\triangle$MBCD: inscriptible como $BM = \overline{CD}$ dicho cuadrilátero es un trapecio isósceles $\rightarrow m\measuredangle HMD = m\measuredangle HDM = 2\theta$
- Notemos que ΔAMD: isósceles, lo mismo que el $\Delta BMD \rightarrow AM = MD = MB$
- ΔABM: equilátero $\rightarrow 6\theta = 60°$ $\quad\quad \therefore\ \boldsymbol{\theta = 10°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 217



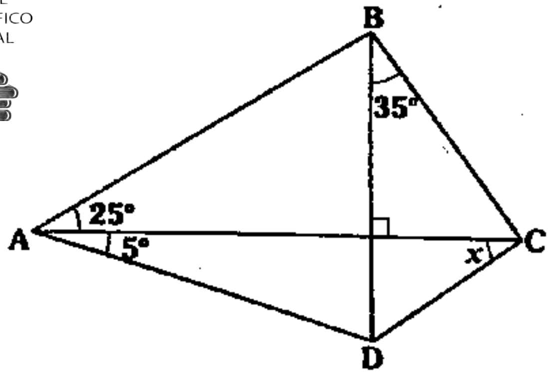
Nos piden x.

- Se ubica M en $\overline{CD}$ tal que $\overline{BM} \perp \overline{AC}$. Luego: $MA = MC \rightarrow m\measuredangle MAC = 27°$
- Notemos que $m\measuredangle DAB = m\measuredangle BMC = 63° \rightarrow$ $\square$DABM: inscriptible

  $\rightarrow m\measuredangle MDB = m\measuredangle MAB = 33°$
- Luego, en el ΔDSC: $x = 33° + 27°$ $\quad\quad \therefore\ \boldsymbol{x = 60°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 218



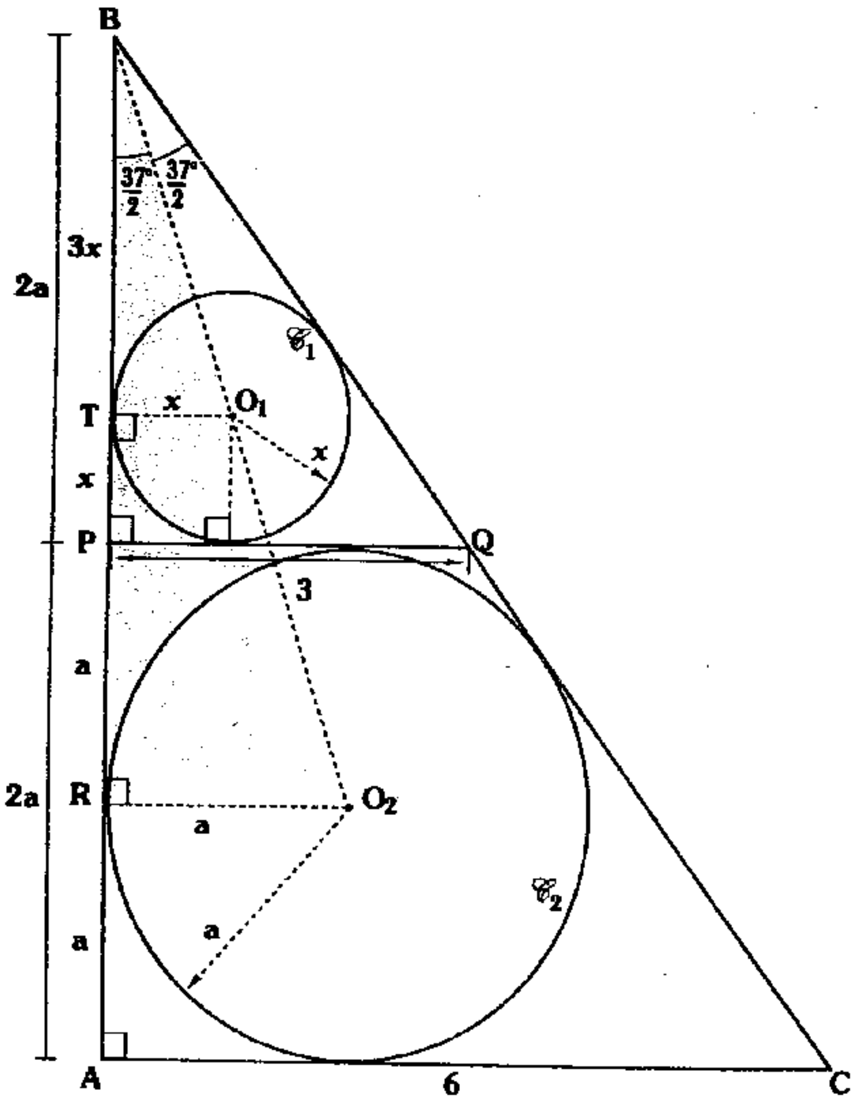
Nos piden x.

- Es una aplicación de la propiedad (pag. 77)
- Para $\theta = 5° \rightarrow x = 3\theta$

$$\therefore\ x = 15°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 219



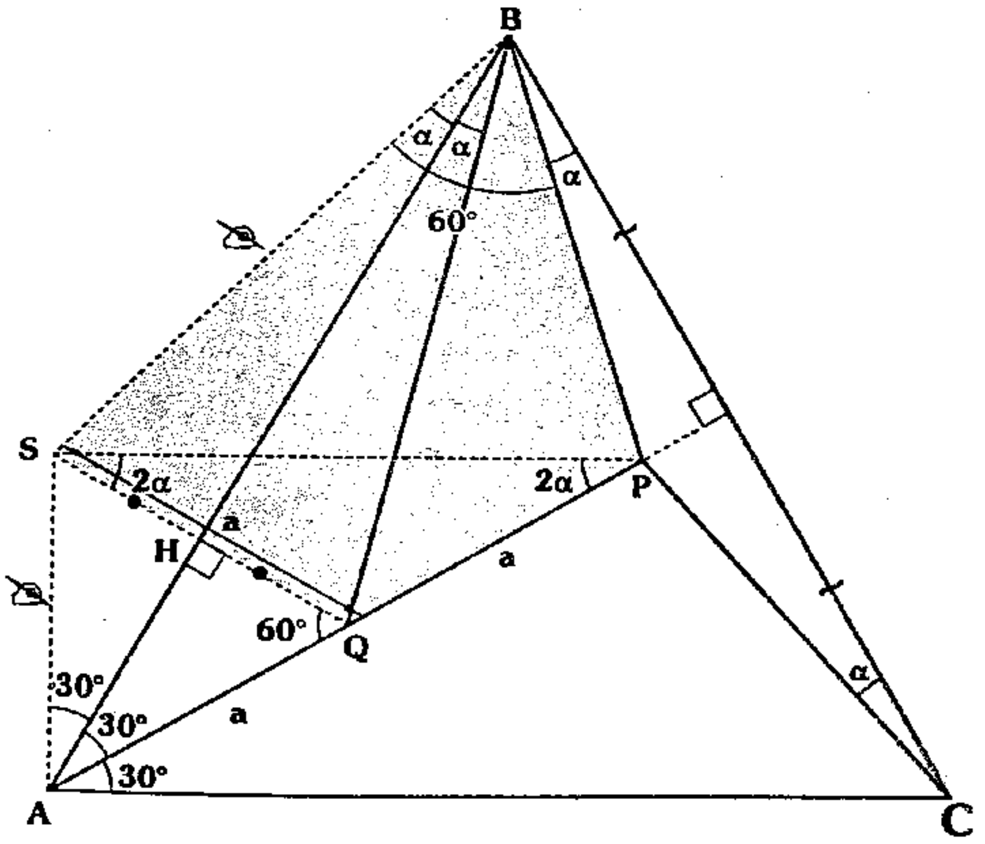
Nos piden x.

- Como $AC=2(PQ)$ y $\overline{AC} // \overline{PQ}$ $\rightarrow$ PQ es base media $\rightarrow$ BP=PA.
- Sea "a" el radio de $\mathscr{C}_2$ $\rightarrow$ PA=23a=PB
- $\triangle BRO_2$: notable de $\frac{37°}{2}$ $\rightarrow$ $m\measuredangle PBQ = 37°$ $\rightarrow$ PB=4
- $\triangle BTO_1$: $TB=3x$ $\rightarrow$ $3x+x=4$

$$\therefore\ x=1$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 220



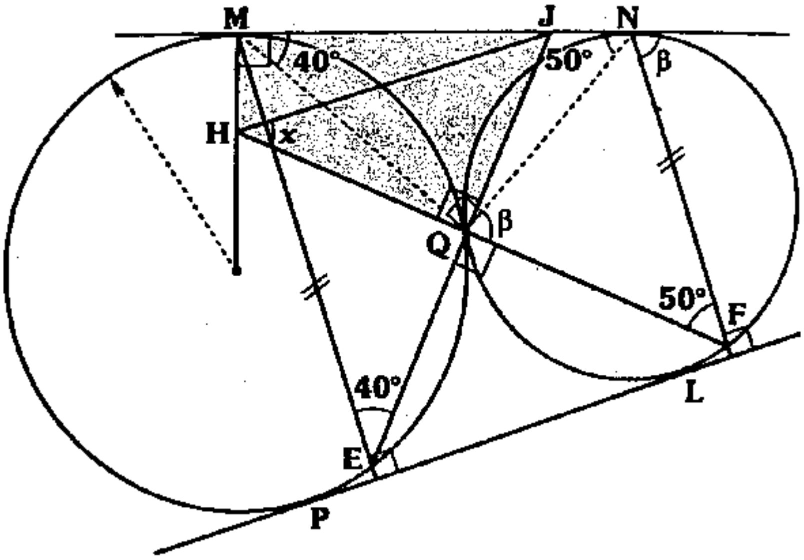
Nos Piden α.

- Se ubica S en la región exterior relativa a $\overline{AB}$ tal que $\overline{QS} \perp \overline{AB}$ y QS=QA
- $\triangle AQS$: equilátero $\rightarrow$ QH=HS $\rightarrow$ SB=BQ
- $\square SBPQ$: inscriptible $\rightarrow$ $m\measuredangle QPS = m\measuredangle QSP = 2\alpha$
- $\triangle SQP$: $2\alpha + 2\alpha = 60°$

$$\therefore\ \alpha=15°$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 221



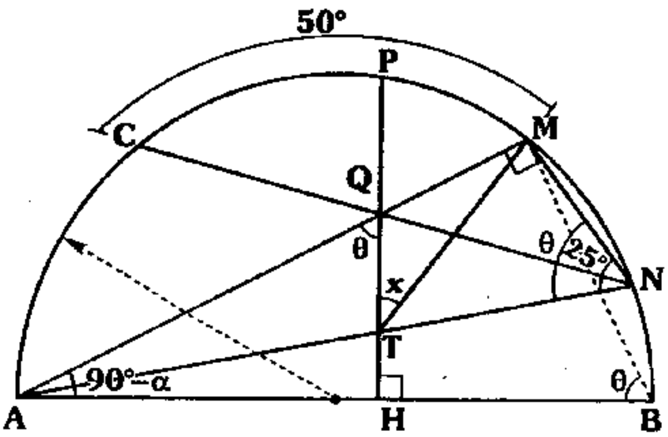
Nos Piden x.

- Por propiedad: $m\measuredangle MQN = 90°$ $\rightarrow$ $m\measuredangle QMN = 40°$ $\rightarrow$ $m\measuredangle MEQ = 40°$
- Como $\overline{ME} // \overline{NF}$ $\rightarrow$ $m\measuredangle EQF = 90°$ $\rightarrow$ $m\measuredangle HQJ = 90°$
- ⌂HMJQ: inscriptible

$$\therefore\ x = 40°$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 222



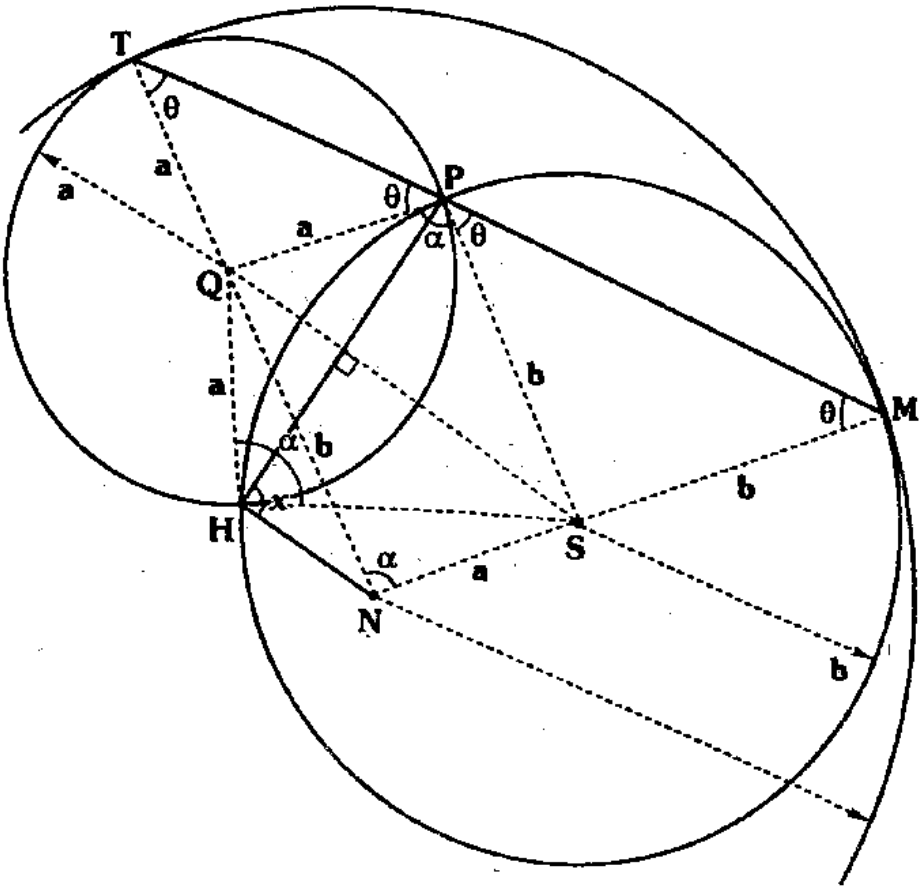
Nos Piden x.

- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle CNM = 25°$
- Sea $m\measuredangle ABM = \theta$ $\rightarrow$ $m\measuredangle ANM = \theta$ y $m\measuredangle HQA = \theta$
- ⌂TQMN: inscriptible

$$\therefore\ x = 25°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 223



Nos Piden x.

- Son colineales: – N, Q y T

  – N, S y M

- Notemos que: – HQPS: trapezoide simétrico $\overline{HP} \perp \overline{QS}$

  – NQPS: paralelogramo

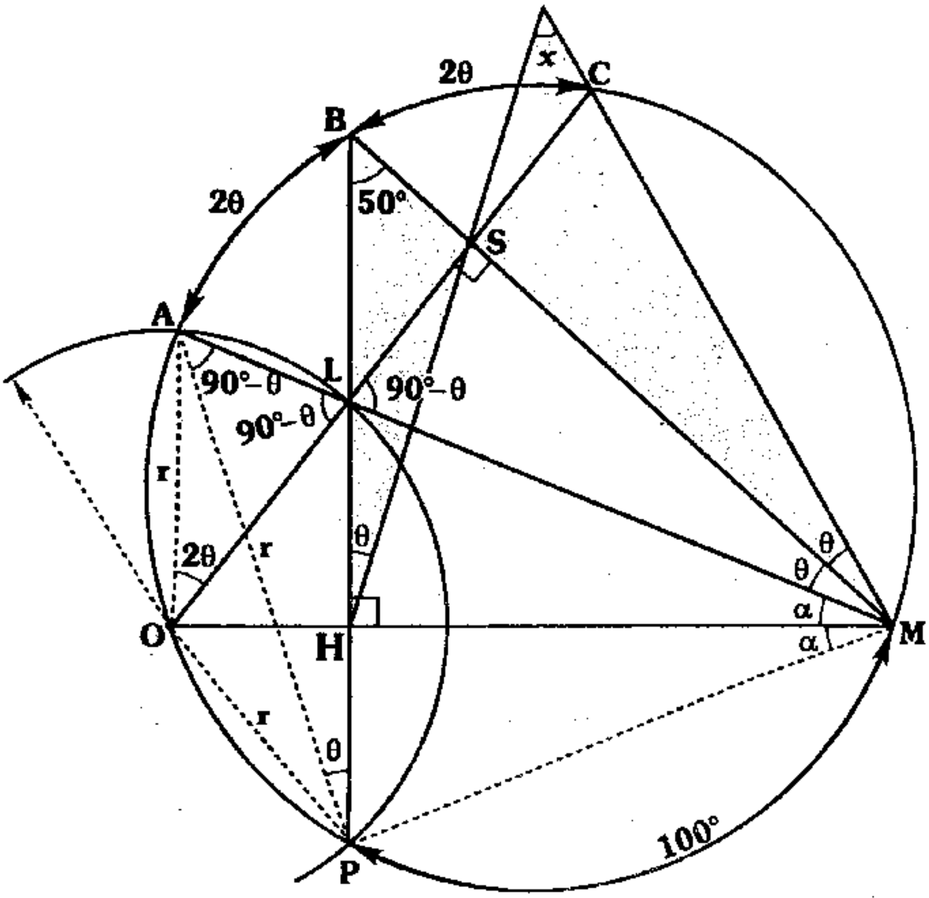
- Luego $m\measuredangle QHS = m\measuredangle QNS$

  ⌂QHNS es inscriptible y como $QH=NS \rightarrow \overline{HN} // \overline{QS}$

$$\therefore\ x=90°$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 224



Nos Piden x.

- Sea $m\sphericalangle APL = \theta$

$$\rightarrow m\sphericalangle AOL = 2\theta \quad y \quad m\sphericalangle ALO = 90° - \theta$$

- También $m\sphericalangle AMQ = \theta \quad \rightarrow m\sphericalangle OSM = 90°$
- $\triangle$PMLO: trapezoide simétrico

$$\rightarrow \overline{OM} \perp \overline{LP}$$

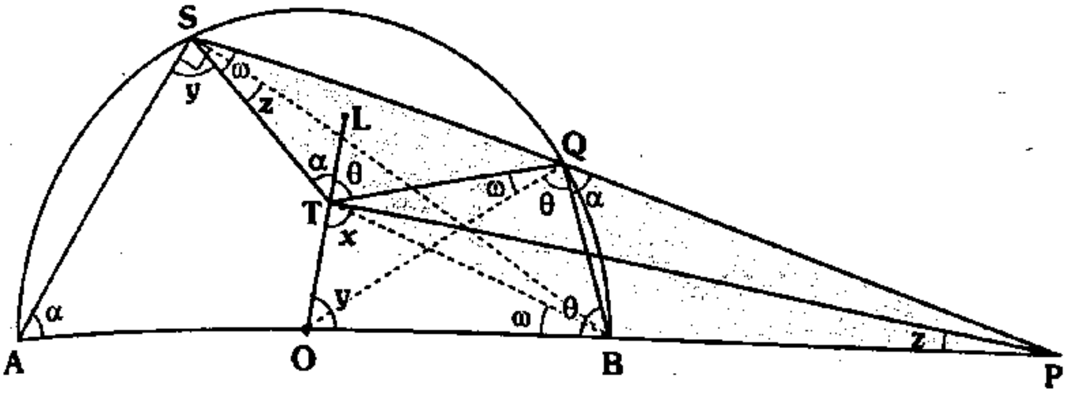
- $\triangle$HLSM: inscriptible $\rightarrow m\sphericalangle LHS = \theta$
- En la región sombreada:

$$x + \theta = 50° + \theta$$

$$\therefore \ x = 50°$$

Clave A

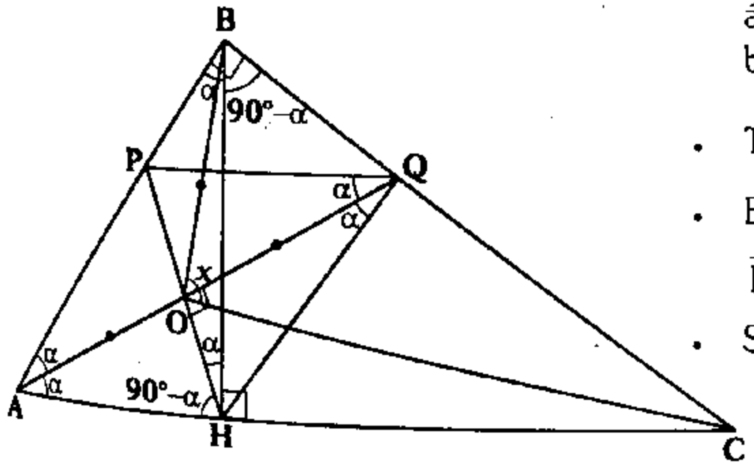
RESOLUCIÓN Nº 225



- Sea $m\measuredangle OTP = x$, pode demostrar: $x = 90°$
- Sea $m\measuredangle SAB = \alpha$, $m\measuredangle OBQ = \theta$ y $m\measuredangle TSQ = \omega$
- $\triangle$AOTS: $m\measuredangle LTS = \alpha$
- $\triangle$OTQB: $m\measuredangle LTQ = \theta$
- En ΔTSQ : $m\measuredangle TQO = \omega \rightarrow m\measuredangle OBT = \omega$
- Como $m\measuredangle TSP = m\measuredangle OBT \rightarrow \triangle$TSPB es inscriptible $\rightarrow m\measuredangle TPB = z$
- En S: $y + z = 90° \rightarrow$ en $\triangle$OTP:

$$x = 90°$$

RESOLUCIÓN Nº 226



Nos piden "x".

- Como ABQH es un rombo entonces los ángulos opuestos son "iguales" y son bisecados por la diagonal.
- También $\overline{AQ} \perp \overline{PH} \Rightarrow m\measuredangle BHP = \alpha$
- En $\triangle$ABQ, como AO=OQ entonces $\overline{BO}$ es mediana.
- Se observa que:

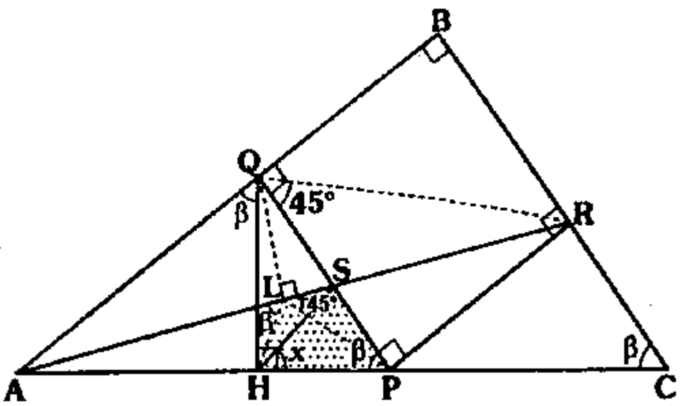
  $m\measuredangle OBC + m\measuredangle OHC = 180°$

  $\Rightarrow \triangle$HOBC es inscriptible

  $\therefore\ x = 90°$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 227



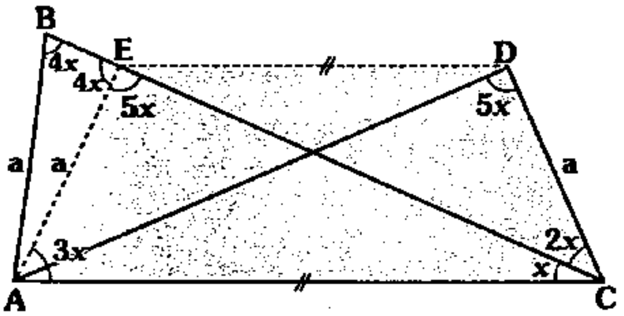
Nos piden "x".

- Se traza $\overline{QL} \perp \overline{AR}$ entonces ⌂QRPL es inscriptible $\Rightarrow$ $m\measuredangle PLR = 45°$
- Sea $m\measuredangle APQ = \beta \Rightarrow m\measuredangle AQH = \beta$
- ⌂HLSP: inscriptible

$$x = 45°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 228



Nos piden "x".

- Se ubica E en $\overline{BC}$ tal que:

$m\measuredangle AEB = 4x \Rightarrow AB = AE$

$\Rightarrow m\measuredangle EAC = 3x \Rightarrow$ AEDC es un trapecio isósceles, el cual también es inscriptible.

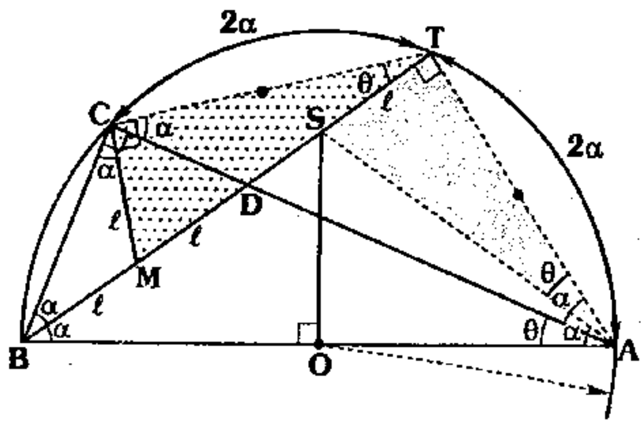
$\Rightarrow m\measuredangle AEC = m\measuredangle ADC = 5x$

- En E: $4x + 5x = 180°$

$$\therefore \; x = 20°$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 229

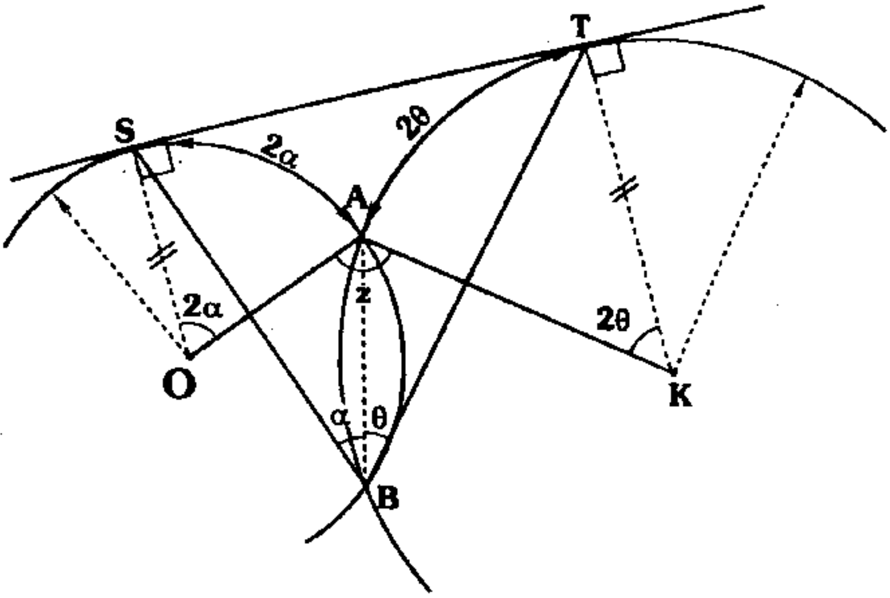


- Sea $m\measuredangle OAD = \theta \rightarrow m\measuredangle SAT = \theta$
- Como $m\overset{\frown}{CT} = m\overset{\frown}{TA} = 2\alpha \rightarrow CT = TA$
- En el ⊿BCD, se traza la mediana $\overline{CM} \rightarrow BM = MD = CM$
- Notemos que ⊿CMT ≅ ⊿STA $\rightarrow MC = ST$

$$\therefore \; \frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{ST}} = \frac{2\ell}{\ell} = 2$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 230



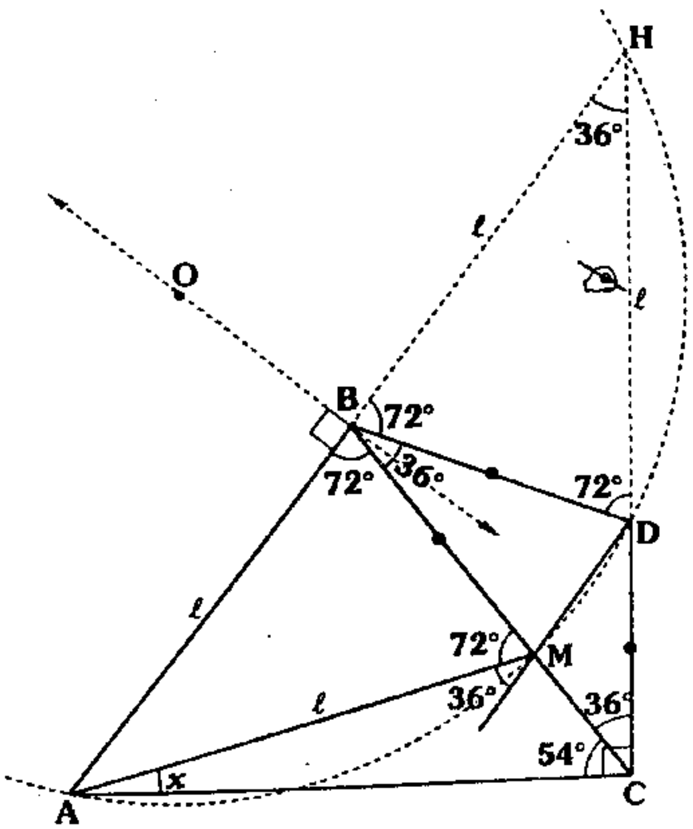
Piden: $\dfrac{m\sphericalangle SBT}{m\sphericalangle OAK}$

- Sea $m\sphericalangle ABS=\alpha$ y $m\sphericalangle ABT=\theta \rightarrow m\sphericalangle SBT=\alpha+\theta$
- Como $\overline{OS}/\!/\overline{KT} \rightarrow m\sphericalangle OAL=2\alpha+2\theta$

$$\therefore \ \frac{m\sphericalangle SBT}{m\sphericalangle OAK}=\frac{1}{2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 231



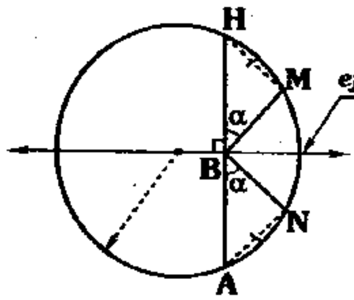
Nos piden x.

- Las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en H → AB=BC=BH
- ⌂AMDH: inscriptible, sea O el centro de la circunferencia circunscrita a dicho cuadrilátero.
- Como AB=BH → $\overline{OB} \perp \overline{AH}$
- De la observación: BD=BM y AM= ℓ → $m\measuredangle AMB = 72°$
- En ΔACM: $x + 54° = 72°$

$$\therefore\ x = 18°$$

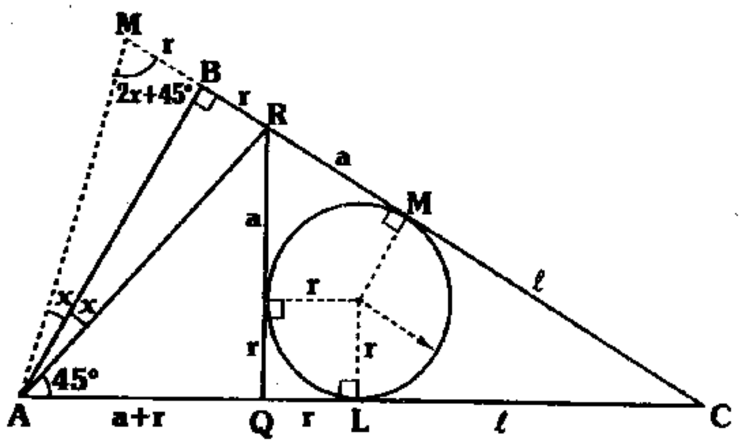
Clave B

Observación



Se cumple:
BM=BN y
HM=AN

RESOLUCIÓN N° 232



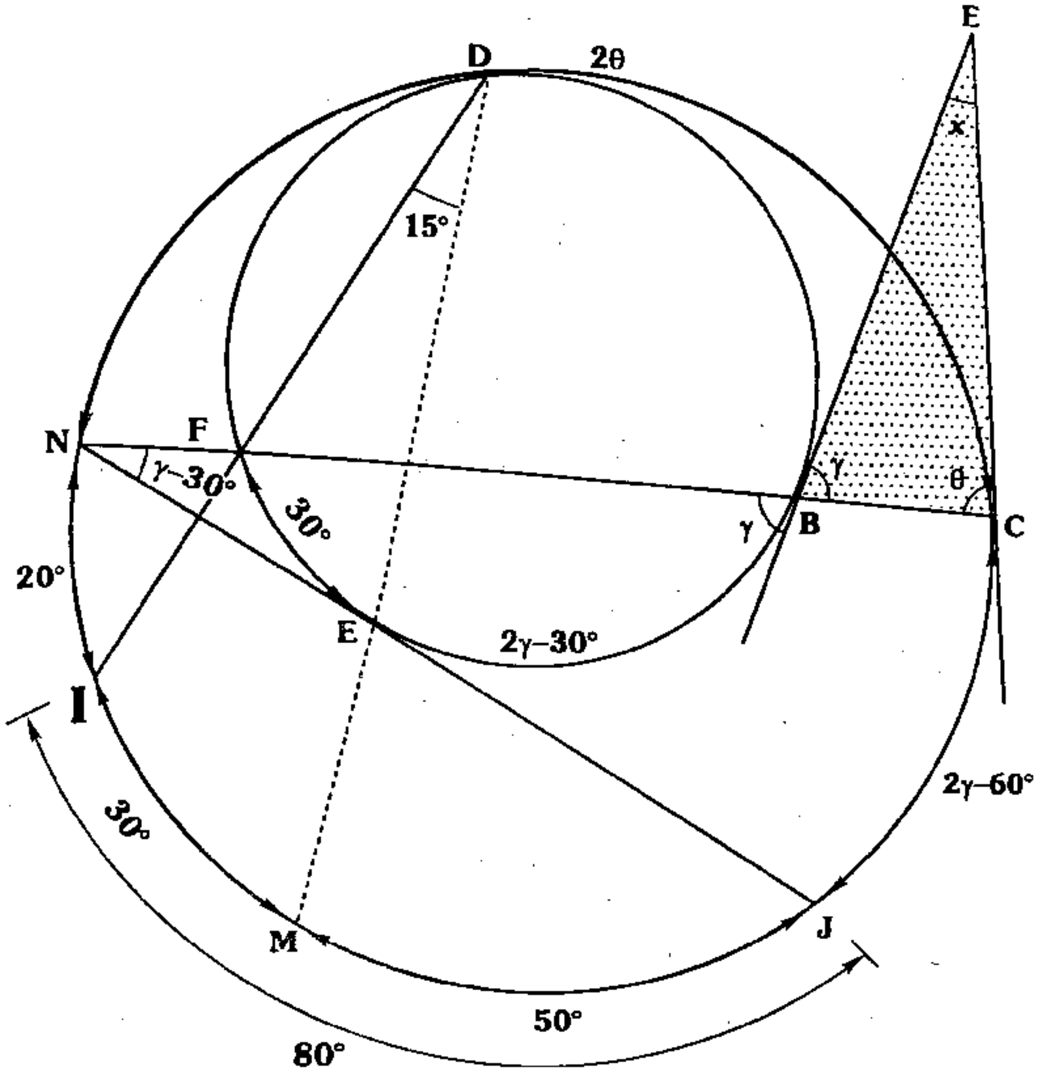
Nos piden x.

- Prolongamos $\overline{CB}$ hasta M tal que BM=r → AR=AM y $m\measuredangle BAM = x$
- Notemos que AC=CM → ΔAMC: isósceles → $m\measuredangle MAC = m\measuredangle AMC = 45° + 2x$
- En ⊿ABM: $x + 2x + 45° = 90°$

$$\therefore\ x = 15°$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 233



Piden x.

- En $\Delta BEC: x+\theta+\gamma=180°$ ...(1)
- Al prolongar $\overline{DM}$ hasta que corte a la circunferencia mayor en M, notamos:

$$m\widehat{NM}=m\widehat{MJ}=50°$$

- $m\widehat{FEB}=2\gamma \rightarrow m\widehat{EB}=2\gamma-30° \rightarrow m\measuredangle JNC=\gamma-30° \rightarrow m\widehat{CJ}=2\gamma-60°$
- Finalmente: $2\theta+2\gamma-60°+80°+20°=360°$

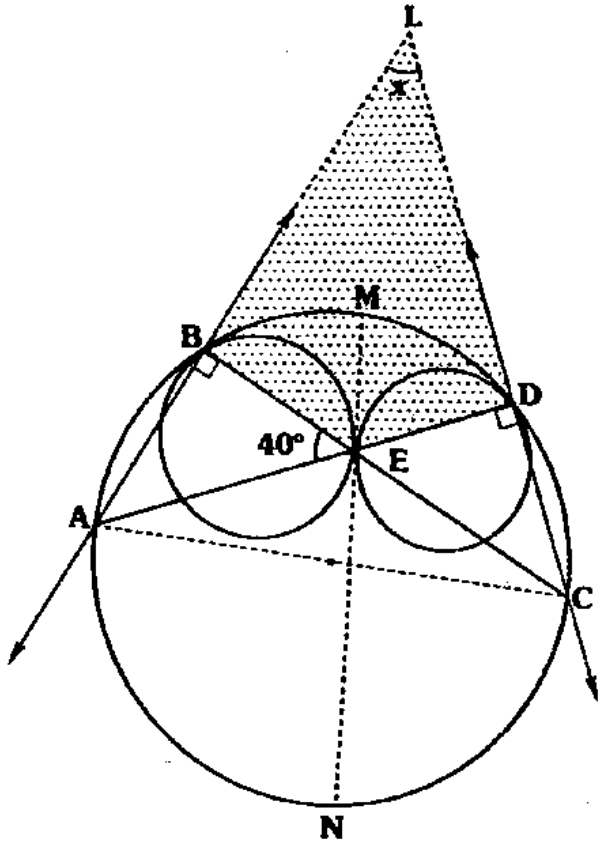
$$\rightarrow \theta+\gamma=160°$$

- En (1):

$$\mathbf{x=20°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 234



Nos piden x.

- Tracemos la tangente común a las dos pequeñas circunferencias.
- Por propiedad:

$$m\overset{\frown}{MDC} = m\overset{\frown}{CN} \quad \text{y} \quad m\overset{\frown}{MBA} = m\overset{\frown}{AN}$$

$$\rightarrow \overline{AC}: \text{ diámetro}$$

- Luego:

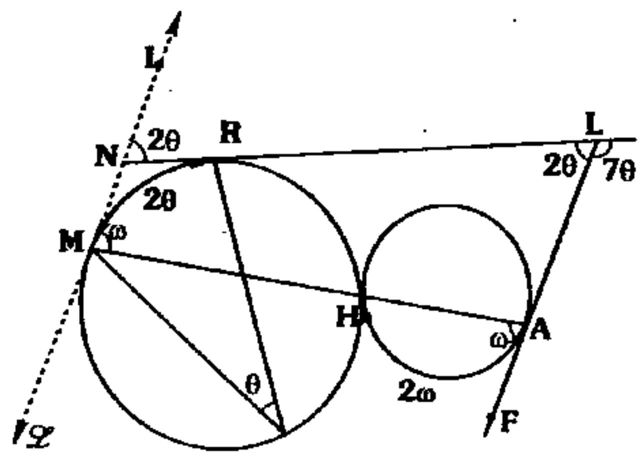
$$m\measuredangle ABC = m\measuredangle ADC = 90°$$

- $\triangle$BLDE: inscriptible

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 40°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 235



Piden θ.

- Se traza la tangente $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$, en en M
- Como $m\overset{\frown}{MRH} = m\overset{\frown}{HA}$

$$\rightarrow m\measuredangle FAH = m\measuredangle NMH$$

$$\rightarrow \overleftrightarrow{\mathcal{L}} \,//\, \overline{AL}$$

- Como $m\overset{\frown}{MR} = 2\theta \rightarrow m\measuredangle INR = 2\theta$

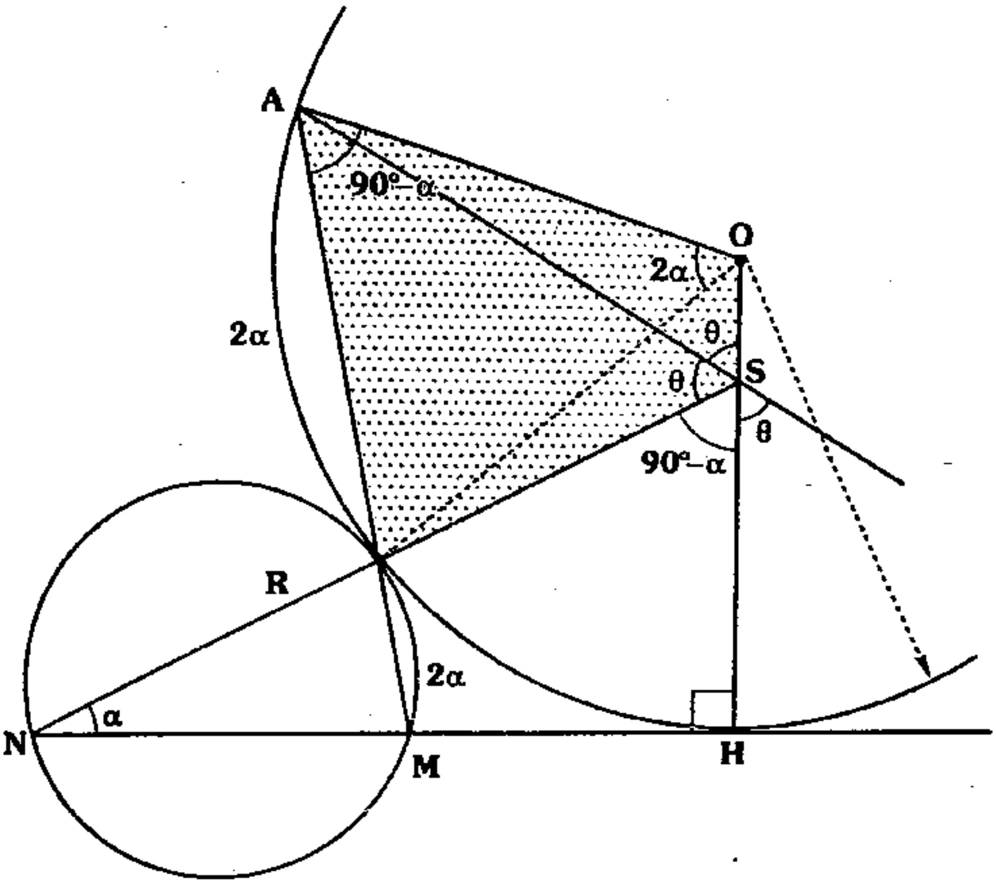
$$\rightarrow m\measuredangle ALN = 2\theta$$

- En L: $\quad 2\theta + 7\theta = 180°$

$$\therefore \ \boldsymbol{\theta = 20°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 236



Piden θ.

- Por propiedad: $m\widehat{MR} = m\widehat{RA} = 2\alpha$
- Como el ΔROA : es isósceles $\rightarrow$ $m\sphericalangle RAO = 90° - \alpha$
- En ⊿NHS: $m\sphericalangle NSH = 90° - \alpha$
- ◺RSOA: inscriptible $\rightarrow$ $\theta = 2\alpha$ ... (1)
- En ⊿HSN:

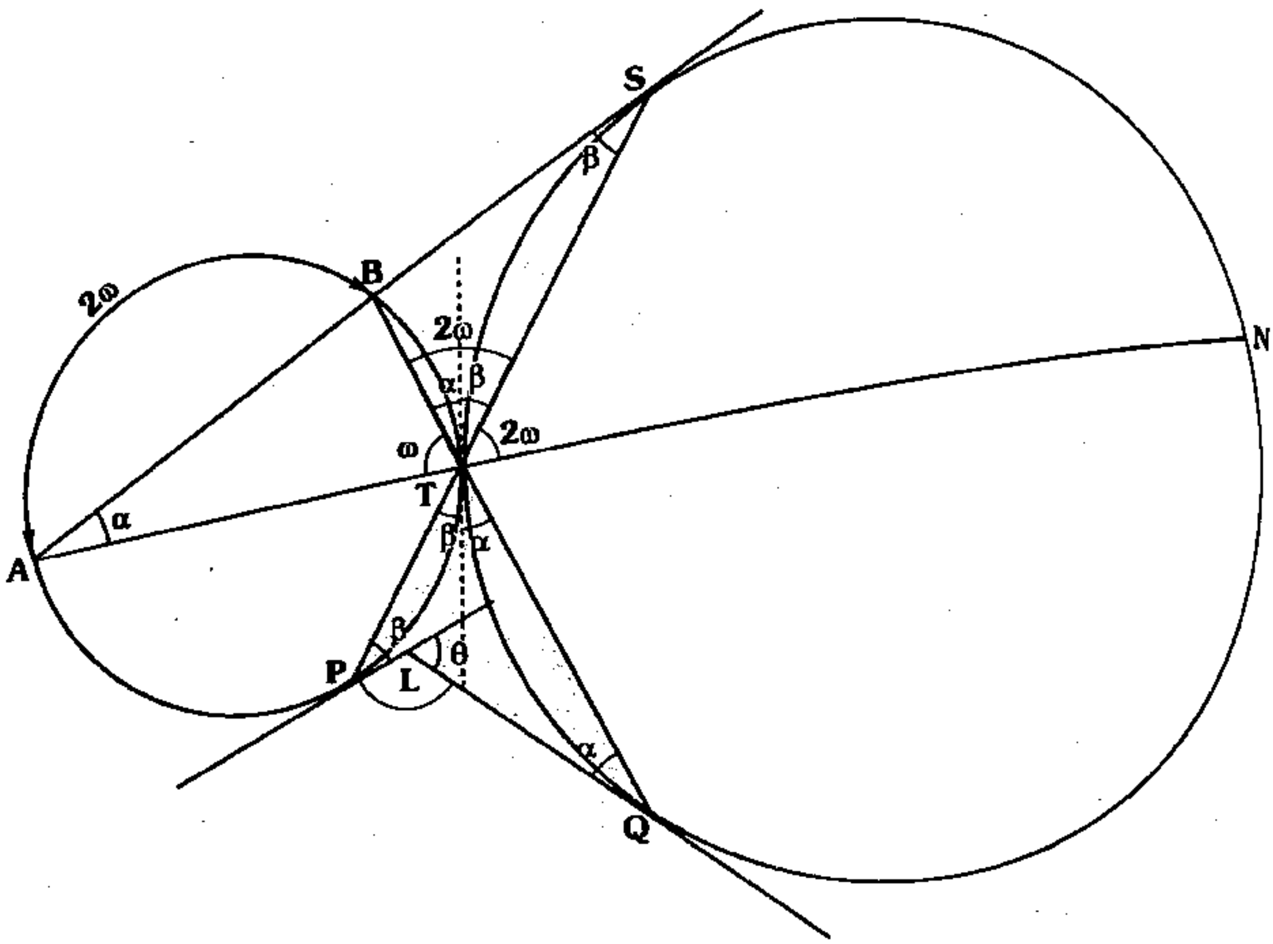
$$2\theta = 90° + \alpha \quad ...(2)$$

- De (1) y (2):

$$\boldsymbol{\theta = 60°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 237



Nos piden θ.

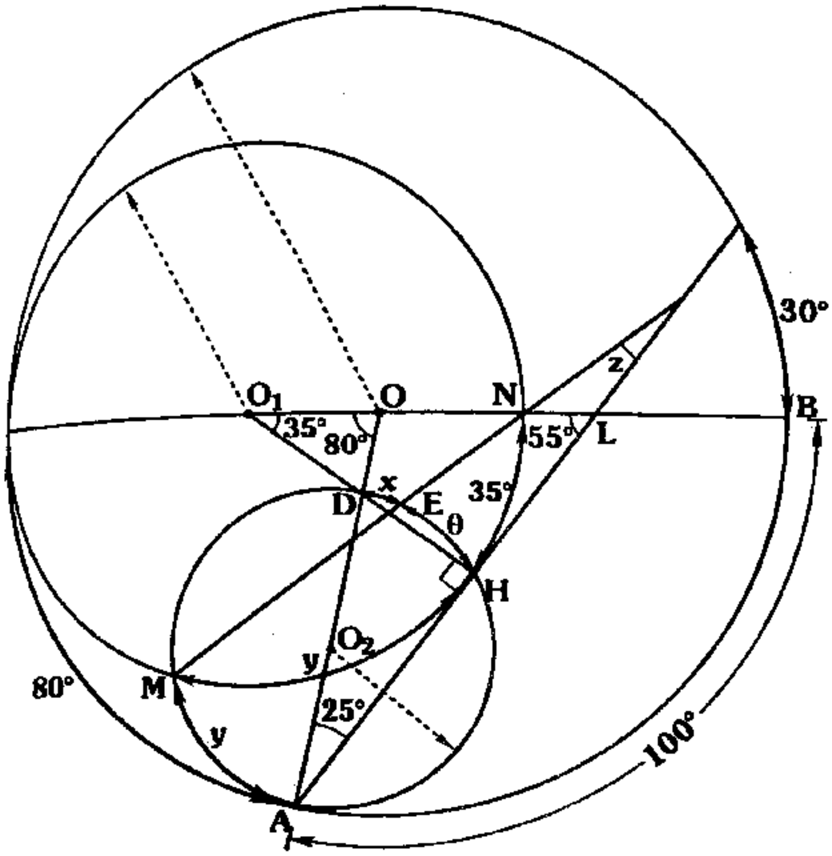
- Como: $m\widehat{AB} = m\measuredangle STN = 2\omega \rightarrow m\measuredangle ATB = \omega$
- Notamos: $\underbrace{m\measuredangle BTS}_{\alpha+\beta} = m\measuredangle STN = 2\omega$
- En T: $2\omega + 2\omega + \omega = 180° \rightarrow \omega = 36°$
- En la región sombreada:

$$m\measuredangle PLQ = 144°$$

$$\therefore\ \theta = \mathbf{36°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 238



Piden x.

- O, O_2 y A: colineales , lo mismo que O_1, D y H
- Se sabe que $m\widehat{AM} = m\widehat{MH}$
- Por ángulo exterior:

$$z = \frac{y - \theta}{2} = \frac{y - 35}{2}$$

$$\rightarrow \quad \theta = 35°$$

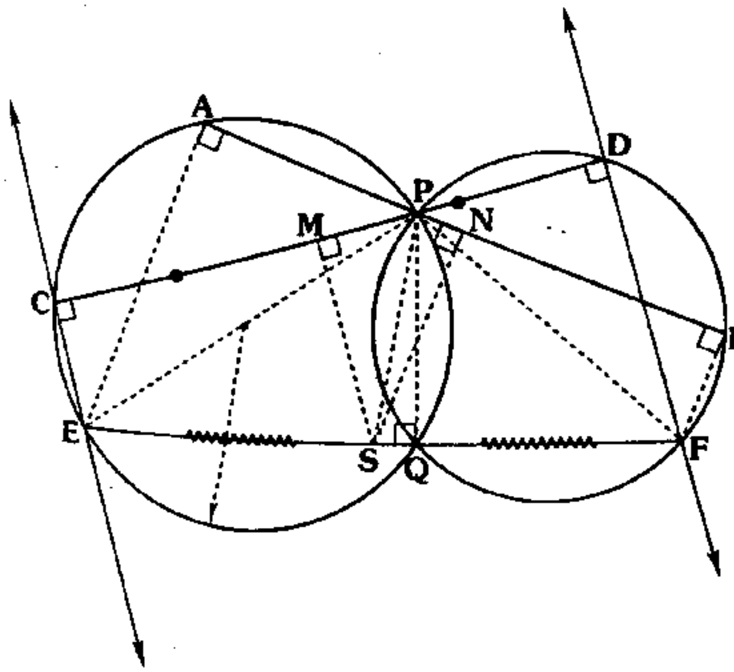
- Por ángulo inscrito:

$$\underbrace{m\widehat{DH}}_{50°} = x + \theta$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 15°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 239



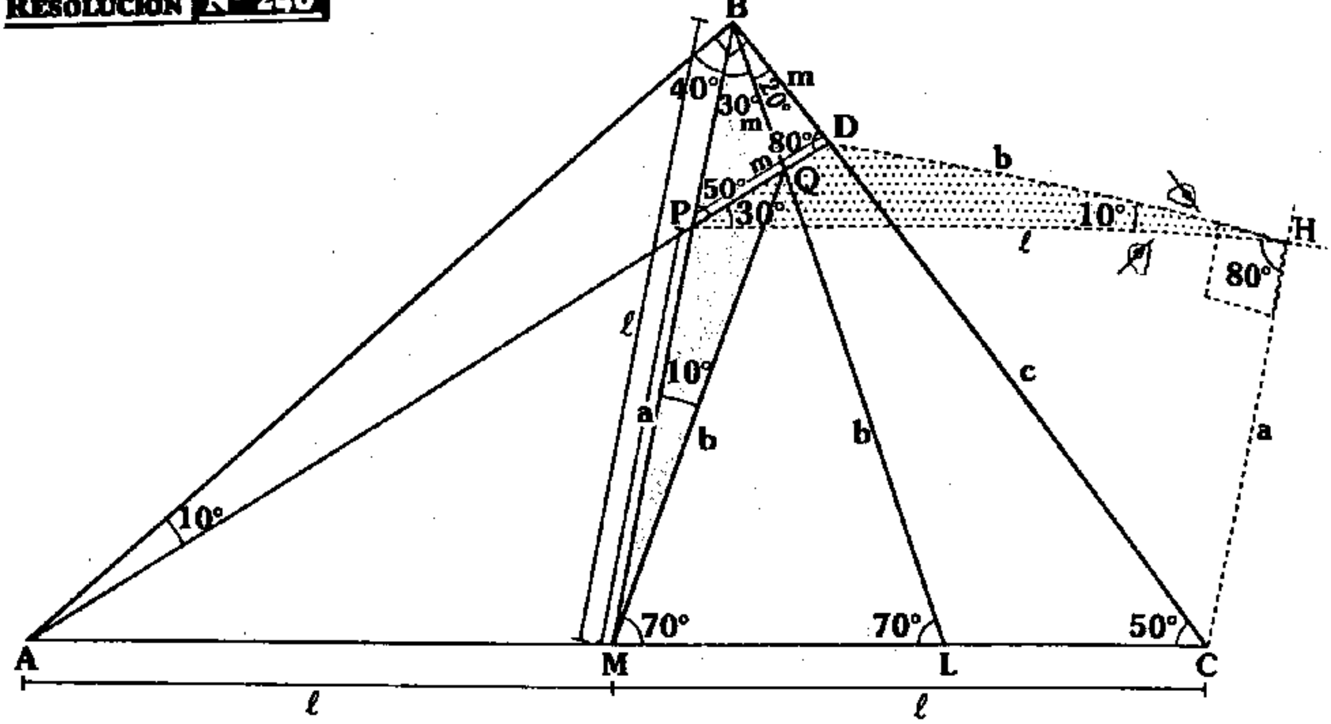
Por demostrar que el ⏢QNPM es inscriptible

- Trazamos los diámetros $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ entonces E, QA y F son colineales
- Por propiedad: $\overline{CE} // \overline{DF}$

  entonces ECDF es un trapecio y $\overline{SM}$ es su base media → $\overline{SM} \perp \overline{CD}$
- Análogamente: $\overline{SN} \perp \overline{AB}$
- Notamos que S, M, P, N y Q son concíclicos.

∴ **⏢QNPM: inscriptible**

RESOLUCIÓN N° 240

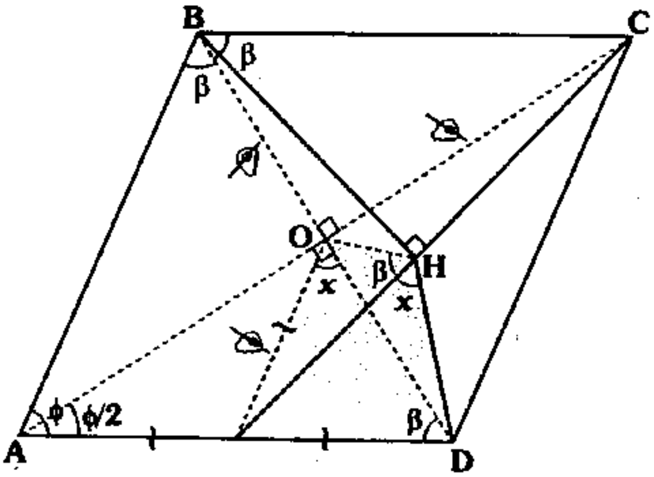


- Piden la relación entre a, b y c.
- ⌂ABQN: inscriptible
- Se traza el paralelogramo MPHC → MP=HC=a
- Como: PD=DB=BQ → ΔMBQ ≅ ΔHPD → DH=b y m∢PHC = 10°

  → m∢DHC = 90°
- Finalmente en el ⊿DHC: $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 241



Piden x.

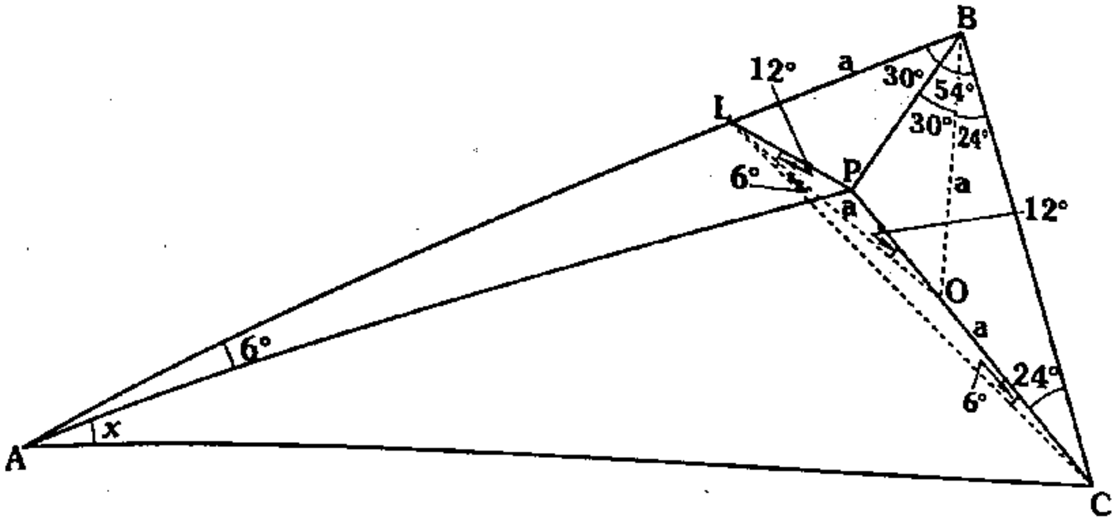
- Trazamos las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ secantes en O → $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
- ⌂OBCH: inscriptible → m∢OHM = β
- ⌂OHDM: inscriptible, pues m∢OHM=m∢MDO=β → m∢MOD=x
- En ⊿DHC: $\overline{OM}$ es mediana

  → m∢AOM = ϕ/2

  $$\therefore\ \mathbf{x = 90° - \frac{\phi}{2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 242

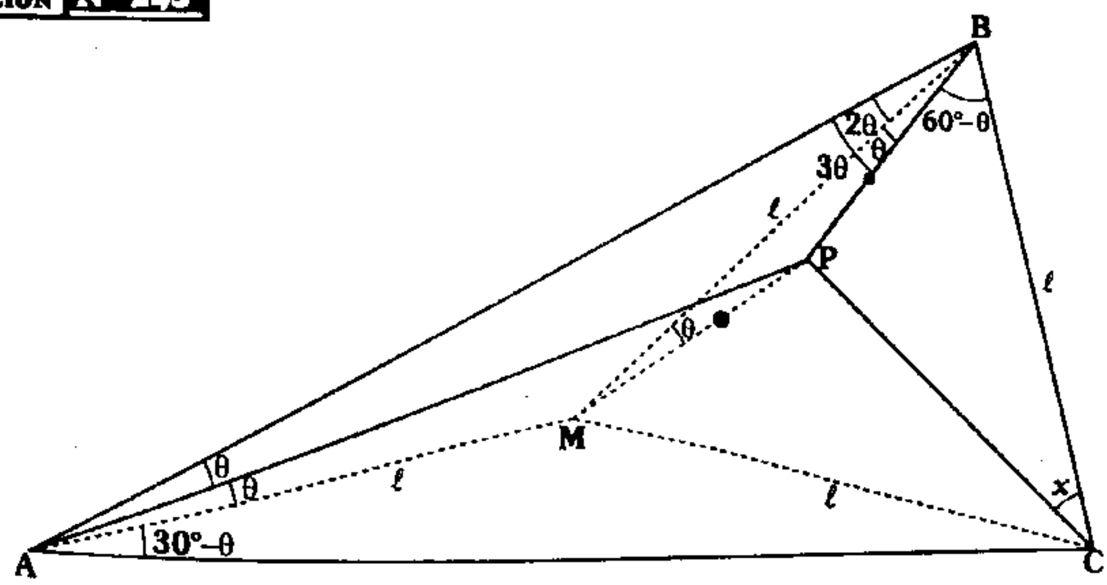


Piden x.

- Se ubica L en $\overline{AB}$ tal que $m\sphericalangle PCL = 6°$ → ⌂ALPC es inscriptible y $m\sphericalangle LCB = 30°$
- Se ubica O en $\overline{PC}$ tal que $m\sphericalangle CBO = 24°$ → $OB=OC$ y $m\sphericalangle LBO = 60°$
- Se concluye que O es circuncentro del ΔLBC → $OL=OB=OC$
- Como ⌂ALPC: inscriptible $\qquad$ $x=18°$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 243



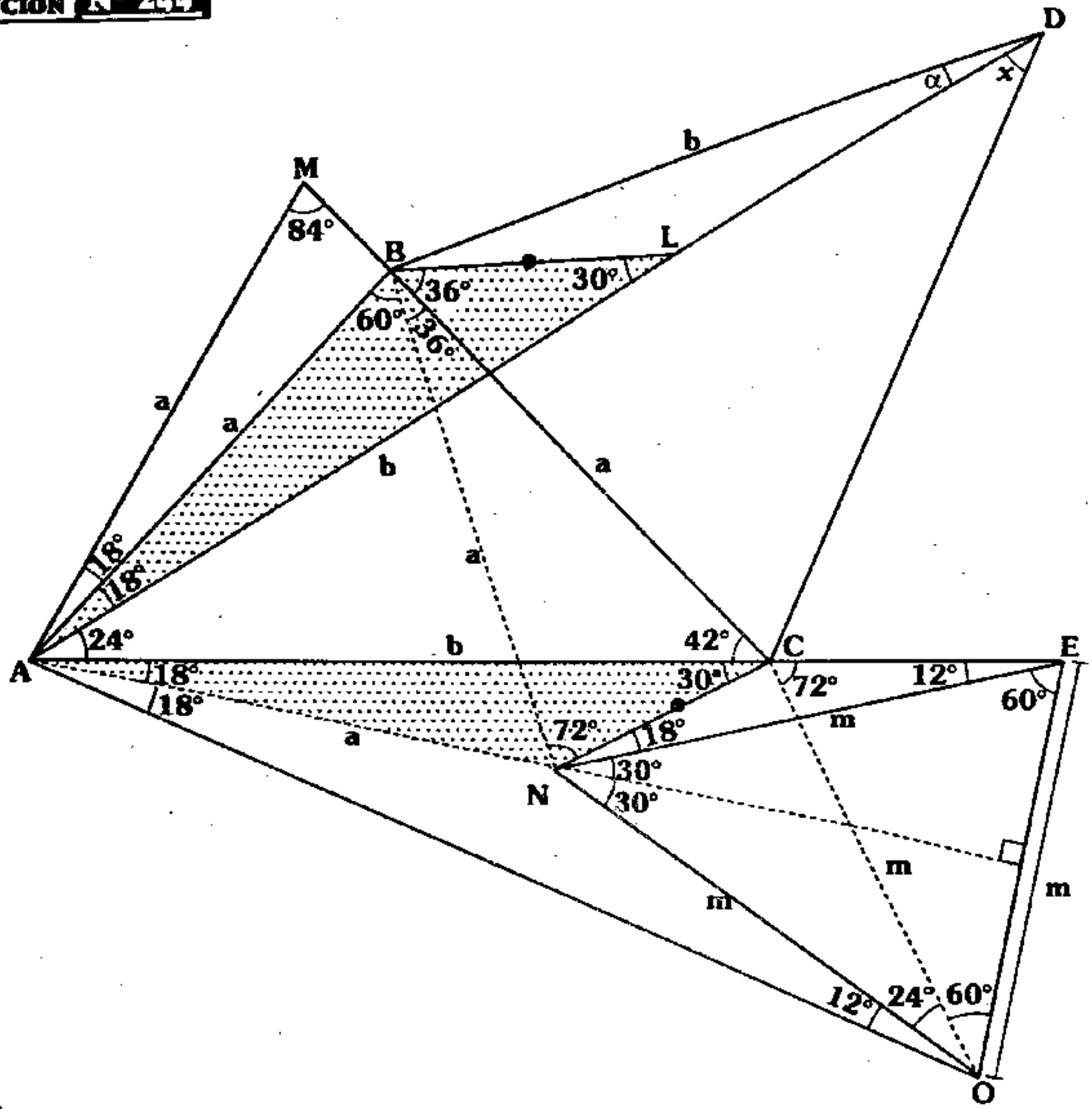
Piden x.

- Se ubica el circuncentro M del triángulo ABC → $MA=MB=MC$

  → ΔMBC : equilátero, $m\sphericalangle MBP = \theta$ y $m\sphericalangle MBA = m\sphericalangle MAB = 2\theta$
- ⌂ABPM: inscriptible → $m\sphericalangle PMB = \theta$ → $MP=PB$
- En el ΔMBC : $\qquad$ $x=30°$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 244



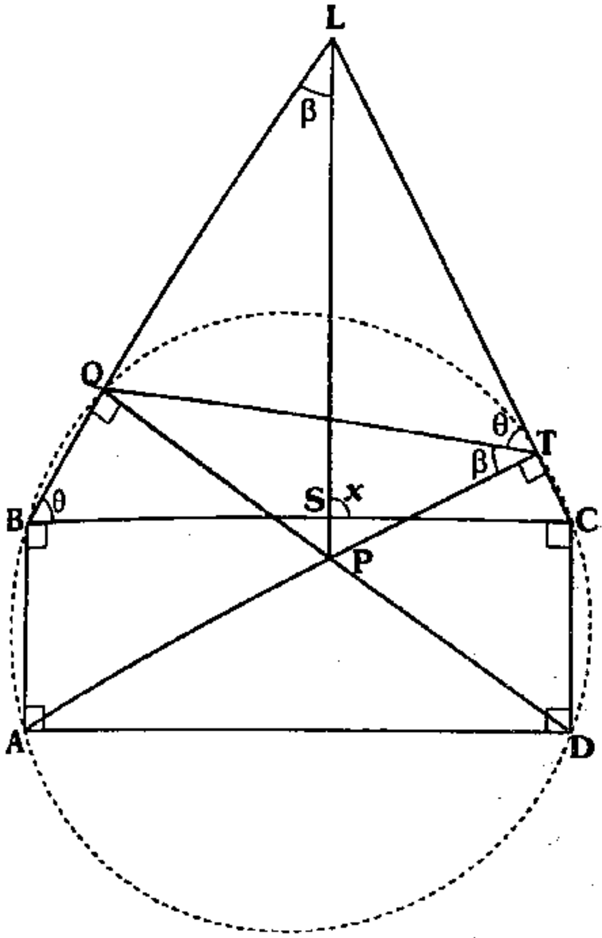
Piden θ.

- Se traza el ΔANC tal que: $m\measuredangle NAC = 18°$ y $AN = AB \rightarrow \Delta ABN$: equilátero.
- Se ubica L en $\overline{AD}$ tal que $m\measuredangle ALB = 30° \rightarrow \Delta ABL \cong \Delta ACN$
- Sea E en la prolongación de $\overline{AC}$ tal que $m\measuredangle AEN = 12°$
- Sea O circuncentro del ΔNCE
- En ΔACO : se verifica $b = m$
- $\Delta BLD \cong \Delta NCE \rightarrow \alpha = 12° \rightarrow m\measuredangle LBD = 18°$
- $\Delta AMC \cong \Delta CBD$

$$\therefore\ x = 30°$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 245



- Por demostrar que $x = 90°$
- Como $m\sphericalangle BQD = m\sphericalangle ATC = 90°$ los puntos Q y T estarán en la circunferencia circunscrita al rectángulo ABCD.
- En ΔBSL: $x = \theta + \beta$
- En $\triangle BQTC$:

$$m\sphericalangle QBC = m\sphericalangle QTL = \theta$$

- En el $\triangle PQLT$ que es inscriptible:

$$m\sphericalangle QLP = m\sphericalangle QTP = \beta$$

- En T: $\theta + \beta = 90°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 90°}$$

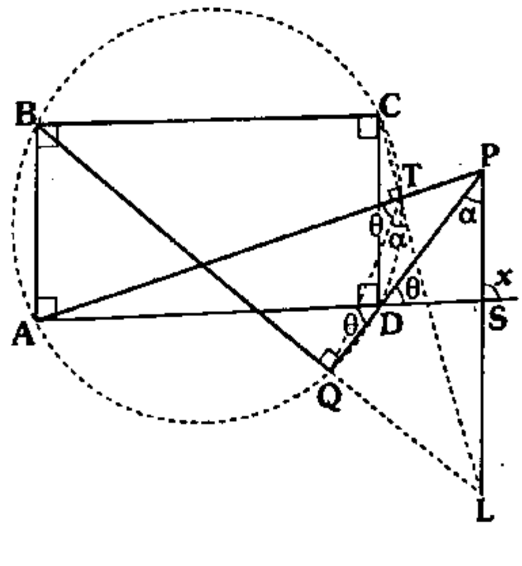
Observación

En punto P no necesariamente es interior también puede ser externo o estar en algún lado del rectángulo (la prueba es similar)

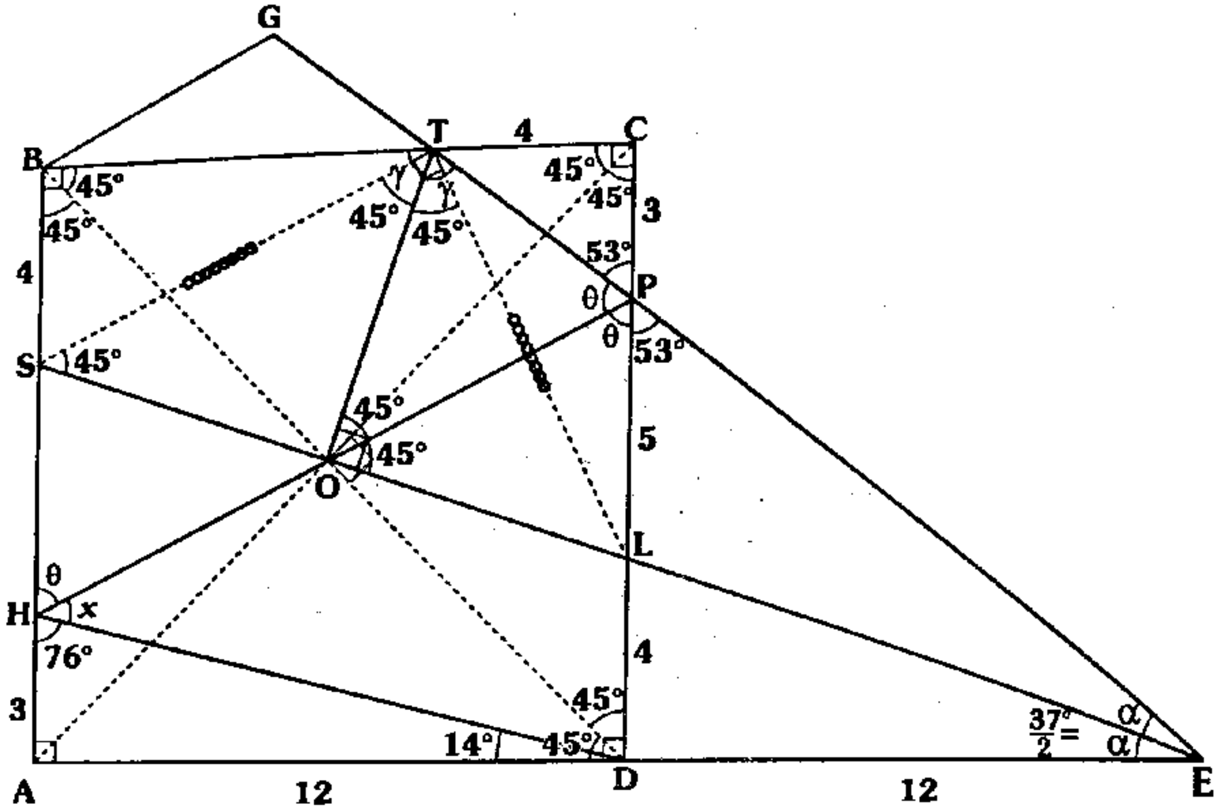
Por ejemplo

$$x = \underbrace{\alpha + \theta}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 90°}$$



RESOLUCIÓN Nº 246



Nos piden x.

- Como BHGP es trapecio isósceles $\rightarrow$ m$\measuredangle$BHP = m$\measuredangle$HPT = m$\measuredangle$HPD $\rightarrow$ O es excentro de $\triangle$TCP y $\triangle$PDE $\rightarrow$ m$\measuredangle$POL = 45° y m$\measuredangle$EOT = 90°

- $\bigcirc$OTBS y $\bigcirc$OTCL: inscriptibles m$\measuredangle$STL = 90° y ST=TL

- $\triangle$SBT ≅ $\triangle$TCL $\rightarrow$ TC=4 $\rightarrow$ m$\measuredangle$TPC = 53° y $\alpha = \frac{37°}{2}$ $\rightarrow$ DE=12 y PL=5

- Como AH=4 y AD=12 $\rightarrow$ $\triangle$HAD: notable de 14° $\rightarrow$ m$\measuredangle$AHD = 76°

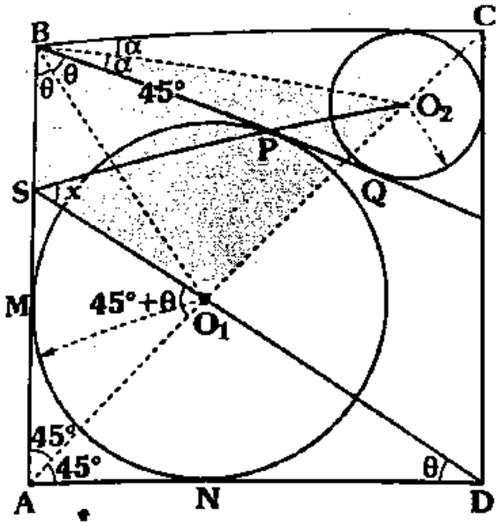
- Como $\theta = \frac{127°}{2}$ $\rightarrow$ en H:

$$x + \theta + 76° = 180°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{81°}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 247



Piden x.

- Como: $\Delta AO_1D \cong \Delta AO_1B$

  $\rightarrow\ m\sphericalangle ABO_1 = \theta$

- Notemos que $m\sphericalangle O_1BO_2 = 45°$
- $\square SBO_2O_1$: inscriptible, pues:

$$m\sphericalangle SBO_2 = m\sphericalangle SO_1A$$

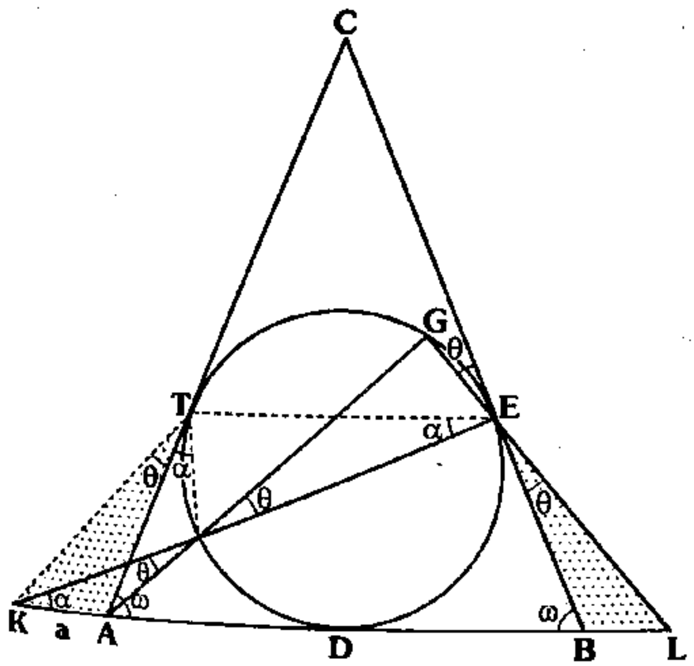
$$\therefore\ \mathbf{x = 45°}$$

Clave D

Nota

El dato que $\theta = 33°$, no era necesario.

RESOLUCIÓN Nº 248



Nos piden $\frac{a}{b}$.

- Por dato AB=BC

  $\rightarrow\ m\sphericalangle TAB = m\sphericalangle ABE = \omega$

  $\rightarrow\ \overline{TE} // \overline{AB}$

- Sea $m\sphericalangle AKE = \alpha$

  $\rightarrow\ m\sphericalangle FET = \alpha = m\sphericalangle FTA = \alpha$

  $\rightarrow\ \square KAFT$: inscriptible

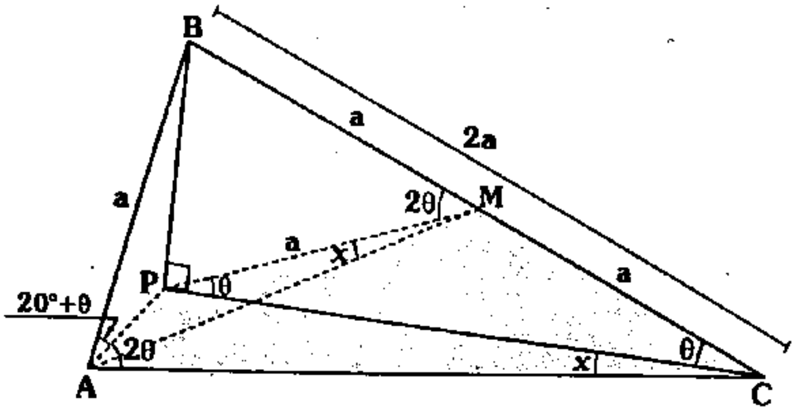
  $\rightarrow\ m\sphericalangle ATK = \theta$

- $\Delta KAT \cong \Delta LBE\ \rightarrow\ a=b$

$$\therefore\ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \mathbf{1}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 249



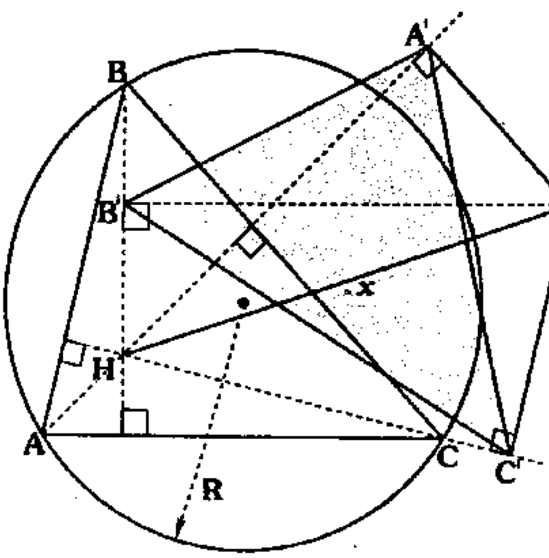
Nos piden "x".

- En ⊿BPC: se traza la mediana $\overline{PM}$ → BM=MC=PM
- Luego m∢PMB = 2θ → ⏢APMC es inscriptible
  → m∢PMA = x y m∢PAM = θ
- ΔABM : isósceles → $x + 2\theta = 20° + 2\theta$

$$\therefore\ x = 20°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 250



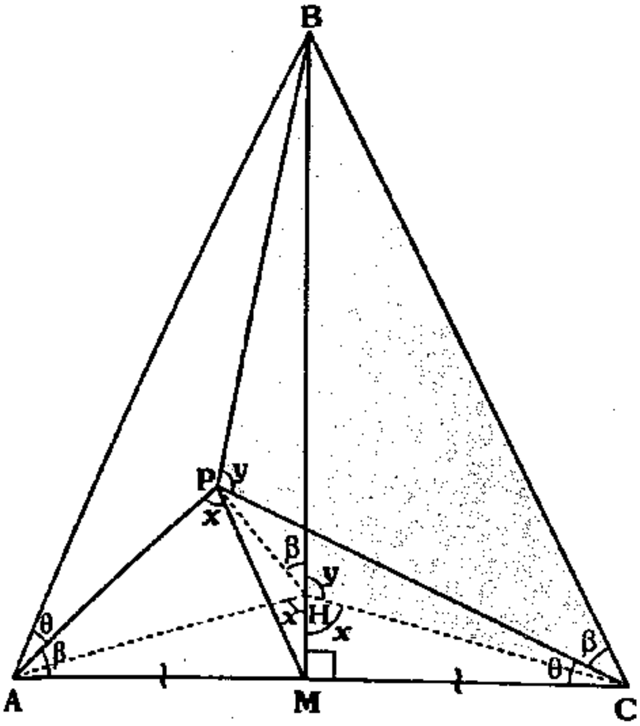
Nos piden HP.

- Notemos que H, B', A', P y C' son concíclicos, cuyo diámetro es $\overline{HP}$
- Como ΔABC ≅ ΔA'B'C entonces sus circunradios son iguales

$$\therefore\ HP = 2R$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 251



Sea: m∢APM = x y m∢BPC = y

Por demostrar: $x + y = 150°$

- Se ubica H en $\overline{BM}$ tal que el ⌂APHM: inscriptible

  → m∢PAM = m∢PHB = β y

  m∢AHM = x

- Como $\overrightarrow{BM}$ es mediatriz de $\overline{AC}$

  → m∢MHC = x

- Como m∢PHB = m∢PCB = β

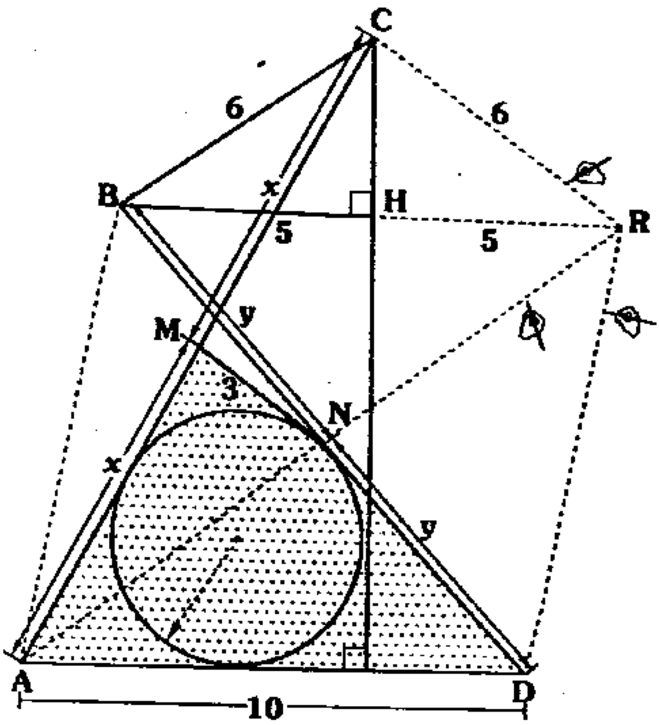
  → ⌂HPBC es inscriptible

  → m∢BHC = y

  ∴ **x + y = 180°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 252



Nos piden: AC+BD

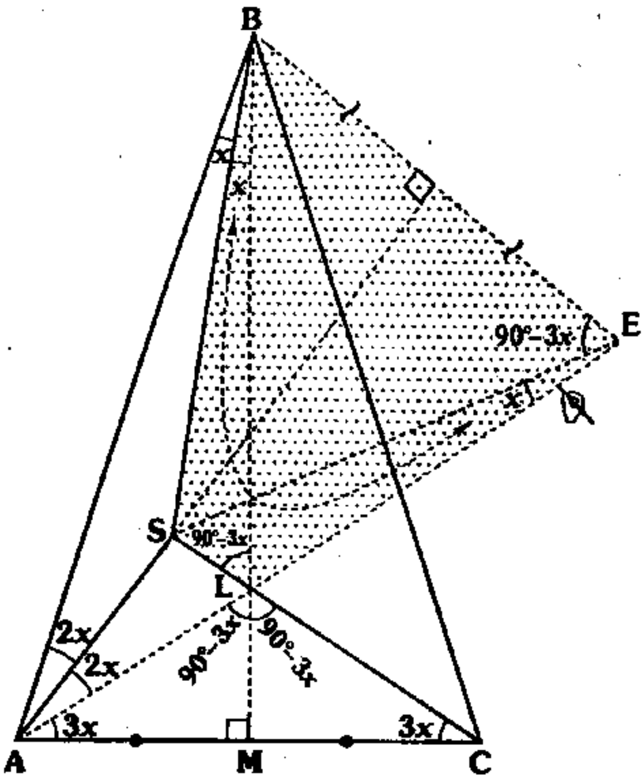
- Sea AC = 2x y BD = 2y
- Se prolonga $\overline{BH}$ hasta R tal que HR=5 → CR=6
- Como BR=AD y $\overline{BR}$ // $\overline{AD}$ → ABRD es paralelogramo
- Como BN=ND → N es centro del paralelogramo, entonces A, N y R son colineales
- ΔACR : $\overline{MN}$ es base media ⇒ MN=3
- En ⌂AMND: x + y = 3 + 10

  x + y = 13

  ∴ **AC+BD=2x+2y=26**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 253



- Se traza la altura $\overline{BM}$ del $\triangle ABC$ entonces AM=MC, $\overline{BM} \cap \overline{SC} = \{L\}$.
- Por teorema de la mediatriz LA=LC

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle LAC = 3x$ y $m\measuredangle SAL = 2x$
- Se traza $\overline{BE} \perp \overleftrightarrow{AL}$ ($E \in \overleftrightarrow{AL}$)

  $\Rightarrow$ $\triangle ABE$: isósceles
- Como:

  $m\measuredangle ABS = m\measuredangle SEA = x$

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle SEB = 90 - 3x$

  $\Rightarrow$ ⌂LSBE es inscriptible

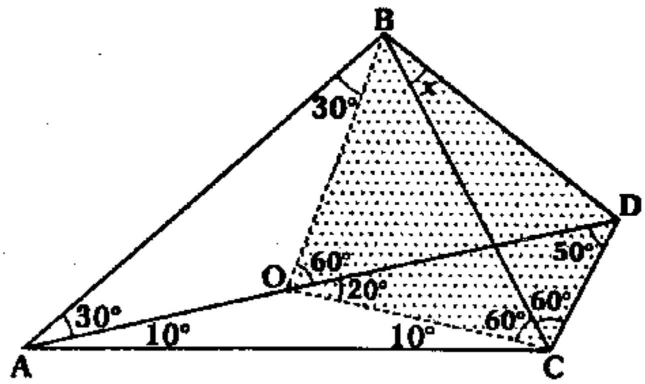
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle SBM = x$
- En ⊿AMB: $7x + 2x = 90°$

  $\therefore$ $\boldsymbol{x = 10°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 254

Nos piden "x".

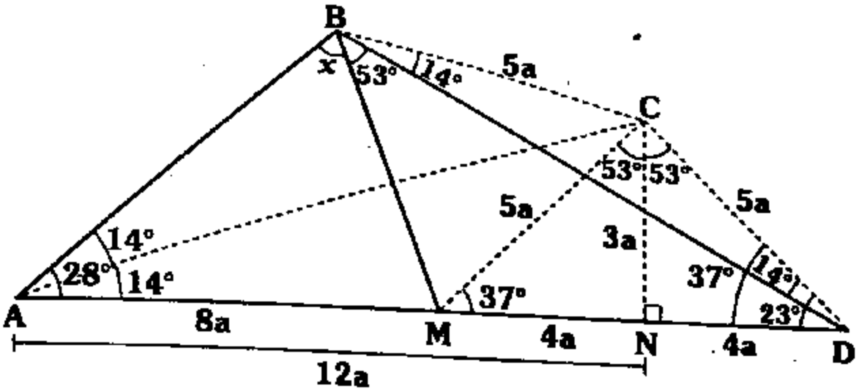


- Ubicamos el centro de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, la cual se encuentra en la línea BD entonces AO=OB=OC

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle COD = 20°$ y $m\measuredangle BOD = 60°$
- Notamos que el ⌂BDCD es inscripitble $\boldsymbol{x = 20°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 255



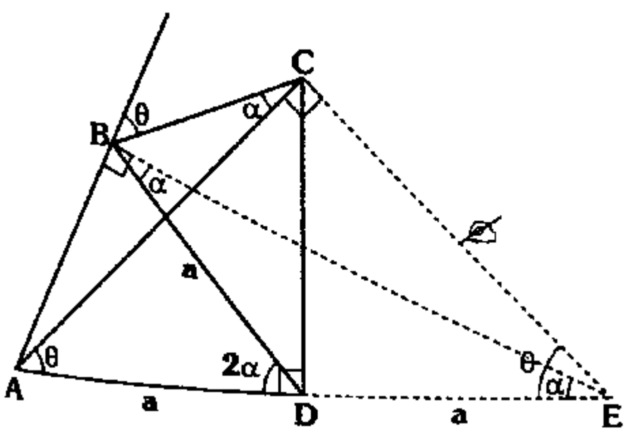
Piden "x"

- Se ubica C en la región exterior relativa a $\overline{CD}$ tal que $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle CAD = 14°$ y $m\sphericalangle BDC = 14°$ entonces ⌂ABCD es inscriptible.
- ΔBCD : isósceles con BC=CD
- En el ΔACD, se traza la altura CN entonces ⊿CND: CN=3a, ND=4a y CD=5a y en el ⊿ANC: AN=12a.
- Del dato AM=MD entonces MN=4a $\Rightarrow$ CM=5a
- Como CB=CM=CD $\Rightarrow$ $m\sphericalangle MBD = 53°$
- En ΔABD: $x + 53° + 23° + 28° = 180$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 76°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 256



Nos piden "θ".

- Se prolonga $\overline{AD}$ hasta E talque

  BD = DE $\Rightarrow$ $m\sphericalangle AEB = \alpha$
- Notemos que el ⌂ABCE es inscriptible

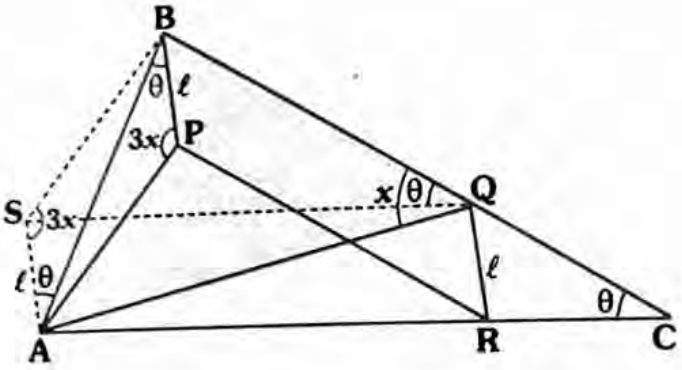
  $\Rightarrow$ $m\sphericalangle AEC = \theta$ $\Rightarrow$ AD=DE
- Como AD=DB=DE

  $\Rightarrow$ $m\sphericalangle ABE = 90°$ $\Rightarrow$ $m\sphericalangle AC = 90°$
- En el ⊿ACE:

$\boldsymbol{\theta = 45°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 257



Nos piden "x".

- Se traza el paralelogramo APBS
  → m∢ASB = 3x y AS = BP = ℓ y $\overline{AS} // \overline{PB}$
- Como $\overline{AS} // \overline{RQ}$ y AS = RQ = ℓ entonces ASQR es paralelogramo
  → m∢SQB = θ
- ⌂ASBQ es inscriptible pues:

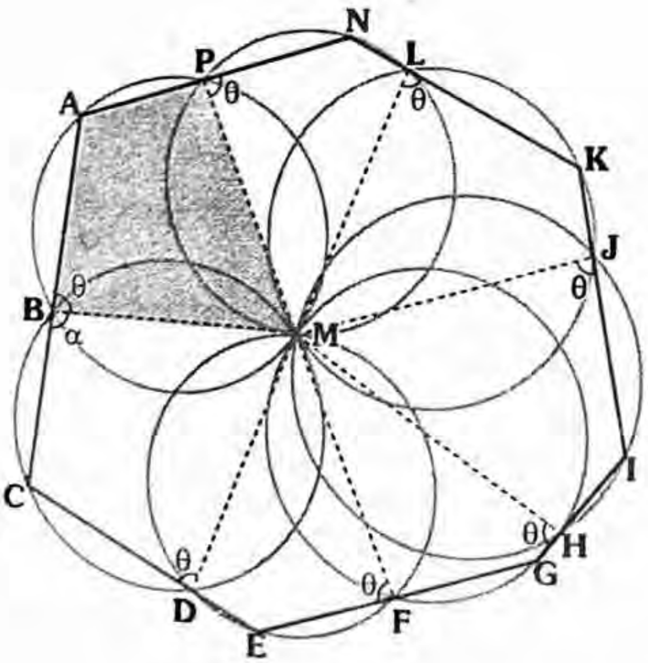
m∢SQB = m∢SAB

→ x + 3x = 180°

∴ **x = 45°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 258



- Por demostrar que A, B y C son colineales
- Comenzamos en el ⌂MBAP que es inscrito:

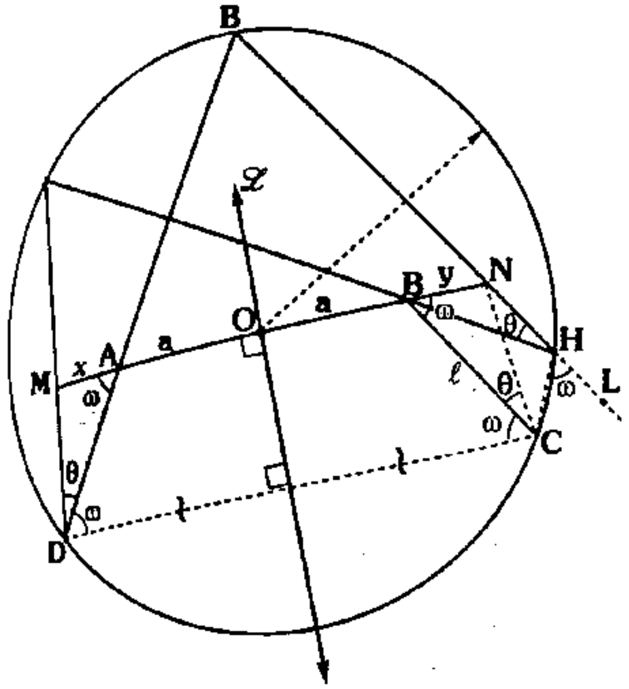
  Sea m∢MBA = θ → m∢MPN = θ
- Luego en cada cuadrilátero inscrito en las circunferencias notaremos que "θ" se repite, hasta llegar al ⌂BMDC donde:

$$\alpha + \theta = 180°$$

∴ **A, B y C: colineales**

RESOLUCIÓN Nº 259

(Caso particular del teorema de Papilon)



Por demostrar que $x=y$.

- Se traza la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overline{AB}$ en O entonces $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: eje de simetría
- Se traza $\overline{DC} \perp \mathscr{L} \rightarrow BC=AD$
- Sea $m\measuredangle ADC=\omega$

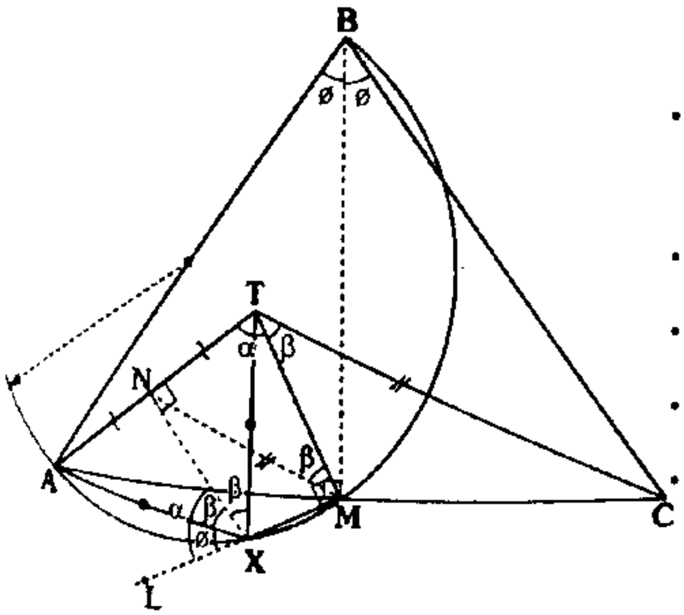
$\rightarrow m\measuredangle DCB = m\measuredangle CBN = \omega$

- En ⌂DRHC: $m\measuredangle CHL=\omega$
- ⌂CBNH: inscriptible

  $\rightarrow m\measuredangle BCN=\theta$
- $\Delta ADM \cong \Delta BCN$ (ALA)

  $\therefore\ x=y$

RESOLUCIÓN Nº 260



Nos piden $\alpha-\beta$ en función de $\varnothing$.

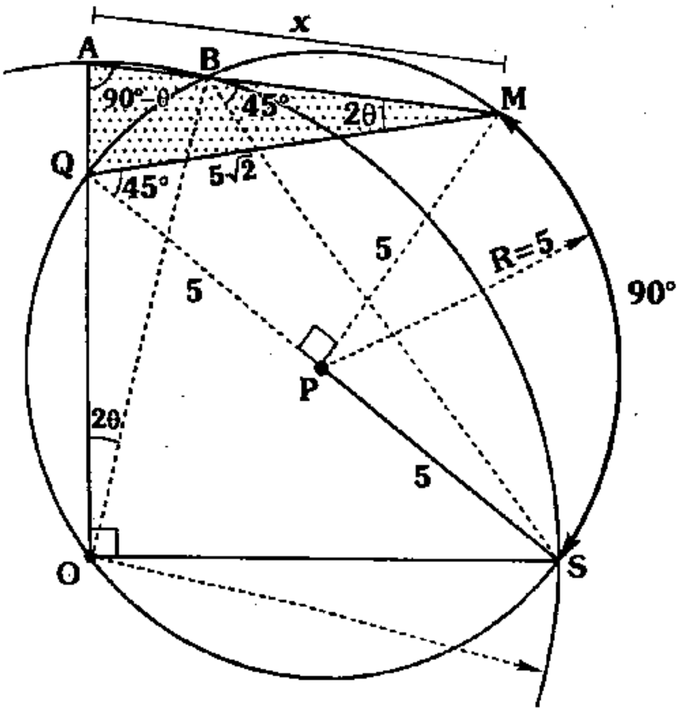
- En ΔAXT se traza la altura $\overline{XN}$ $\rightarrow AN=NT$
- ΔATC: $\overline{MN}$ es base media $\rightarrow$ $\overline{MN} // \overline{TC}$

  $\rightarrow m\measuredangle NMT=\beta$
- ⌂XNTM: inscritible $\rightarrow m\measuredangle NXT=\beta$
- ΔAXT : isósceles $\rightarrow m\measuredangle AXN=\beta$
- ⌂AXMB: inscritible $\rightarrow m\measuredangle AXL=\varnothing$
- ⌂XNTM: $\underbrace{m\measuredangle NXL}_{\beta+\varnothing}=\alpha$

$\therefore\ \varnothing=\alpha-\beta$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 261



Piden "x".

- Como $m\sphericalangle QOS=90° \Rightarrow \overline{QS}$ es diámetro.
- En el cuadrante: $m\sphericalangle MBS=45°$

$$\Rightarrow \ m\widehat{MS}=90°$$

$$\Rightarrow \ m\sphericalangle MPS=90°$$

- En ⊿QPM: $QM=5\sqrt{2}$
- Sea: $m\sphericalangle QOB=2\theta$

$$\Rightarrow m\sphericalangle QMB=2\theta$$

- ΔOAB: isósceles entonces:

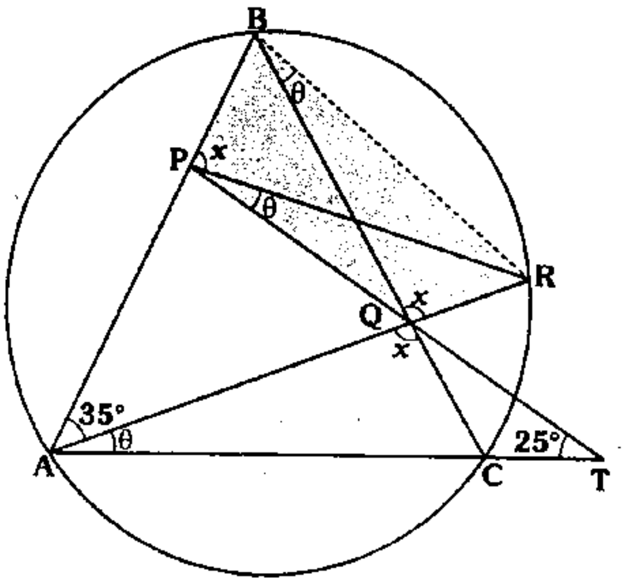
$m\sphericalangle OAB=90°-\theta$

- ΔAQM: isósceles

$\therefore$ $\boldsymbol{x=5\sqrt{2}}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 262



- Nos piden "x".
- Notemos que el cuadrilátero PBRQ es inscriptible entonces:

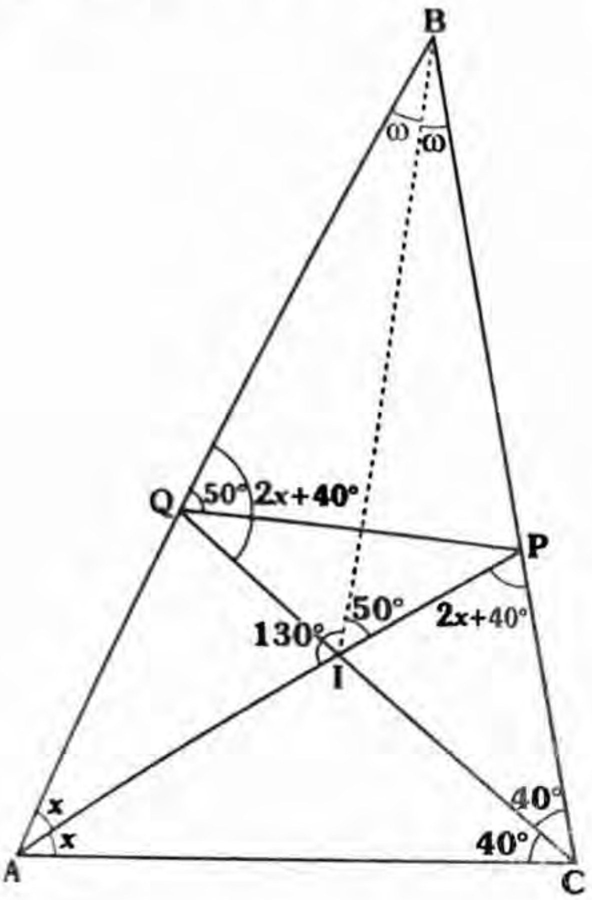
$$m\sphericalangle QPR=m\sphericalangle QBR=\theta$$

- Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle RAC=\theta$
- En el ΔAPT: $x+\theta=35°+\theta+25°$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=60°}$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 263



Piden "x".

- Por propiedad:

$$m\measuredangle AIC = 90° + \frac{80°}{2} = 130°$$

$$\rightarrow m\measuredangle BIP = 50°$$

- ⌂IQBP: inscriptible

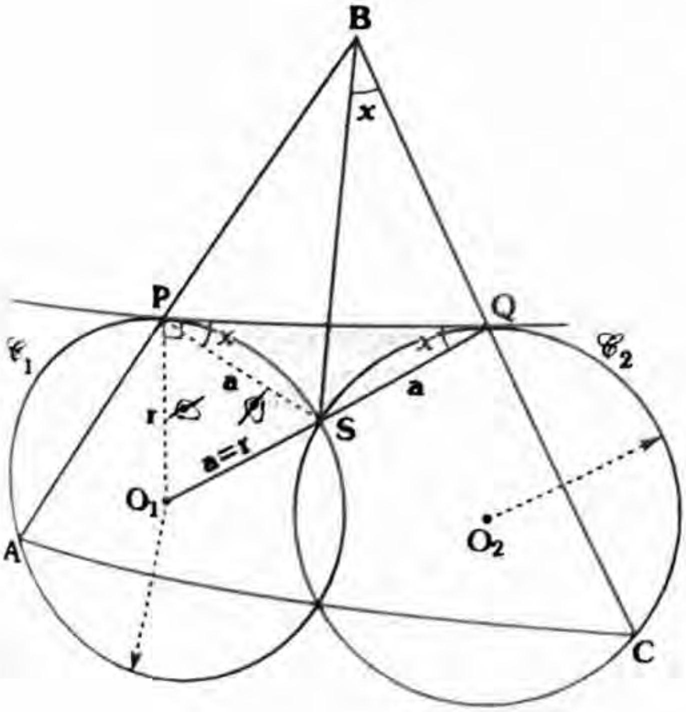
$$\rightarrow m\measuredangle IQB = m\measuredangle IPC = 2x + 40°$$

- $\Delta APC: \; 3x + 120° = 180°$

$$\therefore \; \mathbf{x = 20°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN N° 264



- ⌂PBQS: inscriptible
  $\rightarrow m\measuredangle PQS = x$

- Como $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2 \;\; \rightarrow \;\; m\overset{\frown}{PS} = m\overset{\frown}{SQ}$
  $\rightarrow m\measuredangle PQS = x$

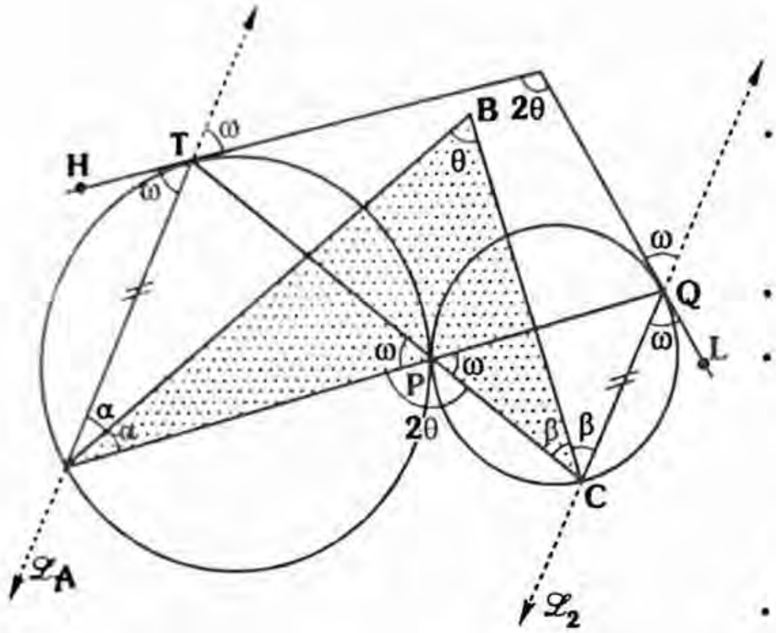
- En $⊿\, O_1PQ$: $\overline{PS}$ es mediana
  $\rightarrow \; QS = SO_1 = a = r$

- $⊿\, O_1PQ$: notable de 30°

$$\therefore \; \mathbf{x = 30°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 265



Piden θ.

- Sea $m\sphericalangle CPQ = \omega$

  $\rightarrow m\sphericalangle LQC = m\sphericalangle ATH = \omega$

- Se sabe que: $\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2 \rightarrow \omega + \omega = 2\theta$

  $\rightarrow \omega = \theta$

- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \rightarrow \theta = \alpha + \beta$
- En ABCP:

$$m\sphericalangle APC = \theta + \underbrace{\alpha + \beta}_{\theta}$$

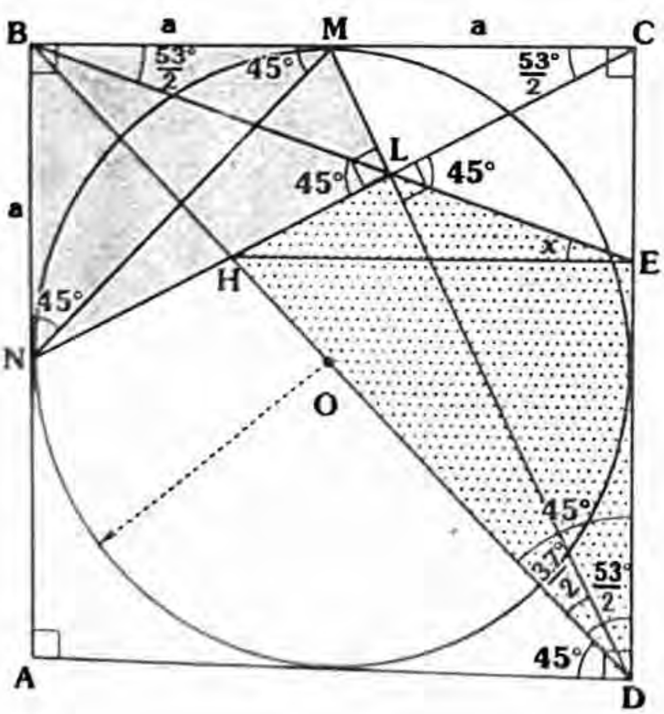
$\rightarrow m\sphericalangle APC = 2\theta$

- En P: $2\theta + \theta = 180°$

$\therefore$ $\mathbf{\theta = 60°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 266



Nos piden "x".

- Notemos que AN=NB=BM=MC

  $\Rightarrow m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle MDC = \dfrac{53°}{2}$

  $\Rightarrow \overline{NC} \perp \overline{MD}$

- $\triangle$NBML es incriptible

  $\Rightarrow m\sphericalangle NLB = 45°$

- Como $m\sphericalangle HDC = m\sphericalangle HDE = 45°$

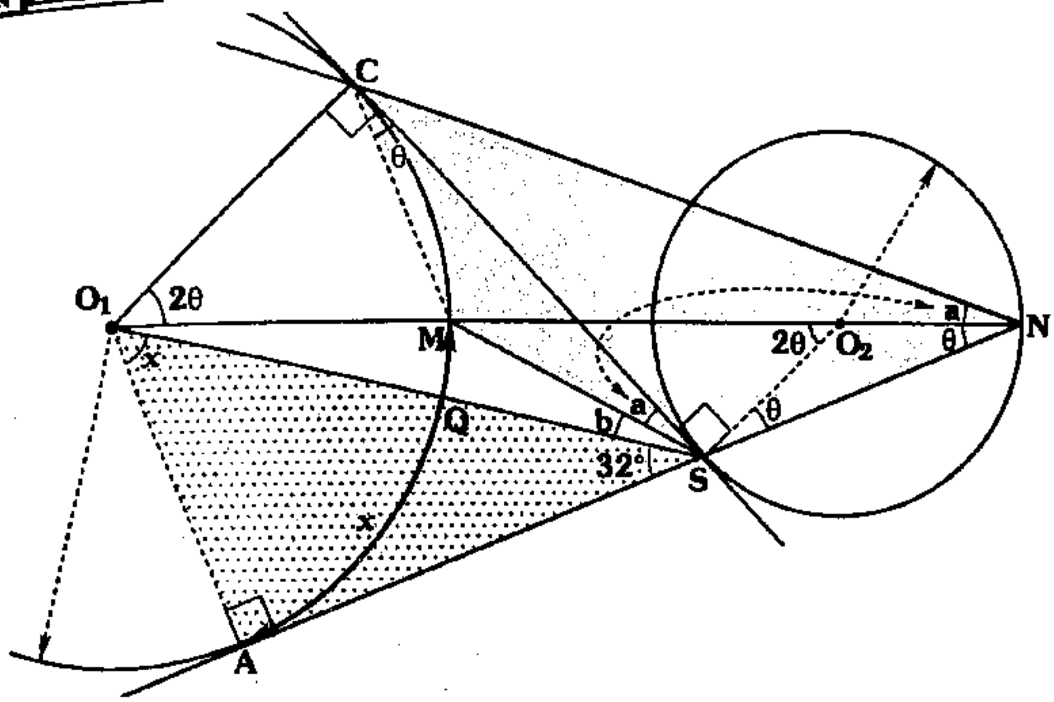
  $\Rightarrow$ el $\triangle$HLED: inscriptible

  $\Rightarrow m\sphericalangle HEL = m\sphericalangle HDL = \dfrac{37°}{2}$

$\therefore$ $\mathbf{x = \dfrac{37°}{2} = 18°30'}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 267

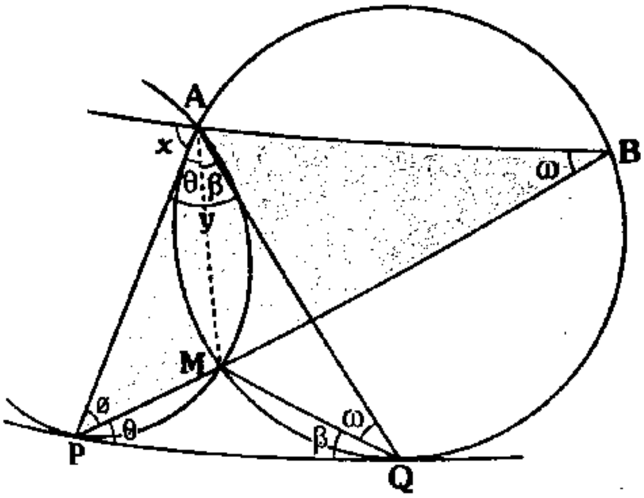


Nos piden "x". Dato: $a+b=32°$

- Sea $m\measuredangle CO_1M = 2\theta \rightarrow m\measuredangle MCS = \theta$
- Como $\overline{O_1C} // \overline{SO_2} \rightarrow m\measuredangle SO_2O_1 = 2\theta \rightarrow m\measuredangle SNO_2 = \theta$
- $\triangle$MCNS: inscrito $\rightarrow m\measuredangle MSC = a \rightarrow m\measuredangle CSO_1 = a + b = 32°$
- Como $\overrightarrow{SO_1}$ es bisectriz del ángulo CSA $\rightarrow m\measuredangle O_1SA = 32°$
- $\triangle O_1AS$: **$x=58°$**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 268



Nos piden la relación entre x e y.

- Sea $m\measuredangle MAP = \theta$ y $m\measuredangle MAQ = \beta$

$\rightarrow \ y = \theta + \beta$

- Por ángulo semiinscrito:

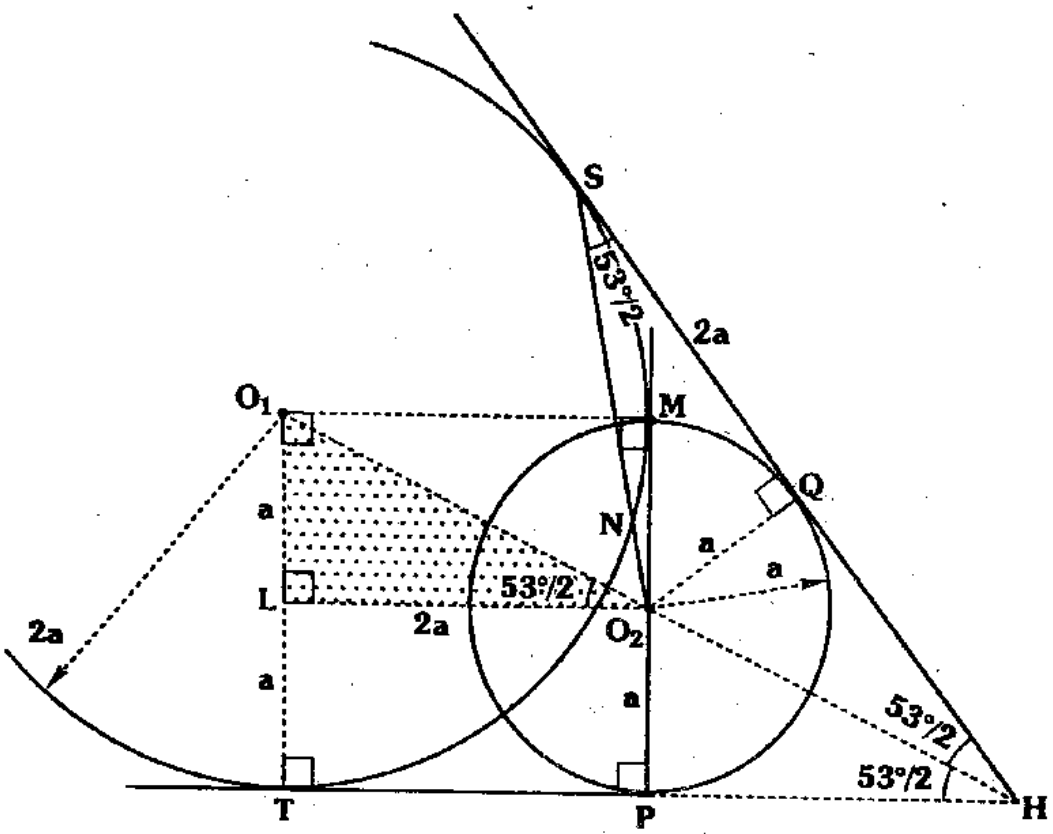
$m\measuredangle MPQ = \theta$ y $m\measuredangle MQP = \beta$

- En ΔPAB : $x = \omega + \varnothing$
- En PAQ : $y + \underbrace{\theta + \beta}_{y} + \underbrace{\varnothing + \omega}_{x} = 180°$

$\therefore \ x = 180° - 2y$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 269



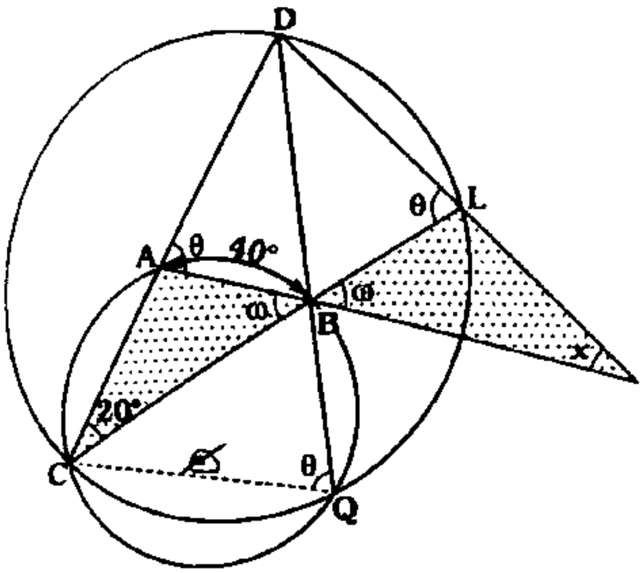
Nos piden: $m\widehat{PQ} - m\widehat{TN}$

- Se prolonga $\overline{TP}$ y $\overline{SQ}$ las cuales se cortan en H $\rightarrow$ O_1, O_2 y H: colineales.
- Sea $O_2P = O_2M = a$ ⊿ O_1LO_2: notable $\rightarrow m\sphericalangle LO_2O_1 = \dfrac{53°}{2}$ $\rightarrow m\sphericalangle THS = 53°$
- ⊿ O_2QS: notable de 53°/2
- Como: $m\widehat{PQ} + 53° = 180° \rightarrow m\widehat{PQ} = 127°$
- Debido a que $m\widehat{SN} = 53°$ y $m\widehat{SN} + \widehat{TN} = 127°$ $\rightarrow m\widehat{TN} = 74°$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{PQ} - m\widehat{TN} = 53°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 270



Piden "x".

Dato $m\widehat{AB} = 40°$

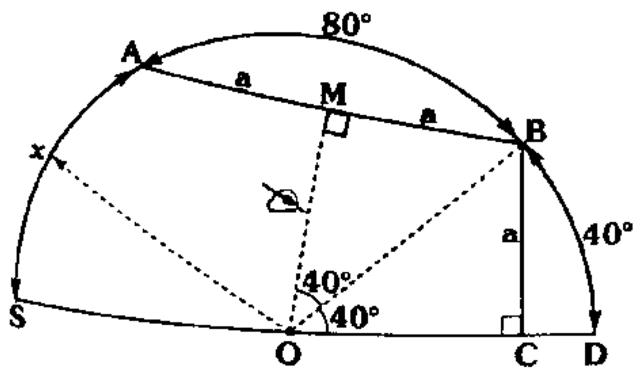
- Por ángulo inscrito: $m\sphericalangle ACB = 20°$
- Sea $m\sphericalangle CQD = \theta \Rightarrow m\sphericalangle BAD = \theta$
- También: $m\sphericalangle CLD = \theta$
- En los ángulos sombreados:

$$\theta = x + \omega = 20° + \omega$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 20°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 271



- Nos piden "x".
- Como AB=2(BC) entonces se traza $\overline{OM} \perp \overline{AB} \rightarrow$ AM=MB M
- Debido a que MB=BC $\rightarrow \overline{OB}$ es bisectriz del

$$m\sphericalangle MOC \rightarrow m\sphericalangle BOC = 40°$$

$$\rightarrow\ m\widehat{BD} = 40°$$

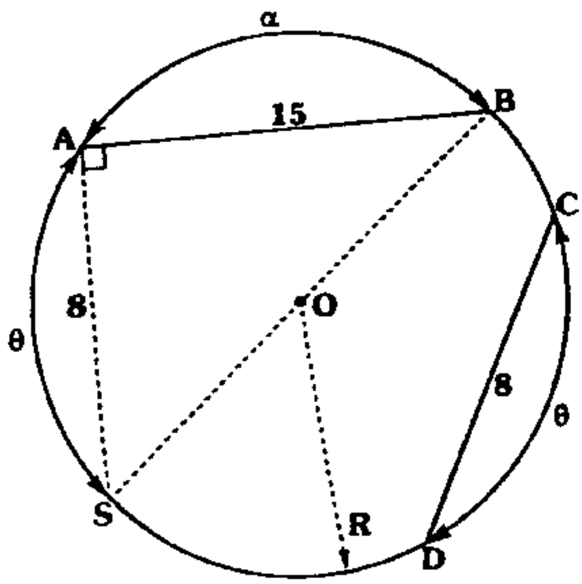
- Finalmente:

$$x + 80 + 40° = 180°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 60°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 272



Nos piden R.

- Se traza el diámetro $\overline{BS}$, como

$$\alpha + \theta = 180° \rightarrow m\widehat{AS} = \theta$$

- Como:

$$m\widehat{AS} = m\widehat{CD} \rightarrow AS=CD=8$$

- En ⊿SAB:

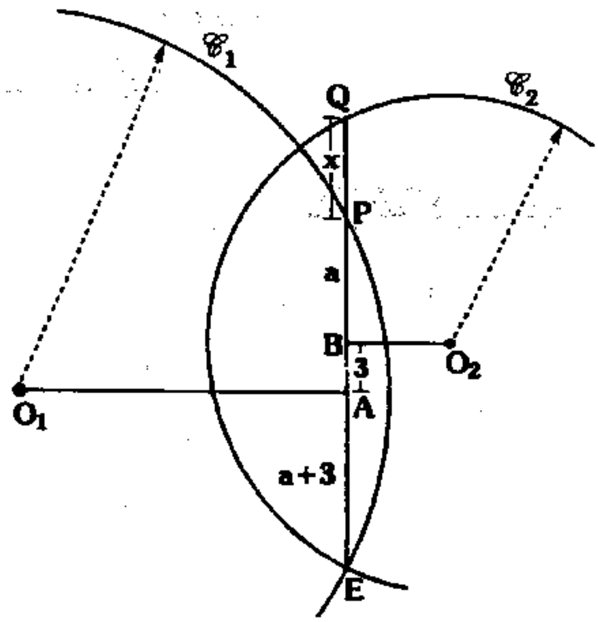
$$(SB)^2 = 8^2 + 15^2$$

$$\rightarrow \underbrace{SB}_{2R} = 17$$

$$\therefore \ \mathbf{R = 8,5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 273



Piden "x".

- Sea PB=a
- Por propiedad en $\mathscr{C}_1$: PA=AE=a+3

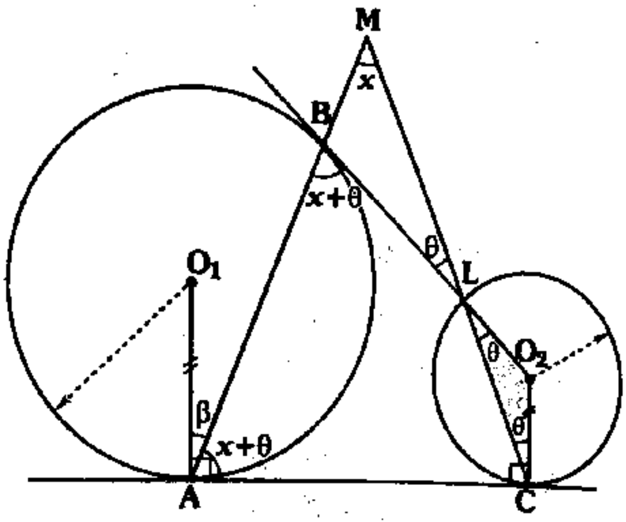
en $\mathscr{C}_2$: $\underbrace{QB}$ = BE

$$\not{a} + x = \not{a} + 6$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 6}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 274



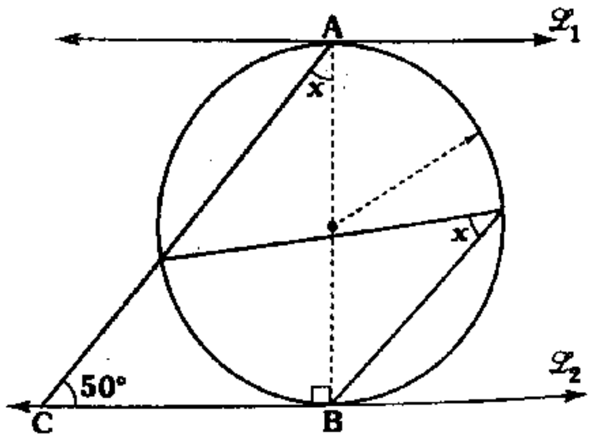
Piden "x".

- $\overline{O_1A} // \overline{O_2C} \rightarrow x = \theta + \beta$
- ΔLO_2C : isósceles
- ΔLMB : $m\sphericalangle ABL = x + \theta$
- $m\sphericalangle ABL = m\sphericalangle BAC$ (propiedad)
- En A: $x + \underbrace{\beta + \theta}_{x} = 90°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 45°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 275



Piden "x".

- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \rightarrow \overline{AB}$ es diámetro
- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle BAC = x$$

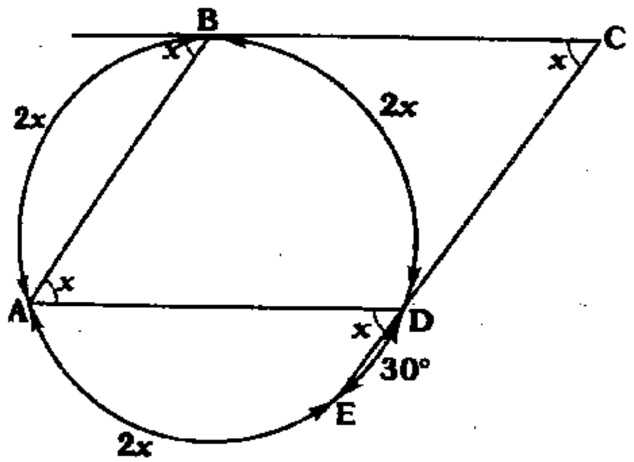
- En $\triangle ABC$:

$$x + 50° = 90°$$

$$\therefore \ x = 40°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 276



Piden "x".

- Como ABCD: paralelogramo

$\rightarrow$ $m\measuredangle BAD = x$

$\rightarrow$ $m\widehat{BD} = 2x$

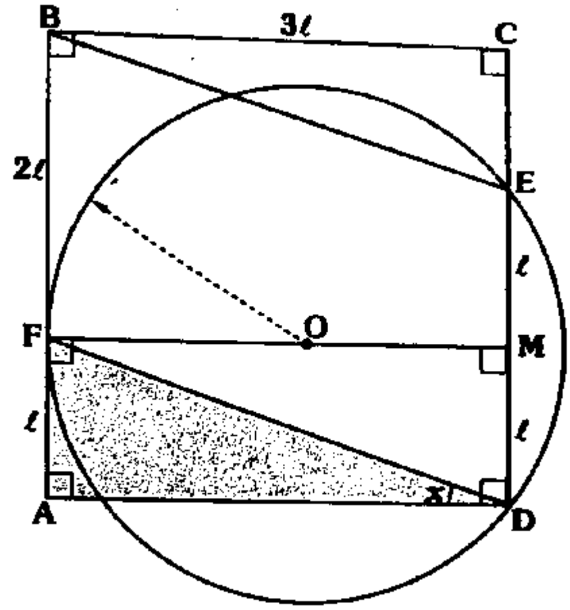
$\rightarrow$ $m\widehat{AB} = m\widehat{AE} = 2x$

- $2x + 2x + 2x + 30° = 360°$

$$\therefore \ x = 55°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 277



Piden "x".

- Como $\overline{OF} \perp \overline{AB} \rightarrow \overline{OM} \perp \overline{ED}$

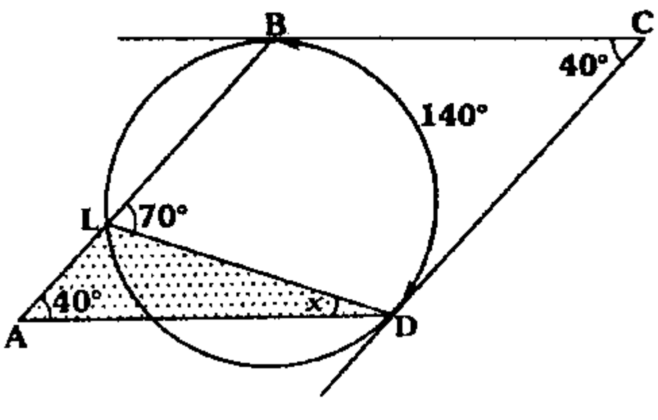
$\rightarrow$ $EM = MD = \ell$

- FBED: paralelogramo $\rightarrow$ $FB = 2\ell$
- AFMD: rectángulo $\rightarrow$ $AF = \ell$
- ABCD: cuadrado $\rightarrow$ $AD = 3\ell$
- $\triangle FAD$: notable

$$\therefore \ x = \frac{37°}{2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 278



Piden "x".

- Como ABCD: paralelogramo

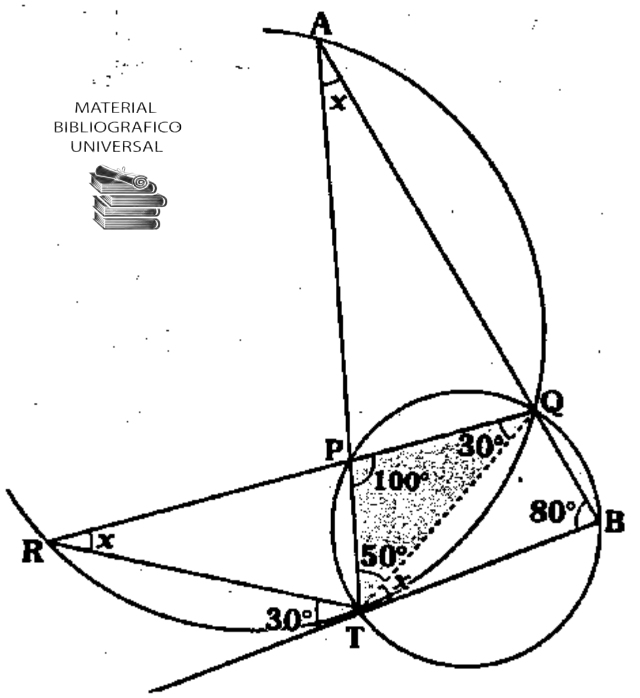
$$\rightarrow m\measuredangle BAD = 40°$$

- Por propiedad: $m\widehat{BD} = 140°$
- En ΔALD: $x + 40° = 70°$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 30°}$$

Clave C

Resolución N° 279



Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito $m\measuredangle TAQ = x$
- Por ángulo semi-inscrito:

$$- \ m\measuredangle QTB = x$$

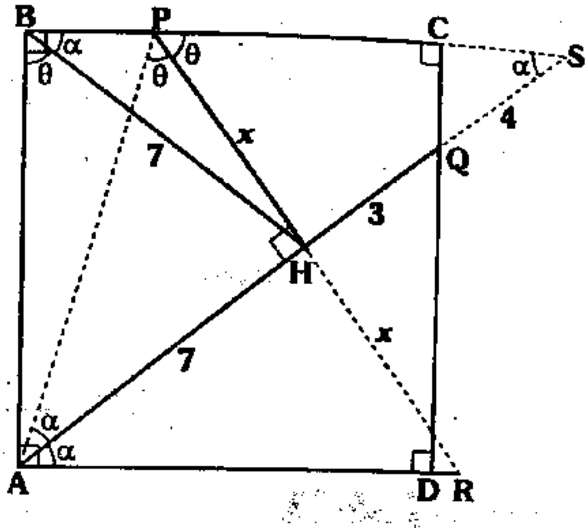
$$- \ m\widehat{RT} = 60°$$

- En ΔTPQ: $m\measuredangle PTQ = 60°$
- ΔTBA: $x + x + 50° + 80° = 180°$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 25°}$$

Clave A

Resolución N° 280



Nos piden "x"

- $\triangle$ABPH: inscriptible $\rightarrow$ $m\measuredangle APH = \theta$
- Se prolonga $\overline{AQ}$ la cujal corta a $\overleftrightarrow{BC}$ en S.
- ΔAPS: isósceles $\rightarrow$ AH=HS
- En $\triangle ABS$: AH=HS=BH=7
- Al prolongar $\overline{PH}$ hasta que corte a $\overline{AD}$ en R
- De la observación:

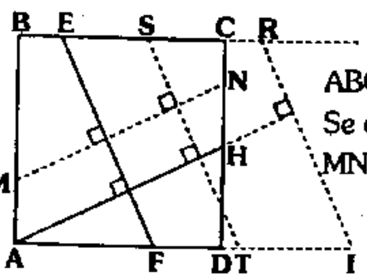
$$\underbrace{PR}_{} = AQ$$

$$2x = 10$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 5}$$

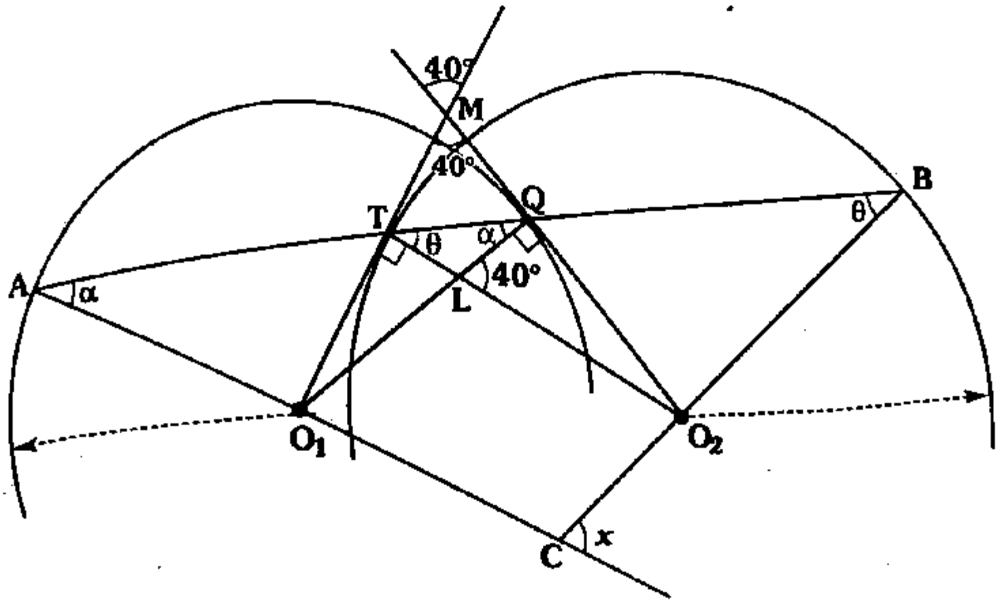
Clave B

Observación



ABCD: cuadrado
Se cumple:
MN=AH=EF=ST=RI

RESOLUCIÓN Nº 281



Piden "x".

- ΔAO_1Q y ΔO_2TB : isósceles

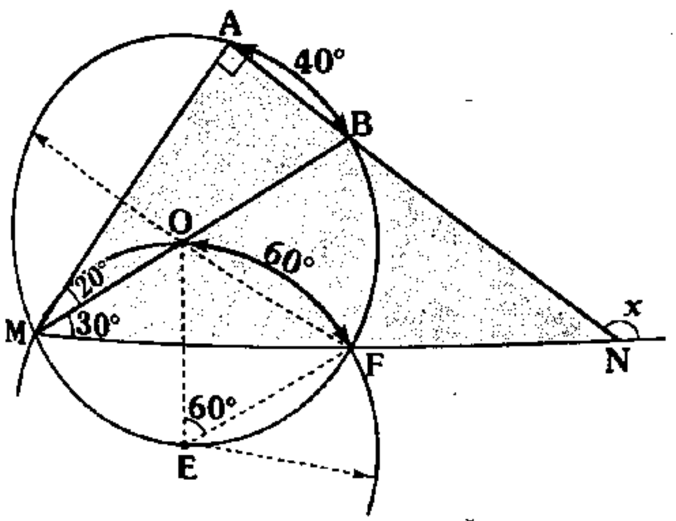
$$\rightarrow\ m\sphericalangle O_1AQ = m\sphericalangle O_1QA = \alpha \quad y \quad m\sphericalangle O_2TB = m\sphericalangle O_2BT = \theta$$

- $\triangle$LTMQ: inscriptible $\rightarrow$ $m\sphericalangle O_2LQ = 40°$
- En ΔABC : $x = \alpha + \theta$

$$\therefore\ x = 40°$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 282



Nos piden "x".

- Como $\overline{MB}$ es diámetro

$\rightarrow\ m\sphericalangle MAB = 90°$ y $m\sphericalangle AMB = 20°$

- ΔEFO : equilátero

$\rightarrow\ m\sphericalangle OMF = 30°$

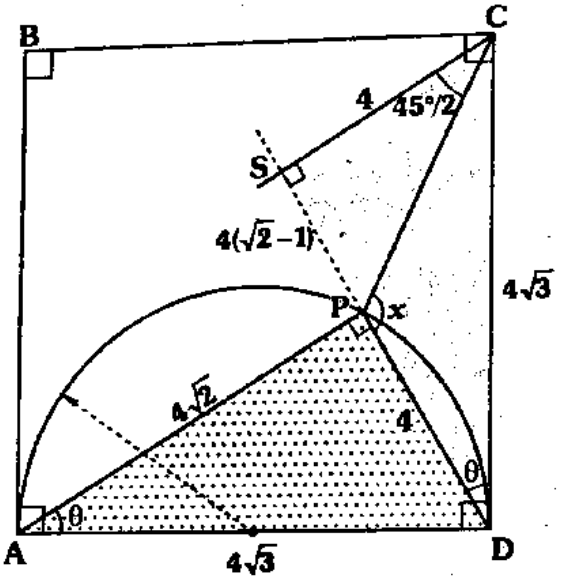
- $\triangle$MAN:

$$x = 90° + 50°$$

$$\therefore\ x = 140°$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 283



Nos piden "x".

- Se prolonga $\overline{DP}$ y se traza $\overline{CS} \perp \overleftrightarrow{DP}$
- $\triangle DPA \cong \triangle CSD$

$\rightarrow$ $CS = PD = 4$

$\rightarrow$ $SP = 4\sqrt{2} - 4 = 4\left(\sqrt{2} - 1\right)$

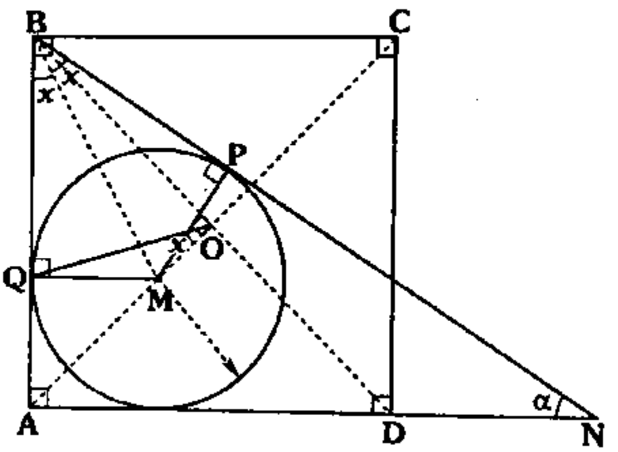
- $\triangle PSC$: notable de 45°/2

$$x = 90° + \frac{45°}{2}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 112°30'}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 284



Nos piden "x".

- Sea M el centro de la circunferencia inscrita en el $\triangle BAN$.
- Notemos que ⌂MQBO y ⌂MQPB: inscriptibles

$\rightarrow$ $m\measuredangle MBQ = m\measuredangle MBN = x$

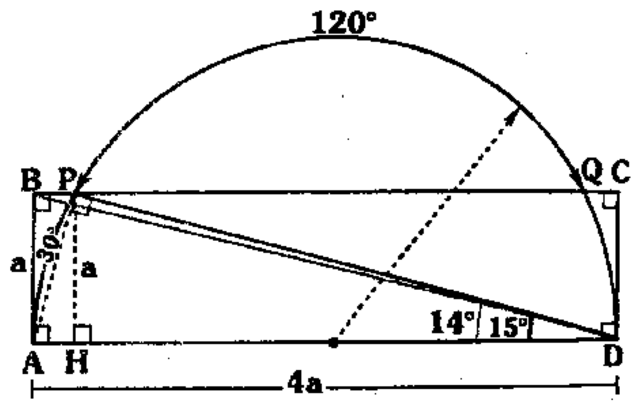
- Finalmente en $\triangle ANB$:

$$2x + \alpha = 90°$$

$$\therefore \ \boldsymbol{x = 45° - \frac{\alpha}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 285



Nos piden: $m\measuredangle BDP$

- Como $m\overset{\frown}{PQ} = 120 \rightarrow$ $m\overset{\frown}{NP} = 30°$

$\rightarrow$ $m\measuredangle ADP = 15°$

- En $\triangle APD$: por propiedad

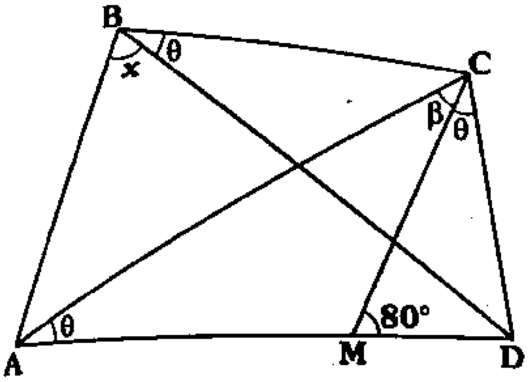
$$AD = 4(PH)$$

- $\triangle BAN$: notable de 14°

$$\therefore \ \boldsymbol{m\measuredangle BDP = 1°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 286



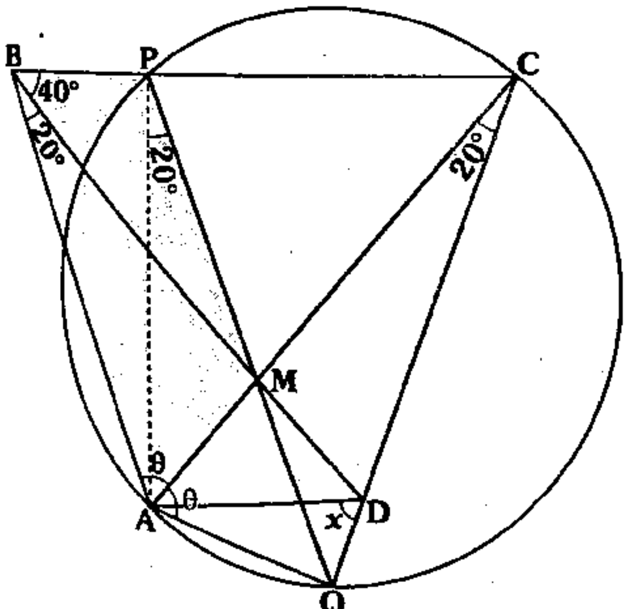
Nos piden "x".

- $\triangle$ABCD: inscriptible $\rightarrow\ x = \theta + \beta$
- $\Delta AMC: \theta + \beta = 80°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 80°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 287



Nos piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\sphericalangle QPC = \theta$$

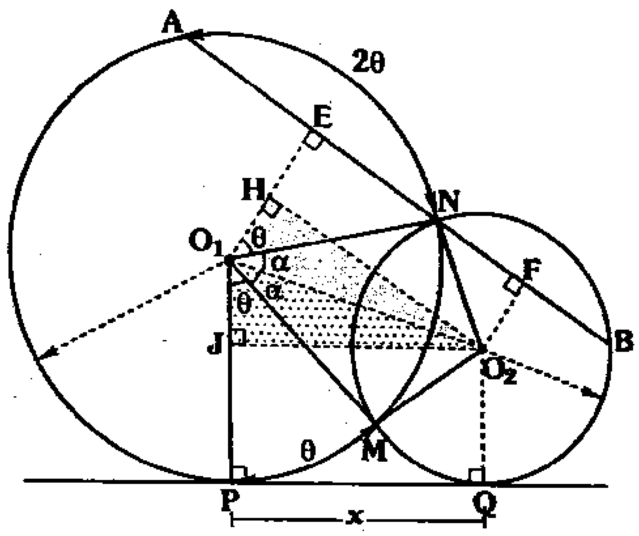
$$m\sphericalangle APQ = 20°$$

- $\triangle$ABPM: inscriptible $\rightarrow m\sphericalangle ABM = 20°$
- $\triangle$ABCD: inscriptible

$$\therefore\ \mathbf{x = 60°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 288



Nos piden: $\dfrac{PQ}{AB}$

- Del dato: $m\widehat{AN} = 2\theta$ y $m\widehat{PM} = \theta$
- $\triangle\ MO_1NO_2$: trapezoide simétrico

$$\rightarrow m\sphericalangle NO_1O_2 = m\sphericalangle O_2O_1$$

- Se traza $\overline{O_1E} \perp \overline{AN} \rightarrow m\sphericalangle EO_1N = \theta$
- $⊿ O_1JO_2 \equiv ⊿ O_1HO_2$

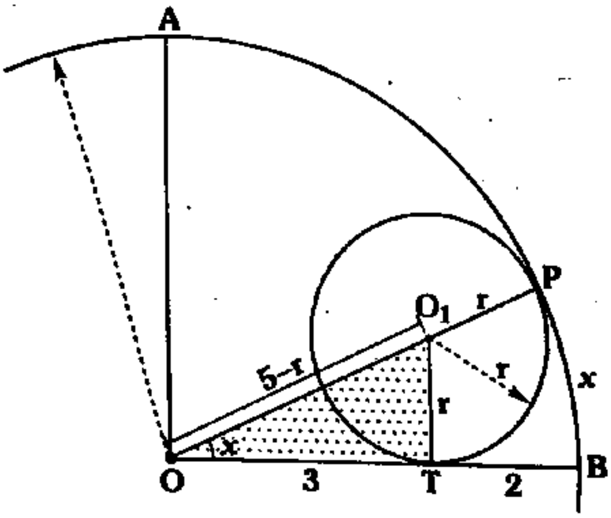
$$\rightarrow \underbrace{JO_2}_{} = \underbrace{HO_2}_{}$$

$$2x = \frac{AB}{2} \rightarrow AB = 2x$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{PQ}{AB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}}$$

Clave A

Resolución N° 289



Nos piden "x".

- O, O_1 y O: colineales
- Del dato: OT=3 y TB=2 → $OO_1 = 5T$
- En ⊿ OTO_1:

$$(5-r)^2 = 3^2 + r^2 \Rightarrow r = \frac{8}{5}$$

- De la conservación:

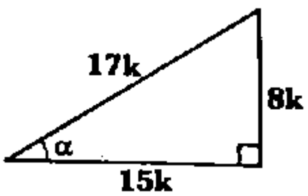
$$\frac{O_1T}{TO} = \frac{8}{15}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 28°}$$

Clave E

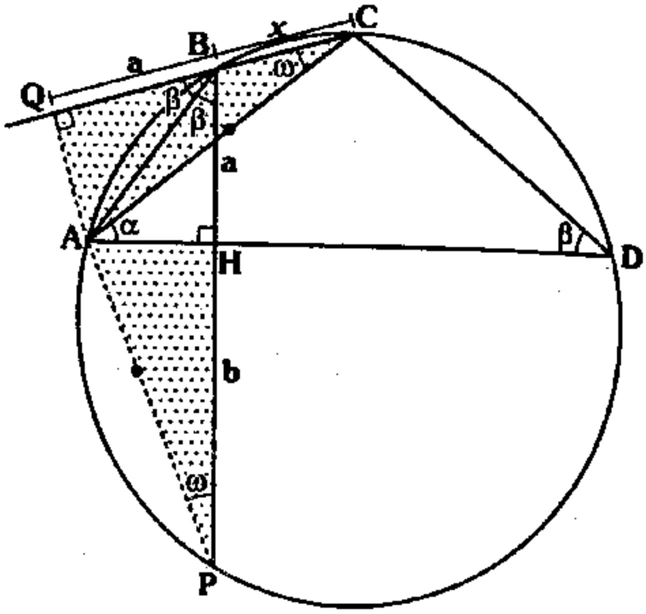
Recordar

(Libro 3 – congruencia de triángulos)



Se cumple: $x = 28°$

Resolución N° 290



Piden x, función de "a" y "b".

- Del dato: $\alpha + \beta = 90°$

$$\rightarrow \; m\measuredangle ABP = \beta$$

- Como $m\widehat{AP} = m\widehat{ABC}$

$$\rightarrow \; AP = AC$$

- Se prolonga $\overline{CB}$ y se traza $\overline{AQ} \perp \overleftrightarrow{CB}$
- Como $m\measuredangle HBA = m\measuredangle ABQ = \beta$

$$\rightarrow \; BH = BQ = a$$

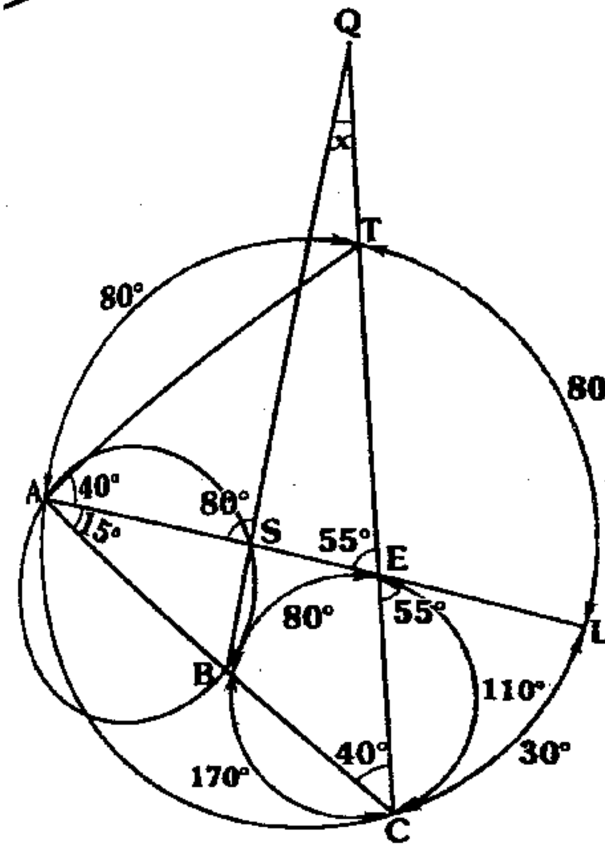
- ⊿AQC ≅ ⊿AHP

$$\rightarrow \; x + a = b$$

$$\therefore \; \mathbf{x = b - a}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 291



Nos piden "x".

- Por propiedad:

$$m\overset{\frown}{AT} = m\overset{\frown}{TL} = 80°$$

- Por ángulo inscrito: $m\overset{\frown}{LC} = 30°$
- por ángulo interior:

$$m\measuredangle AET = \frac{80° + 30°}{2} = 55°$$

- Como $m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{ASB} = 170°$

$$\rightarrow m\measuredangle ASQ = \frac{170°}{2} = 85°$$

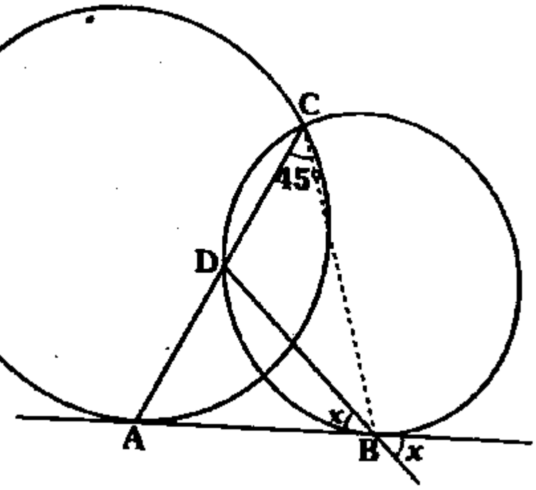
- En ΔSQE:

$$x + 55° = 85°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 292



Nos piden "x".

- Por propiedad de circunferencias ortogonales.

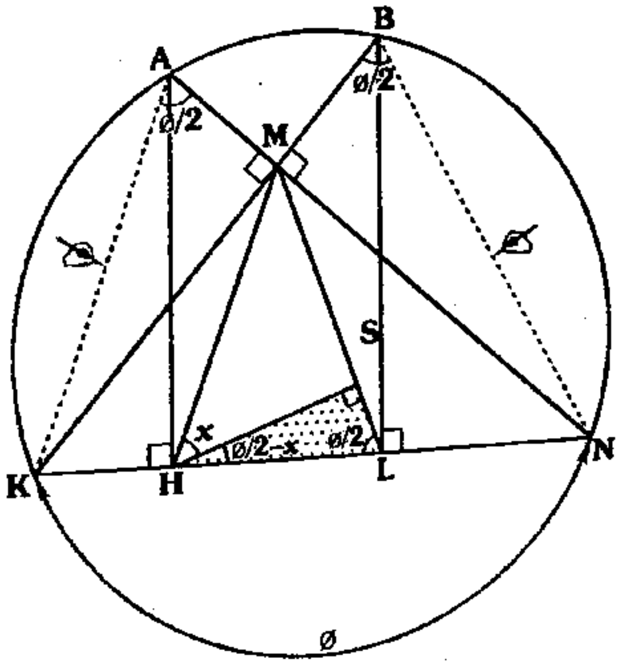
$$m\measuredangle ACB = 45°$$

- Por ángulo semiinscrito

$$\therefore\ \mathbf{x = 45°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 293



Piden "x".

- Por ángulo inscrito:

$$m\sphericalangle NAK = m\sphericalangle NBK = \frac{\phi}{2}$$

- $\triangle$LMBN y $\triangle$AMHK: inscriptibles

$$\rightarrow\ m\sphericalangle MLH = \frac{\phi}{2}\ \text{ y }\ m\sphericalangle MHL = \frac{\phi}{2}$$

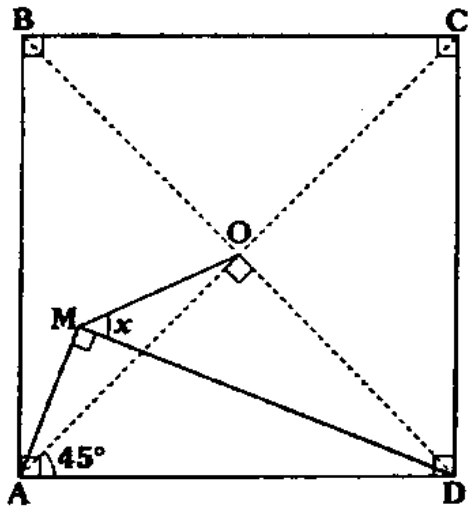
$$\rightarrow\ m\sphericalangle SHL = \frac{\phi}{2} - x$$

- $\measuredangle$HSL: $\frac{\phi}{2} - x + \frac{\phi}{2} = 90°$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = \phi - 90°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 294



Nos piden "x".

- Como $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

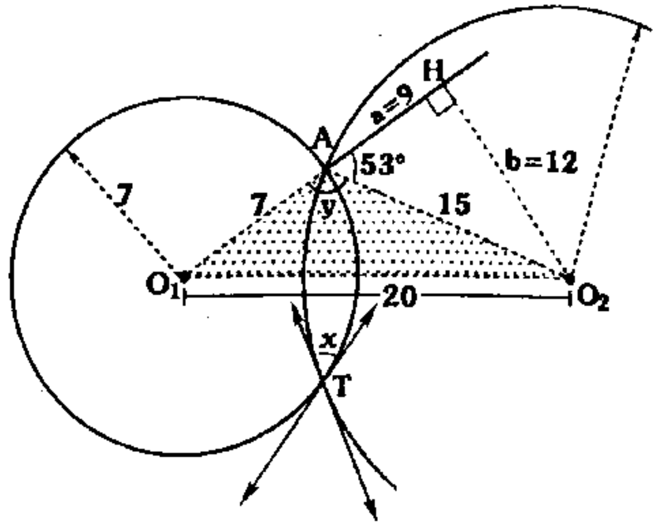
$$\rightarrow\ m\sphericalangle AOD = 90°$$

- $\triangle$ADOM: inscriptible

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 45°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 295



Nos piden "x".

- En $\measuredangle O_1HO_2$ y $\measuredangle AHO_2$:

$$a=9\ \text{ y }\ b=12$$

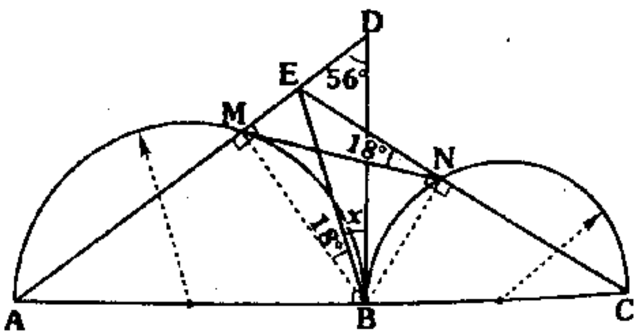
- Luego: $y=127°$
- Por propiedad:

$$x + y = 180°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 53°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 296



Nos piden "x".

- Como $m\sphericalangle AMB = m\sphericalangle BNC = 90°$

$\rightarrow \triangle BMEN$: inscriptible

$\rightarrow m\measuredangle MBE = 18^\circ$

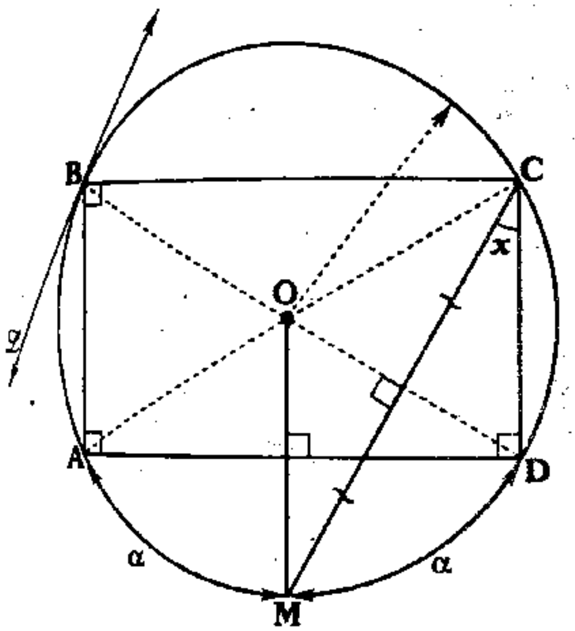
En $\triangle BMD$:

$$x + 18^\circ + 56^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 16^\circ}$$

Clave B

Resolución Nº 297



Nos piden "x"

- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{CM} \rightarrow \overline{BD} \perp \overline{CM}$

  $\rightarrow m\widehat{CD} = m\widehat{MD} = \alpha$

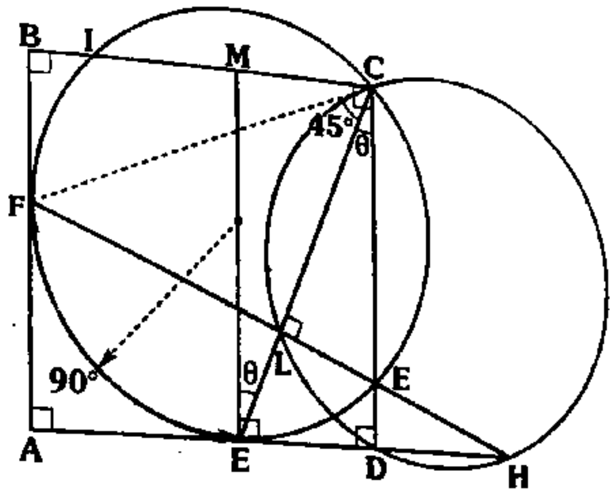
- $\overline{AC}$: diámetro $\rightarrow 3\alpha = 180^\circ$

  $\rightarrow \alpha = 60^\circ$

- Por ángulo inscrito: $\mathbf{x = 30^\circ}$

Clave B

Resolución Nº 298



Nos piden: $m\widehat{IC}$

- Como: $m\measuredangle CDH = 90^\circ$

  $\rightarrow m\measuredangle CLH = 90^\circ$

- $m\widehat{EF} = 90^\circ \rightarrow m\measuredangle FCE = 45^\circ$
- ΔFCE : isósceles

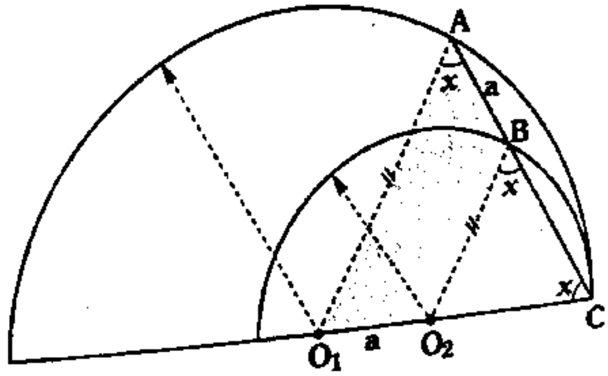
  $\rightarrow m\measuredangle FEC = m\measuredangle FCE = 45^\circ + \theta$

- $\triangle CLE$: $45^\circ + 2\theta = 90^\circ \rightarrow 2\theta = 45^\circ$
- Como $m\widehat{IC} = 4\theta$

$$\therefore\ \mathbf{m\widehat{IC} = 90^\circ}$$

Clave C

Resolución Nº 299

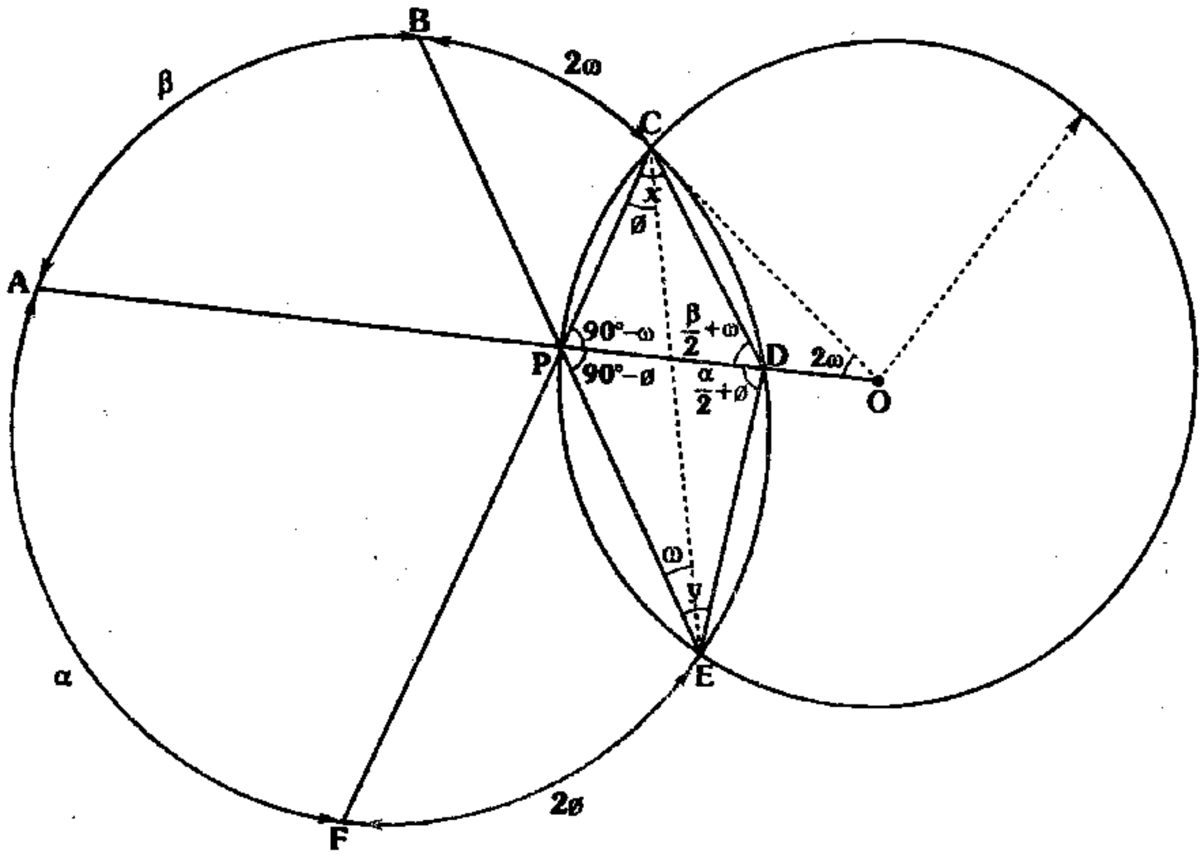


Nos piden "x".

- ΔO_2BC y ΔO_1AC : isósceles $\rightarrow$ $m\measuredangle O_2BC = m\measuredangle O_1AC = x$
- O_1ABO_2 : trapecio isósceles $\rightarrow$ $m\measuredangle AO_1C = x$
- En ΔABC : $\boldsymbol{x = 60^\circ}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 300



Piden: $x - y$

- Sea $m\measuredangle PEC = \omega$ y $m\measuredangle PCE = \varnothing$ $\rightarrow$ $m\widehat{PC} = 2\omega$
- ΔPOC : isósceles $\rightarrow$ $m\measuredangle OPC = 90^\circ - \omega$
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle PDC = \dfrac{\beta}{2} + \omega$
- Análogamente: $m\measuredangle EPD = 90^\circ - \varnothing$ y $m\measuredangle PDE = \dfrac{\alpha}{2} + \varnothing$
- En ΔPCD y ΔPDE : $x + \cancel{90^\circ} - \omega + \dfrac{\beta}{2} + \omega = y + \cancel{90^\circ} - \varnothing + \dfrac{\alpha}{2} + \varnothing$

$$\therefore\ \boldsymbol{x - y = \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

Clave C

Geometría

ENUNCIADO DE LOS

PROBLEMAS PROPUESTOS

- Anual
- Cepre Uni
- Semestral
- Semestral Intensivo
- Repaso

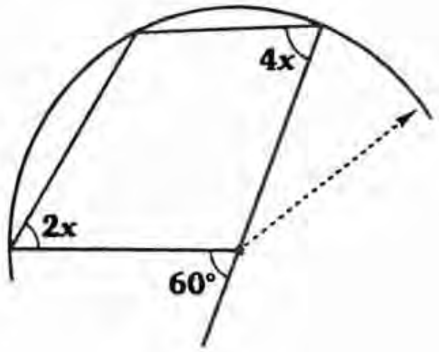
CIRCUNFERENCIA

Problemas Propuestos

Ciclo Anual

PROBLEMA Nº 1

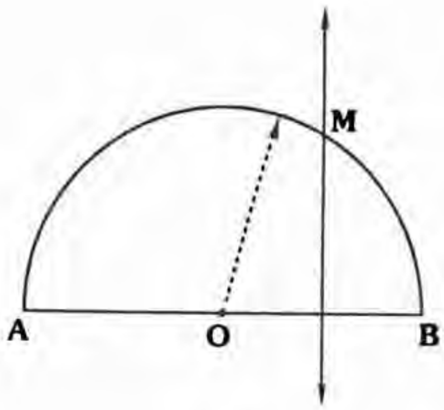
En el gráfico, calcule "x".



A) 20° B) 30° C) 40°
D) 25° E) 35°

PROBLEMA Nº 2

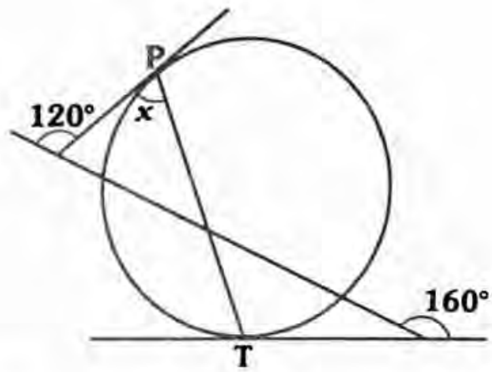
En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{OB}$, calcule $m\widehat{AM}$.



A) 90° B) 120°
C) 135° D) 127°
E) 143°

PROBLEMA Nº 3

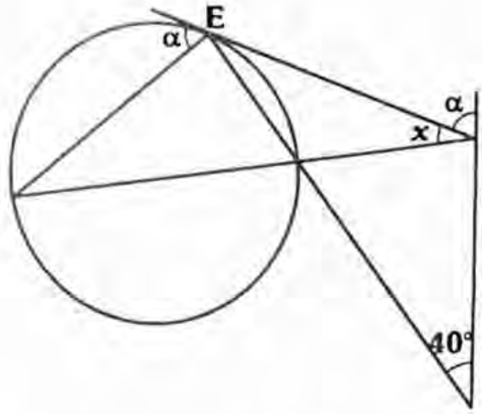
En el gráfico, T y P son puntos de tangencia. Calcule "x".



A) 60° B) 70° C) 80°
D) 75° E) 85°

PROBLEMA Nº 4

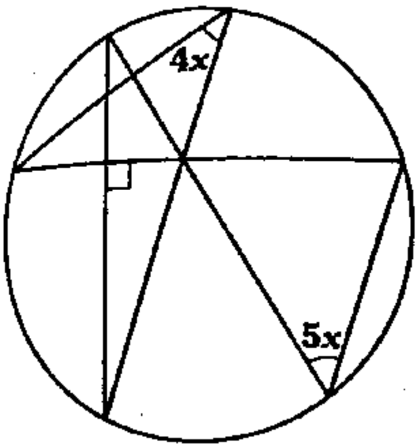
Si E es punto de tangencia. Calcule "x".



A) 20° B) 30°
C) 40° D) 50°
E) 60°

PROBLEMA Nº 5

Calcule "x", en:

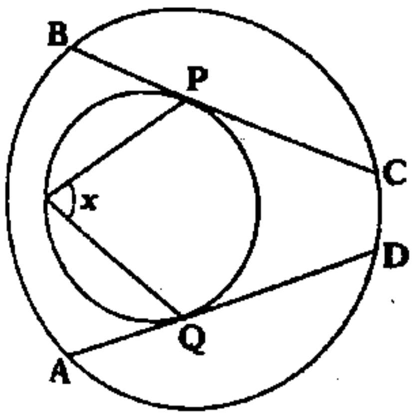


A) 20° B) 25° C) 30°
D) 10° E) 18°

PROBLEMA Nº 6

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AB}-m\widehat{CD}=80°$.

Calcule "x".



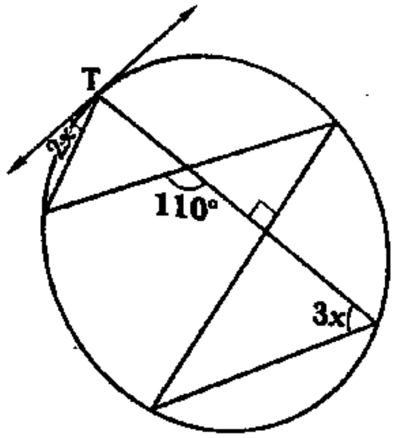
A) 50° B) 100° C) 80°
D) 40° E) 70°

PROBLEMA Nº 7

En el gráfico, T es punto de tangencia.

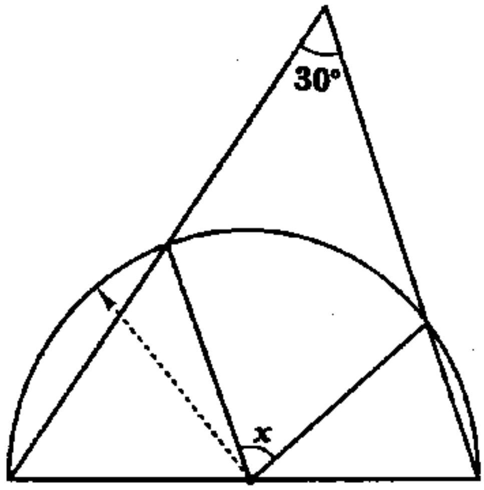
Calcule "x".

A) 15°
B) 20°
C) 25°
D) 30°
E) 35°



PROBLEMA Nº 8

Del gráfico, calcule "x".



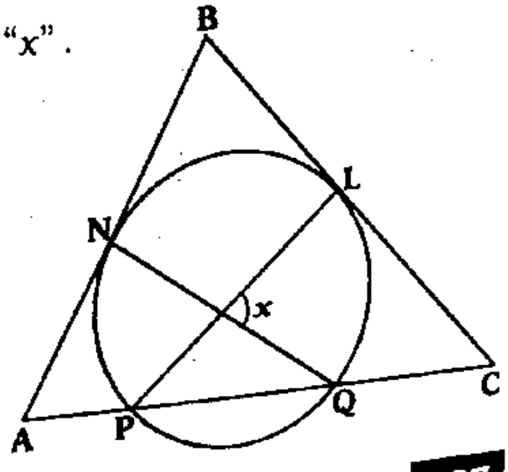
A) 70° B) 120° C) 110°
D) 40° E) 80°

PROBLEMA Nº 9

N y L son puntos de tangencia, $m\widehat{PQ}=40°$ y $m\measuredangle BAC+m\measuredangle BCA=100°$.

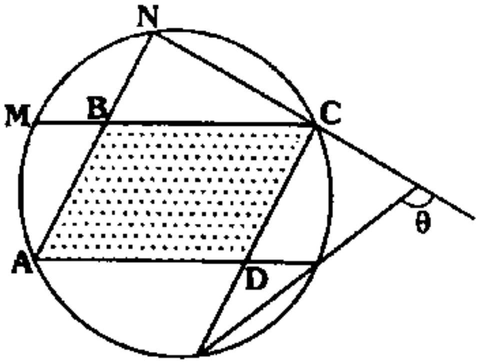
Calcule "x".

A) 70°
B) 140°
C) 110°
D) 40°
E) 80°



PROBLEMA Nº 10

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo. Calcule $m\widehat{MNC}$.

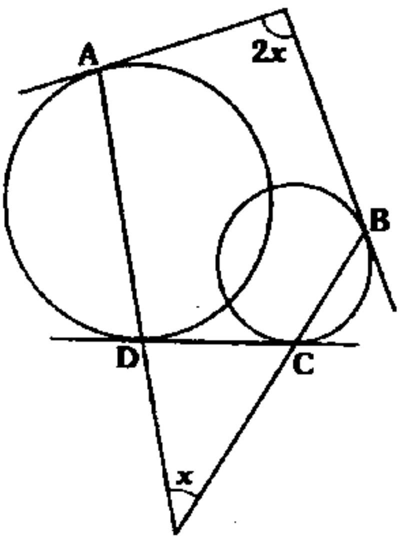


A) θ
B) 360° – 2θ
C) 90°+θ
D) 90°–θ
E) 180°–θ

PROBLEMA Nº 11

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Calcule "x".



A) 30°
B) 36°
C) 45°
D) 54°
E) 60°

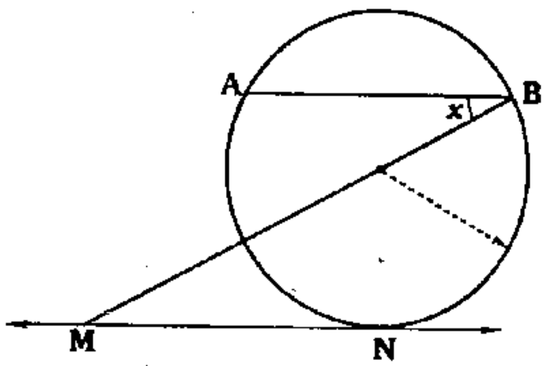
PROBLEMA Nº 12

En la semicircunferencia de diámetro AB se ubica M, luego en el triángulo AMB se inscribe la circunferencia de centro O, en $\overline{MB}$. Se ubica P talque MP=PB y $m\measuredangle MOP=90°$. Calcule $m\widehat{MB}$.

A) 105°
B) 74°
C) 53°
D) 90°
E) 106°

PROBLEMA Nº 13

N es punto de tangencia, $\overline{AB}//\overline{MN}$ y AB=MN. Calcule "x".



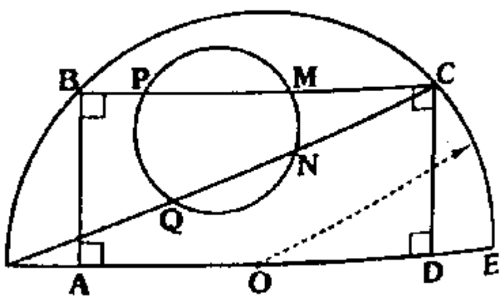
A) 30°
B) 45°
C) $\frac{53°}{2}$
D) $\frac{37°}{2}$
E) 8°

PROBLEMA Nº 14

En el gráfico, 2(DO)=3(DE) y $m\widehat{PQ}=80°$.

Calcule $m\widehat{MN}$.

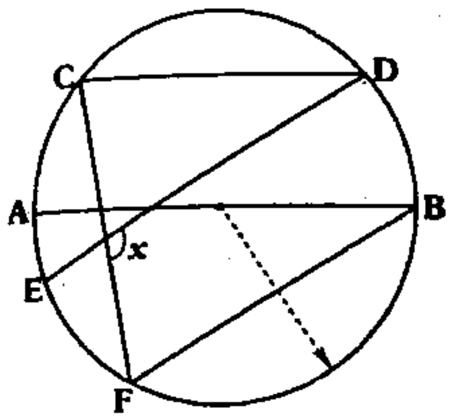
A) 27°
B) 28°
C) 16°
D) 20°
E) 14°



PROBLEMA Nº 15

Si $\overline{CD}//\overline{AB}$ y $\overline{ED}//\overline{FB}$ y $m\widehat{EF}=50°$.

Calcule "x".

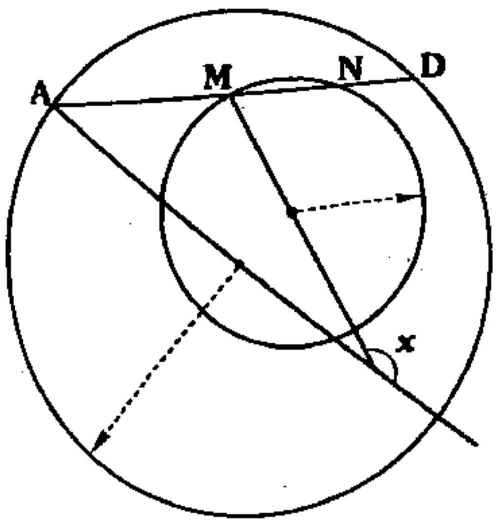


A) 130°
B) 100°
C) 110°
D) 120°
E) 115°

PROBLEMA Nº 16

En el gráfico, $m\widehat{AD}-m\widehat{MN}=40°$.

Calcule "x".

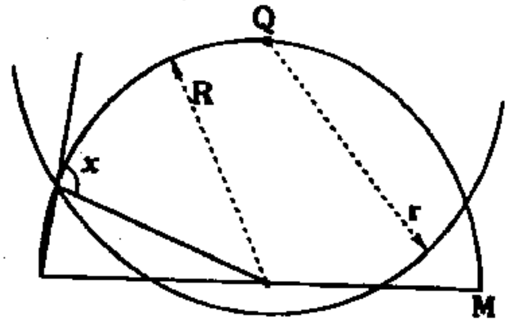


A) 140°
B) 120°
C) 160°
D) 165°
E) 170°

PROBLEMA Nº 17

En el gráfico, $m\widehat{QM}=90°$ y $\frac{R}{r}=\frac{5}{6}$.

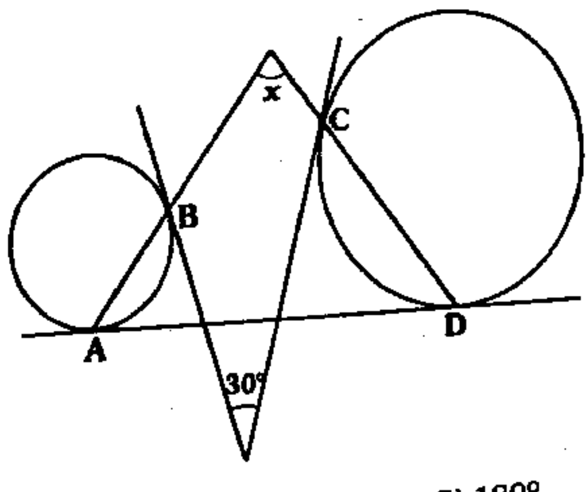
Calcule "x".



A) 98°
B) 95°
C) 100°
D) 104°
E) 105°

PROBLEMA Nº 18

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule "x".

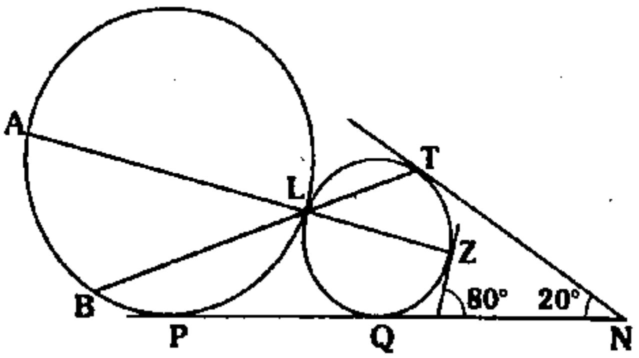


A) 105°
B) 75°
C) 120°
D) 60°
E) 90°

PROBLEMA Nº 19

P, L, T, Z y Q son puntos de tangencia.

Calcule $m\widehat{AB} - m\widehat{BP}$.



A) 80° B) 50° C) 60°

D) 40° E) 90°

PROBLEMA Nº 20

Si $m\widehat{AB} = 60°$ y BC=a, B y D son puntos de tangencia. Calcule "x".

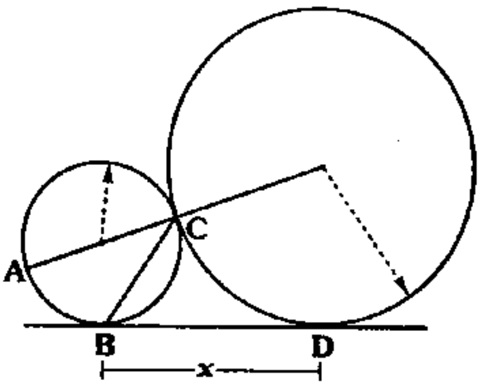
A) $a\sqrt{3}$

B) 2a

C) a

D) $a\sqrt{2}$

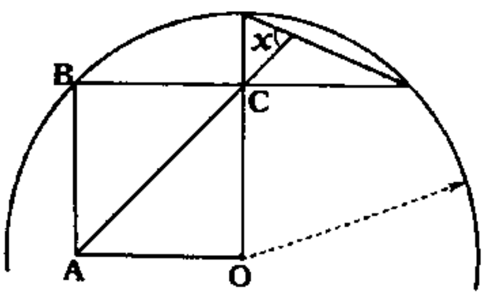
E) $a\sqrt{5}$



PROBLEMA Nº 21

En el gráfico, ABCO es un cuadrado.

Calcule "x".



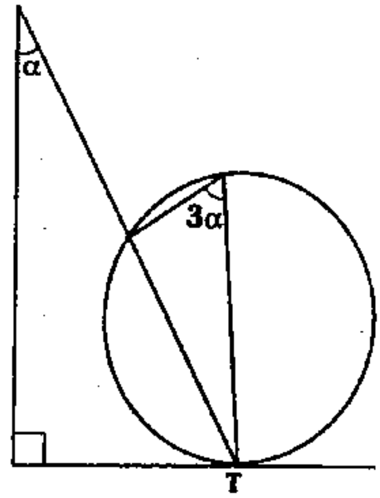
A) 53° B) 60° C) 45°

D) $\frac{135°}{2}$ E) $\frac{37°}{2}$

PROBLEMA Nº 22

En el gráfico, T es punto de tangencia.

Calcule "x".



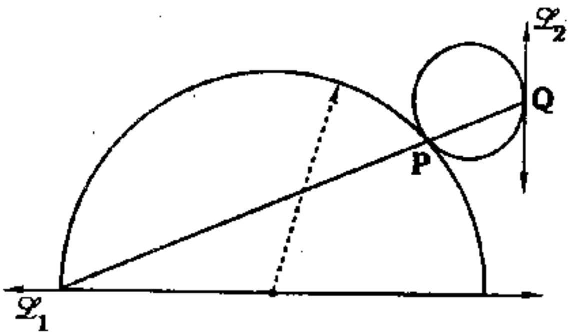
A) 22°30' B) 26°30' C) 30°

D) 45° E) 23°

PROBLEMA Nº 23

En el gráfico, P y Q son puntos de tangecia.

Demostrar $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.



PROBLEMA Nº 24

Calcule $m\widehat{AB}$

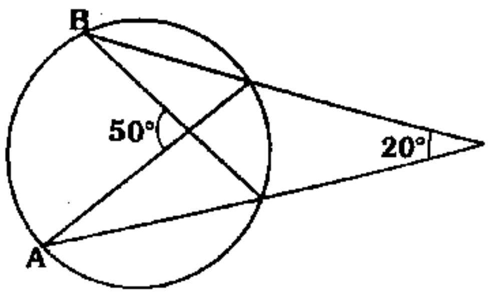
A) 80°

B) 35°

C) 70°

D) 55°

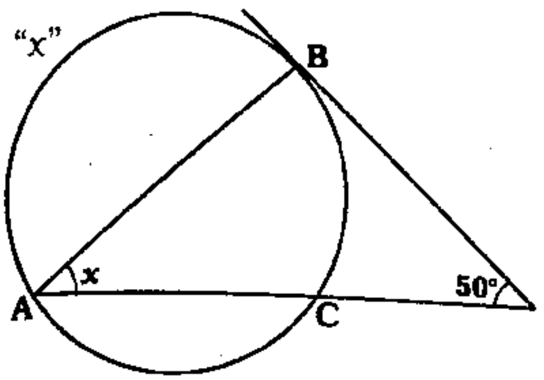
E) 45°



PROBLEMA Nº 25

Si $m\widehat{AC}=120°$ y B es punto de tangencia.

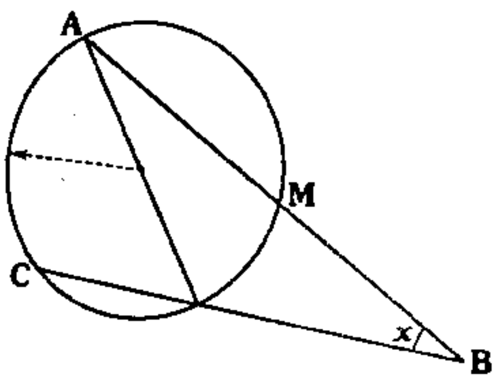
Calcule "x"



A) 55°
B) 45°
C) 35°
D) 40°
E) 80°

PROBLEMA Nº 26

Si $m\widehat{AC}=100°$ y AM=MB. Calcule "x".



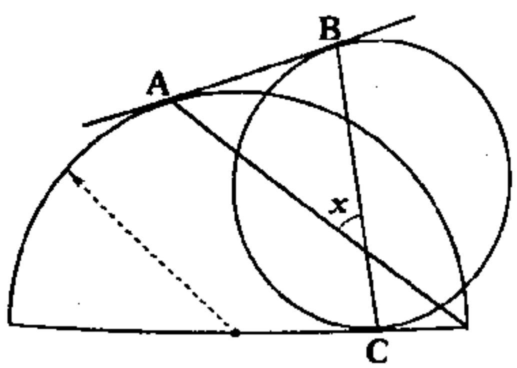
A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 35°

PROBLEMA Nº 27

Si A, B y C son puntos de tangencia.

Calcule "x".

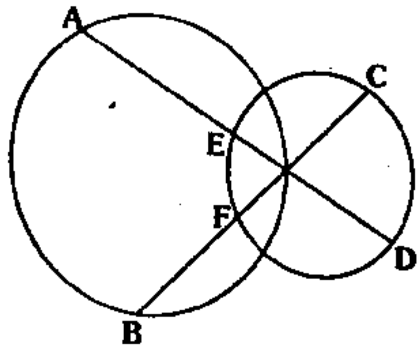
A) 30°
B) 60°
C) 36°
D) 72°
E) 45°



PROBLEMA Nº 28

Si $m\widehat{AB}=160°$ y $m\widehat{CD}=90°$.

Calcule $m\widehat{EF}$.



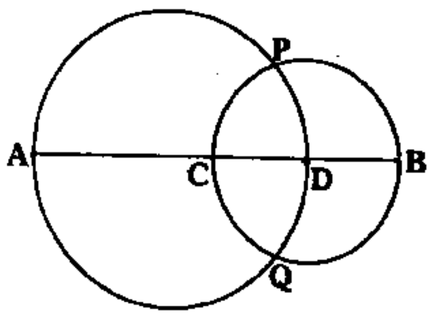
A) 50° B) 80° C) 40°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA Nº 29

Si $m\widehat{AP}+m\widehat{PB}=280°$.

Calcule $m\widehat{CQ}+m\widehat{DQ}$.

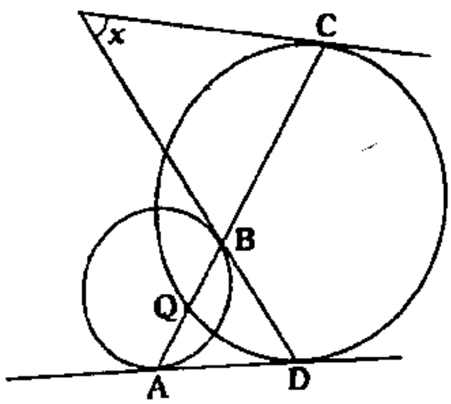
A) 100°
B) 140°
C) 80°
D) 70°
E) 105°



PROBLEMA Nº 30

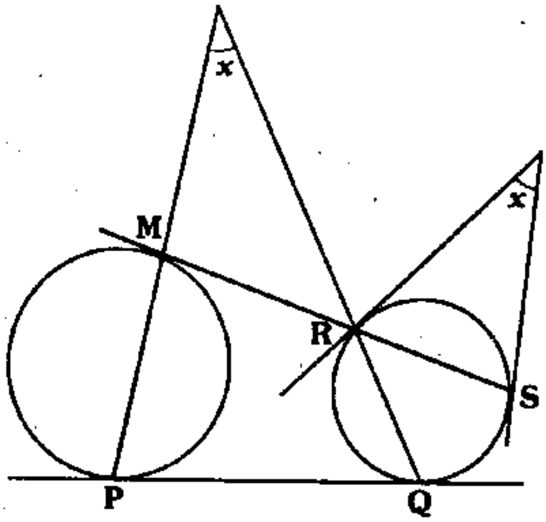
Si $m\widehat{DQ}=40°$; A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule "x".

A) 50°
B) 20°
C) 40°
D) 30°
E) 10°



PROBLEMA Nº 31

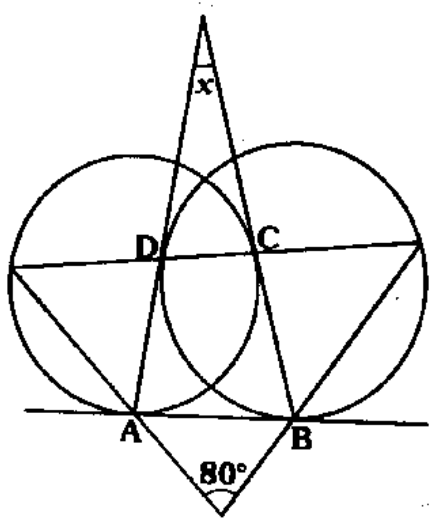
Si P, Q, R, S y M son puntos de tangencia. Calcule "x".



A) 36° B) 45° C) 54°
D) 60° E) 30°

PROBLEMA Nº 32

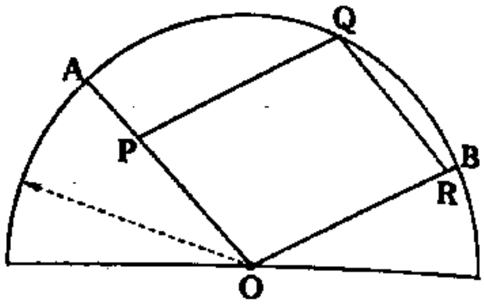
Si A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule "x".



A) 40° B) 20° C) 50°
D) 60° E) 80°

PROBLEMA Nº 33

Si OPQR es un paralelogramo. Calcule el máximo valor entero que puede tomar $m\widehat{AB}$.

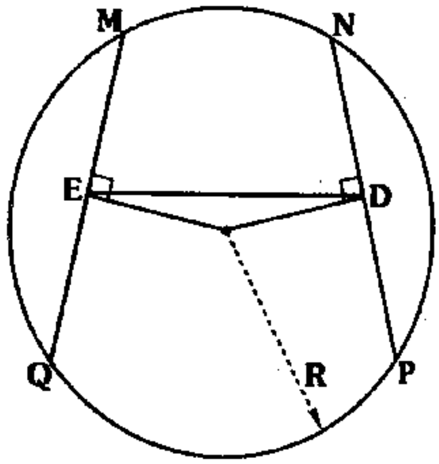


A) 179° B) 134° C) 89°
D) 119° E) 59°

PROBLEMA Nº 34

En el gráfico, $R=2$, $m\widehat{MN}=60°$ y $m\widehat{QM}=m\widehat{NP}=105°$.

Calcule ED.

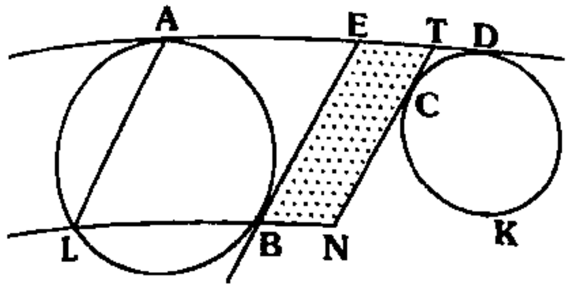


A) 2,5 B) 2,8 C) 3
D) 3,5 E) $\sqrt{2}+1$

PROBLEMA Nº 35

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si $3\left(m\widehat{CD}\right)=2(m\measuredangle ALB)$ y NBET es un paralelogramo.

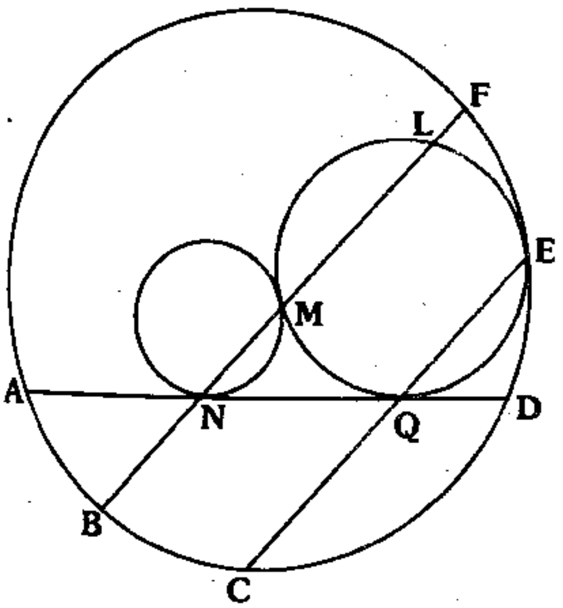
Calcule $m\sphericalangle BNC$.



A) 115° B) 116° C) 118°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº 36

En el gráfico, N, M, Q y E son puntos de tangencia. Si $\overline{BF} // \overline{CE}$ y $m\widehat{CDE} = 112°$. Calcule $m\widehat{EL}$.



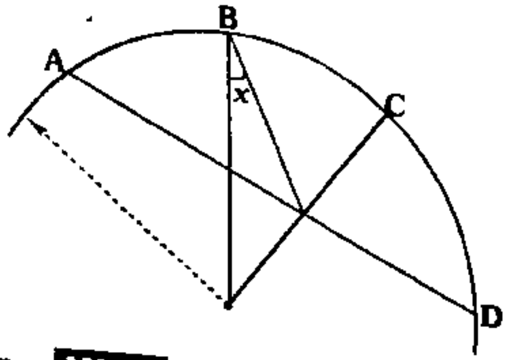
A) 56° B) 68° C) 34°
D) 38° E) 66°

PROBLEMA Nº 37

Si $m\widehat{AB} = m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = 40°$.

Calcule "x".

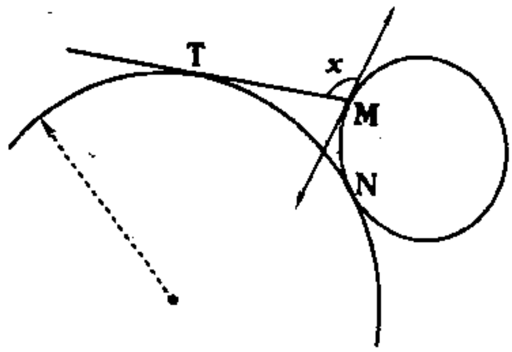
A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 36°



PROBLEMA Nº 38

En el gráfico, M, N, T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{TN} + m\widehat{NM} = 140°$.

Calcule "x".

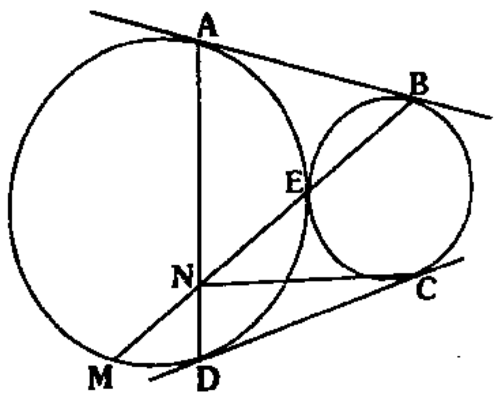


A) 70° B) 110° C) 140°
D) 120° E) 100°

PROBLEMA Nº 39

En el gráfico, A, B, C, D y E son puntos de tangencia.

Si $m\widehat{DM} = 50°$, calcule $m\sphericalangle DCN$.

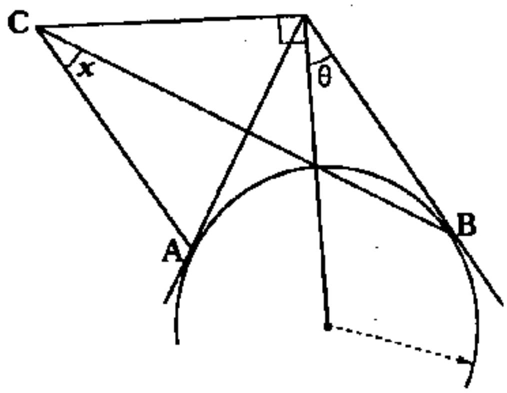


A) 15° B) 20° C) 22°5°
D) 24° E) 25°

PROBLEMA Nº 40

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia.

Calcule $m\sphericalangle ACB$.



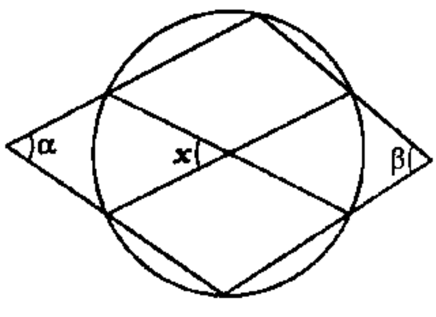
A) θ B) 2θ

C) $45°-\theta$ D) $45°-2\theta$

E) $90°-2\theta$

PROBLEMA Nº 41

Si $\alpha+\beta=150°$. Calcule "x".



A) 30°   B) 75°   C) 105°

D) 45°   E) 15°

PROBLEMA Nº 42

En el gráfico, M y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AT}=110°$ y $m\sphericalangle TBA=80°$.

Calcule $m\widehat{TM}$.

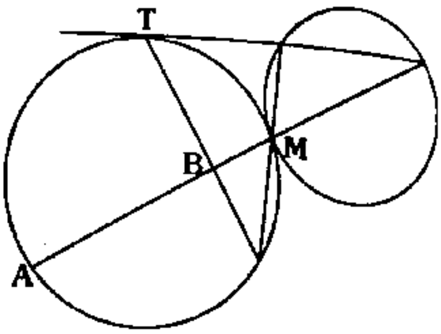
A) 40°

B) 50°

C) 60°

D) 70°

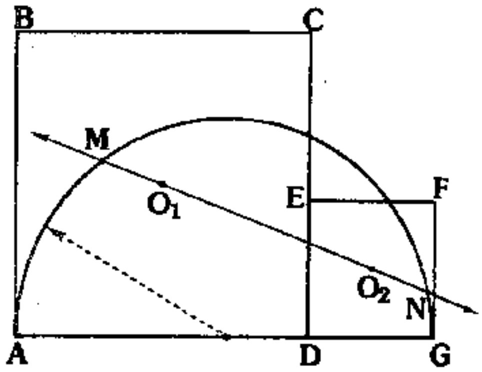
E) 30°



PROBLEMA Nº 43

En el gráfico, O_1 y O_2 son centros de los cuadrados ABCD y DEFG. Si AD=3(DG).

Calcule $m\widehat{AM}-m\widehat{NG}$



A) 30°   B) 37°   C) 45°

D) 53°   E) $\dfrac{53°}{2}$

PROBLEMA Nº 44

En el gráfico, F es centro del cuadrado OABC.

Calcule $m\widehat{MN}$.

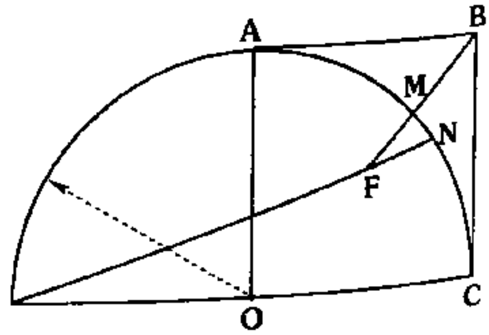
A) 30°

B) 15°

C) 8°

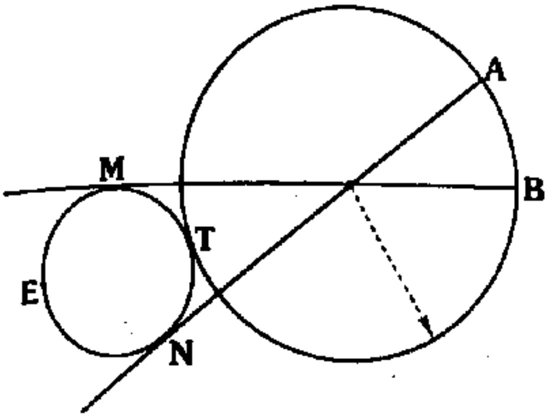
D) 4°

E) 16°



PROBLEMA Nº 45

En el gráfico, M, N y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{MEN}=6\left(m\widehat{AB}\right)$, calcule $m\widehat{AB}$.

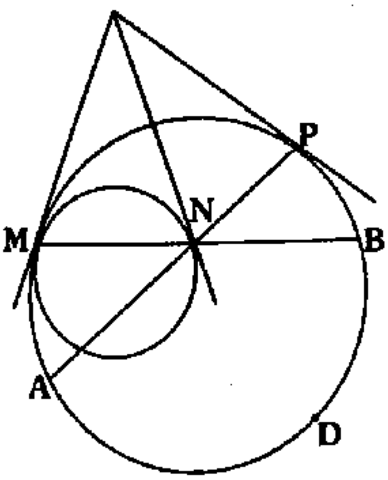


A) 30° B) 32° C) 36°

D) 40° E) 45°

PROBLEMA Nº 46

En el gráfico, M, N y P son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{ADB}$.



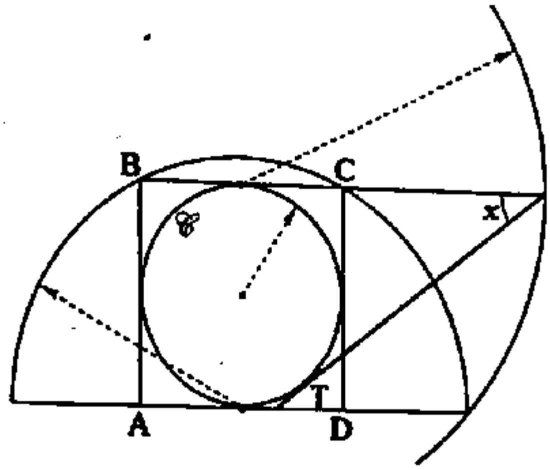
A) 90° B) 135° C) 120°

D) 180° E) 205°

PROBLEMA Nº 47

En el gráfico, ABCD es un cuadrado circunscrito respecto de $\mathscr{C}$ y T es punto de tangencia.

Calcule "x".



A) 16° B) 30°

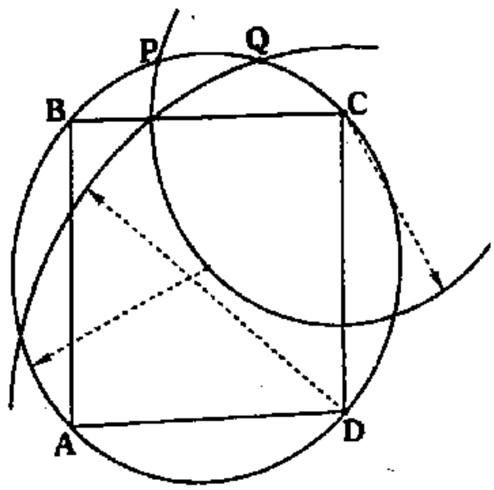
C) 37° D) 45°

E) 53°

PROBLEMA Nº 48

En el gráfico, ABCD es un cuadrado.

Calcule $m\widehat{PQ}$.



A) 15° B) 16°

C) 30° D) 37°/2

E) 53°/2

PROBLEMA Nº 49

Si AB=2(OB). Calcule "x".

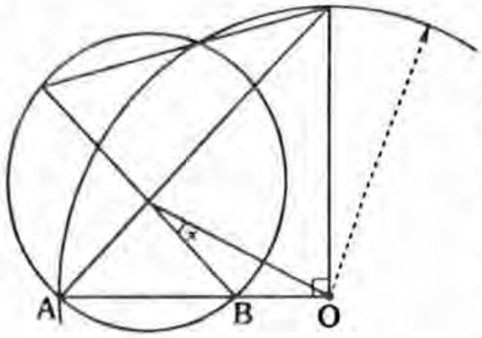
A) 18.5°

B) 15°

C) 26,5°

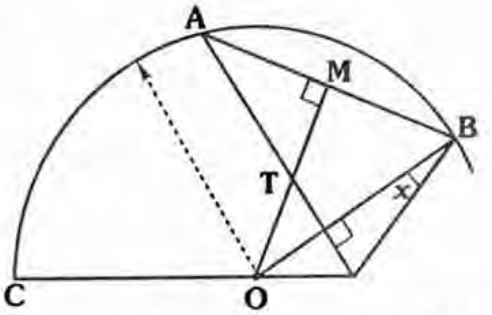
D) 22,5°

E) 14°



PROBLEMA Nº 50

En el gráfico, OT=MT y $m\widehat{CAB}=135°$. Calcule "x".

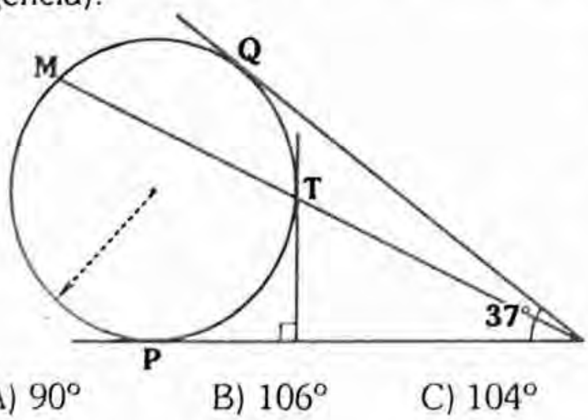


A) 14° B) 18,5° C) 26,5°

D) 22,5° E) 30°

PROBLEMA Nº 51

Calcule $m\widehat{MP}$ (T, P y Q son puntos de tangencia).



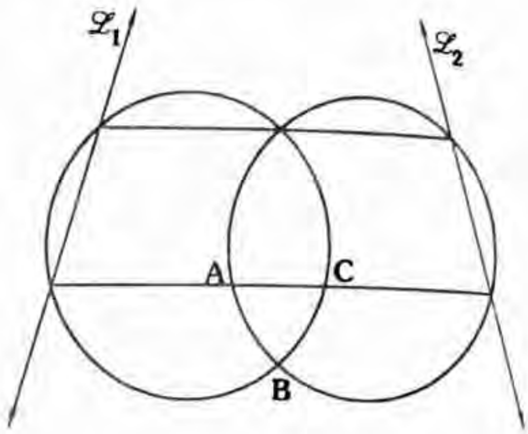
A) 90° B) 106° C) 104°

D) 127° E) 143°

PROBLEMA Nº 52

En el gráfico, la medida del menor ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ es 40°.

Calcule $m\widehat{AB}+m\widehat{BC}$.

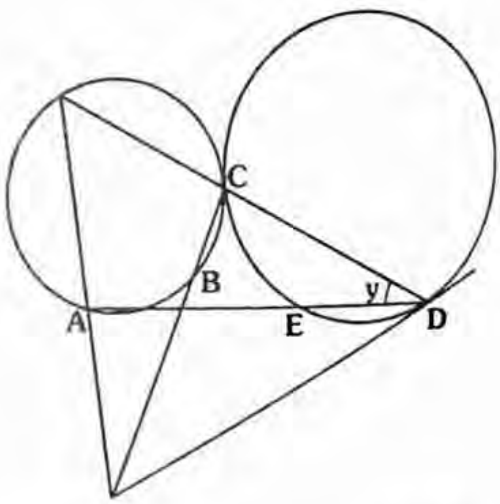


A) 40° B) 80° C) 60°

D) 30° E) 20°

PROBLEMA Nº 53

C y D son puntos de tangencia. Si $m\widehat{CED}-m\widehat{AB}=50°$, calcule y



A) 25° B) 50° C) 20°

D) 40° E) 30°

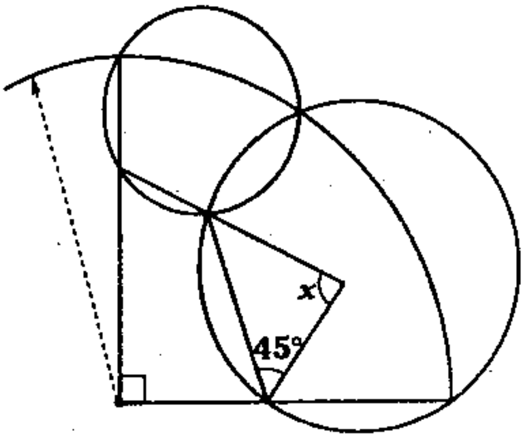
PROBLEMA Nº 54

Desde el punto A exterior a una circunferencia se trazan la tangente AT (T es punto de tangencia) y la secante ABC, talque $m\widehat{TC}=2\left(m\widehat{BT}\right)$ y AT es igual al radio de dicha circunferencia. Calcule m∢CAT.

A) 10° B) 12,5° C) 15°
D) 17,5° E) 22,5°

PROBLEMA Nº 55

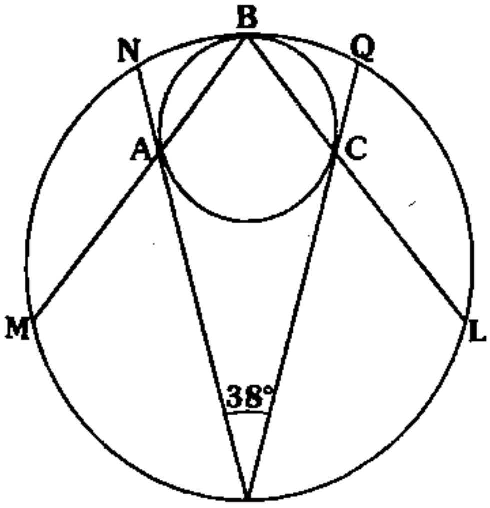
Calcule "x", en:



A) 60° B) 90° C) 105°
D) 75° E) 120°

PROBLEMA Nº 56

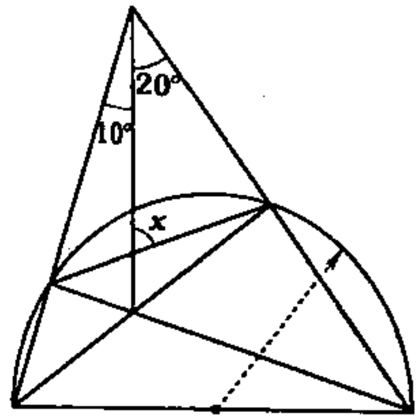
En el gráfico A, B y C son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{MN}+m\widehat{QL}$.



A) 76°
B) 108°
C) 109°
D) 142°
E) 138°

PROBLEMA Nº 57

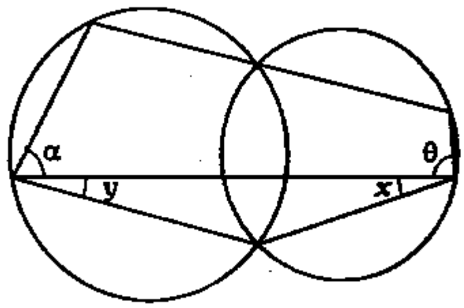
En el gráfico, calcule "x".



A) 70°
B) 60°
C) 50°
D) 80°
E) 40°

PROBLEMA Nº 58

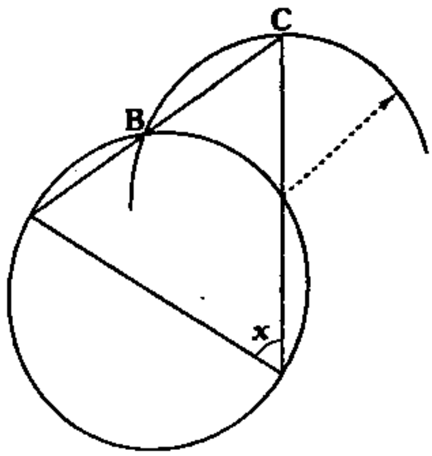
En el gráfico, $\alpha+\theta=140°$.
Calcule $x+y$.



A) 40° B) 20° C) 50°
D) 70° E) 60°

PROBLEMA Nº 59

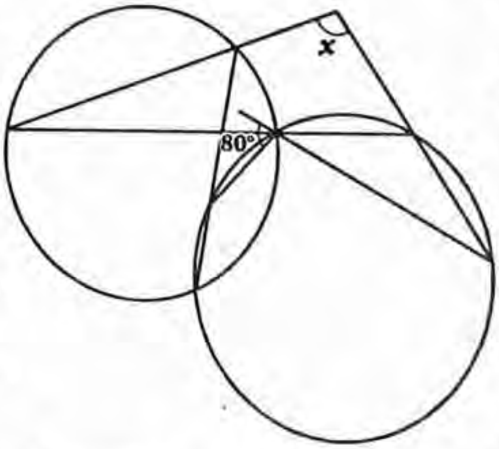
Si $m\widehat{BC}=50°$. Calcule "x".



A) 50°
B) 60°
C) 65°
D) 70°
E) 80°

PROBLEMA N° 60

En el gráfico, calcule "x".



A) 80°

B) 160°

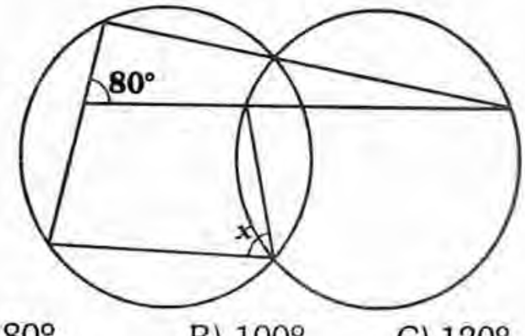
C) 100°

D) 140°

E) 120°

PROBLEMA N° 61

Calcule "x", en:

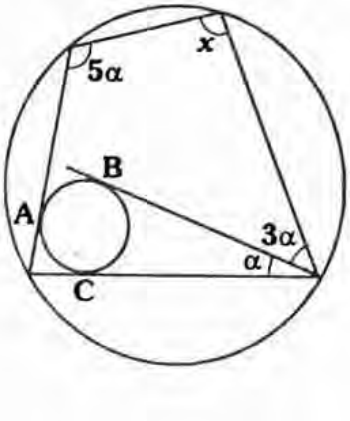


A) 80° B) 100° C) 120°

D) 140° E) 160°

PROBLEMA N° 62

A, B y C son puntos de tangencia y $m\widehat{AB} = 60°$. Calcule "x".



A) 120°

B) 130°

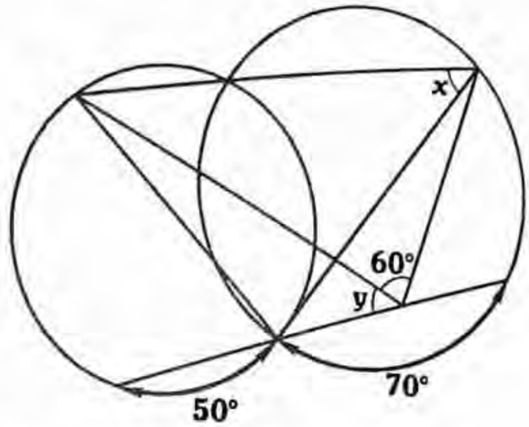
C) 140°

D) 150°

E) 160°

PROBLEMA N° 63

Calcule x/y.



A) 2 B) 1/2 C) 1

D) 2/3 E) 3/2

PROBLEMA N° 64

Desde el punto R exterior a una circunferencia de diámetro AB, se trazan las secantes RA y RB que intersecan a la circunferencia en P y Q respectivamente. Si AP=PR y $m\widehat{QB} = 36°$. Calcule $m\measuredangle PQR$.

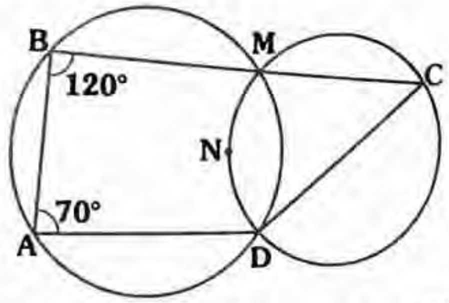
A) 36° B) 54° C) 72°

D) 45° E) 66°

PROBLEMA N° 65

En el gráfico, $m\widehat{MND} = m\widehat{MC}$.

Calcule $m\measuredangle ADC$.

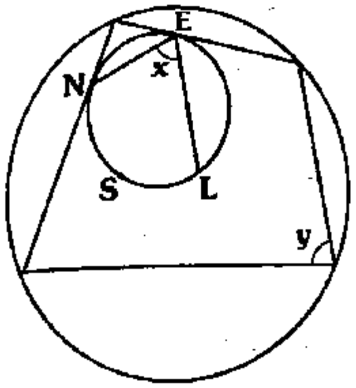


A) 110° B) 115° C) 120°

D) 100° E) 140°

PROBLEMA Nº 66

En el gráfico, N y E son puntos de tangencia. Si $x+y=190°$ y $3(m\widehat{NE})=4(m\widehat{EL})$. Calcule $m\widehat{NSL}$.



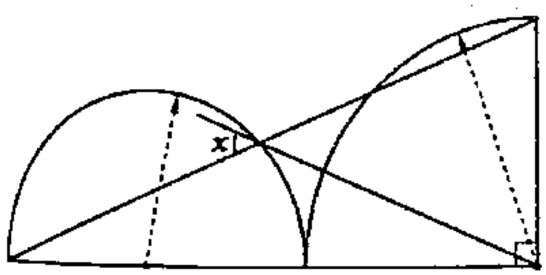
A) 220° B) 230°

C) 240° D) 250°

E) 260°

PROBLEMA Nº 67

Calcule "x" en:



A) 30° B) 37° C) 45°

D) 53° E) 60°

PROBLEMA Nº 68

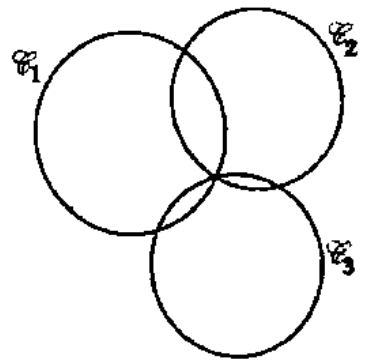
Dado el cuadrado ABCD, en $\overline{CD}$ se ubica el punto medio M y en $\overline{AD}$ el punto N tal que ND=3(AN). Si $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ se cortan en P. Calcule $m\measuredangle PBM$.

A) 30° B) 37° C) 53°

D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 69

En el gráfico, indique el número de circunferencia tangentes a $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$.

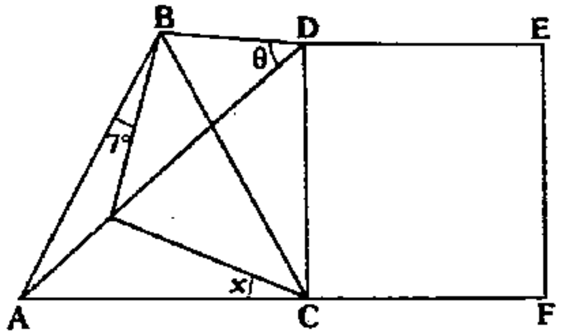


A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 70

En el gráfico, las regiones ABC y CDEF son regulares e isoperimétricas. Calcule x en función de "θ".



A) 60°−θ B) 53°−θ C) 37°−θ

D) $\frac{37°}{2}-\theta$ E) 23°−θ

PROBLEMA Nº 71

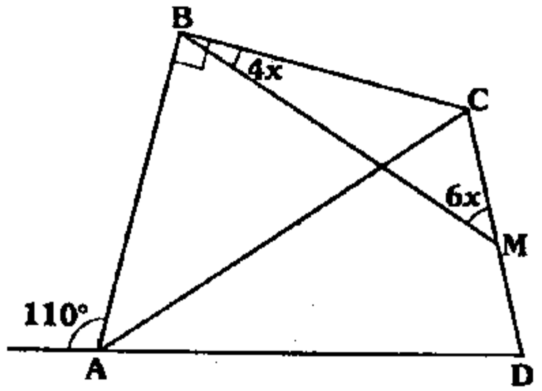
En la diagonal AC del cuadrado ABCD se ubica P, talque $m\measuredangle CBP=20°$, en la prolongación de $\overline{AD}$ se ubica E, de modo que $m\measuredangle DCE=25°$. Calcule $m\measuredangle PEC$.

A) 10° B) 15° C) 20°

D) 25° E) 28°

PROBLEMA Nº 72

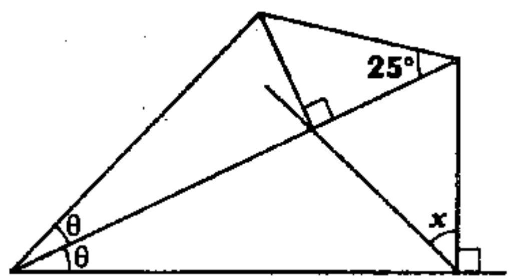
Si AC=AD y CM=MD. Calcule "x".



A) 2,5° B) 2° C) 5°
D) 7,5° E) 10°

PROBLEMA Nº 73

En el gráfico, calcule "x".



A) 20° B) 40° C) 25°
D) 65° E) 50°

PROBLEMA Nº 74

En un cuadrilátero inscriptible tres de sus ángulos interiores consecutivos miden x, $2x$ y $4x$.

Calcule la medida el mayor de los ángulos de dicho cuadrilátero.

A) 120° B) 150° C) 144°
D) 140° E) 108°

PROBLEMA Nº 75

La circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD es tangente a $\overline{BC}$ en P y a $\overline{CD}$ en M. Se traza $\overline{MQ} \perp \overline{AP}$ (Q en $\overline{AP}$). Calcule m∢QDM.

A) 37° B) $\frac{37°}{2}$ C) 30°
D) $\frac{45°}{2}$ E) $\frac{53°}{2}$

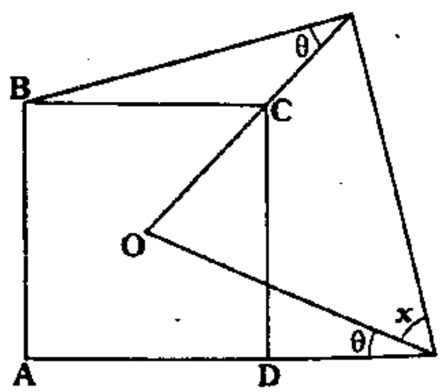
PROBLEMA Nº 76

ABCD es un cuadrado de centro O, M es exterior y relativo a $\overline{BC}$ tal que m∢BMC = 90°. Calcule m∢OMC.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 53° E) 37°

PROBLEMA Nº 77

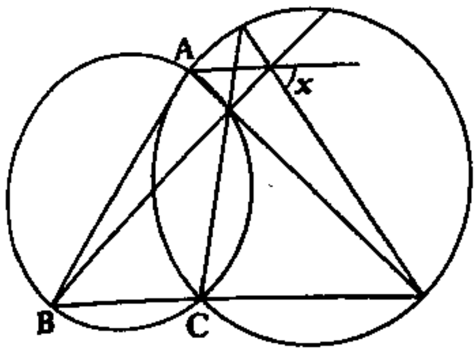
En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O. Calcule "x".



A) 45° B) 60°
C) 2θ D) 45°+θ
E) 90°−θ

PROBLEMA Nº 78

Si $m\widehat{ABC}=220°$, calcule "x".

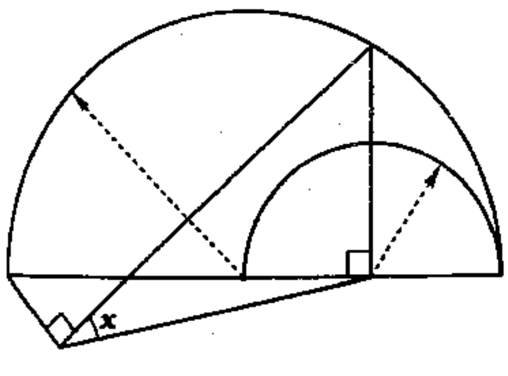


A) 140° B) 70° C) 110°

D) 55° E) 65°

PROBLEMA Nº 79

Calcule "x", en:



A) 30° B) $\frac{53°}{2}$ C) $\frac{37°}{2}$

D) $\frac{45°}{2}$ E) $\frac{75°}{2}$

PROBLEMA Nº 80

En una circunferencia de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ perpendiculares. En las prolongaciones de $\overline{DC}$ y $\overline{DB}$ se ubican los puntos P y Q, respectivamente, de modo que $m\measuredangle APQ=90°$ y $\overline{AQ}$ interseca a la circunferencia en F. Si $m\widehat{FB}=30°$, calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

A) 75° B) 60° C) 45°

D) 72° E) 90°

Problemas Propuestos

Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA Nº 81

En un triángulo ABC acutángulo, K es el circuncentro y O es el ortocentro; por B trazamos la bisectriz que intercepta a la mediatriz del lado $\overline{AC}$ en E.

Si $m\sphericalangle ABC=60°$ y $m\sphericalangle OKA=12°$, halle $m\sphericalangle BEK$.

A) 18° B) 24° C) 30°

D) 36° E) 48°

PROBLEMA Nº 82

En un triángulo ABC, se ubica un punto F en la altura $\overline{BH}$ al que $m\sphericalangle FAC=3m\sphericalangle BCF=m\sphericalangle BCA$ y $\overline{AB}\cong\overline{FC}$. Halle $m\sphericalangle HBC$.

A) 30° B) 36° C) 40°

D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 83

En una recta se ubican los puntos A, M, B y N consecutivos. Se construyen una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ de centro M y el cuadrante BNP con centro en N. Una tangente exterior común determina los puntos de tangencia E en la semicircunferencia y F en el cuadrante. Halle la medida del ángulo que determinan $\overline{AE}$ y $\overline{PF}$.

A) 30° B) 37° C) 45°

D) 60° E) 75°

PROBLEMA Nº 84

Se tiene un triángulo rectángulo ABC (recot en B) y se ubica un punto interior M. Si MC=8; $m\sphericalangle BCM=m\sphericalangle MAC$, AB=BC y $m\sphericalangle AMB=3m\sphericalangle ACB$, halle MB.

A) 4 B) 4,5 C) 5

D) 5,5 E) 6

PROBLEMA Nº 85

En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BQ}$ de manera que $\overline{AB}\cong\overline{QC}$. Si $m\sphericalangle A=80°$ y $m\sphericalangle BQA=30°$, halle $m\sphericalangle C$.

A) 20° B) 25° C) 30°

D) 36° E) 45°

PROBLEMA Nº 86

En el rectángulo ABCD, M y N son puntos medio de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Calcule el perímetro de MNC, si el perímetro de ABCD es 2p y la suma de las medidas de los inradios de AMN, MBC y NCD es S.

A) $p+s$ B) $p-s$

C) $2(p-s)$ D) $\frac{p+s}{2}$

E) $\frac{3}{2}(p-s)$

PROBLEMA Nº 87

ABCD es un trapecio isósceles (AB=CD, BC<AD). Si M y N son puntos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

tales que MBCN y AMND son circunscriptibles, la mediana del trapecio mide "m u y" $AB=\ell u$, calcule la longitud de MN.

A) $\ell-m$ B) $\ell+m$ C) $\frac{\ell+m}{2}$

D) $\frac{\ell-m}{2}$ E) $2(\ell-m)$

PROBLEMA Nº 88

La circunferencia inscrita al triángulo ABC con centro en R, es tangente a $\overline{AB}$ en P y la circunferencia exinscrita relativa al lado AB es tangente a ese lado en E. Si BC=6, AC=9, DR=4, halle la distancia de R a E.

A) 3 B) 4 C) 5

D) 4,5 E) 6

PROBLEMA Nº 89

En el triángulo ABC rectángulo (recto en B) se trazan las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ y los segmentos $\overline{DF}$ y $\overline{EH}$ perpendiculares a $\overline{AC}$ (F y H en $\overline{AC}$). Si $FH=\ell$, calcule el inradio del triángulo ABC.

A) $\frac{\ell}{2}$ B) $\frac{\ell}{3}$ C) ℓ

D) $\frac{2\ell}{3}$ E) $\frac{\ell}{4}$

PROBLEMA Nº 90

Demostrar que la longitud del exradio relativo a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las longitudes de los exradios relativos a los catetos y del inradio.

PROBLEMA Nº 91

Las circunferencias C_1 y C_2 son exteriores, AB y CD son sus tangentes comunes exteriores (A y C en C_1, B y D en C_2). La tangente común interior $\overline{EF}$ (E en C_1, F en C_2), intercepta a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en M y N. Si $AB+EF=\ell$, calcule BM+CN.

A) ℓ B) $\frac{\ell}{2}$ C) $\frac{3\ell}{2}$

D) 2ℓ E) $\frac{2\ell}{3}$

PROBLEMA Nº 92

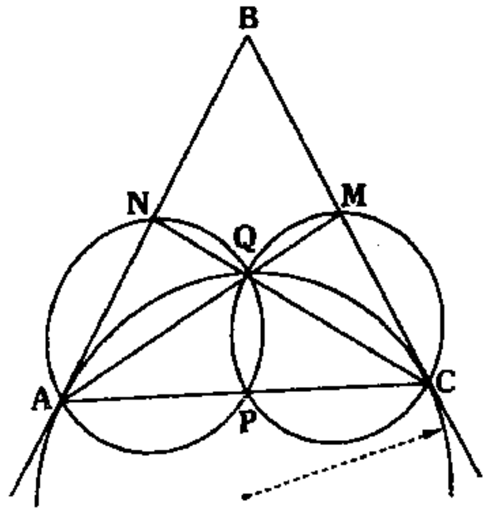
Desde F se trazan $\overleftrightarrow{FA}$ y $\overleftrightarrow{FB}$ tangente a una circunferencia en A y B tales que $m\angle AFB=90^\circ$. Por F se traza la secante que intercepta a la circunferencia en E y M tal que $m\widehat{AM}=2m\widehat{AE}$. Calcule $m\angle AFE$.

A) 18° B) 22,5° C) 27°

D) 15° E) 30°

PROBLEMA Nº 93

En la figura BA y BC son tangentes. Calcule la medida del ángulo AQN.

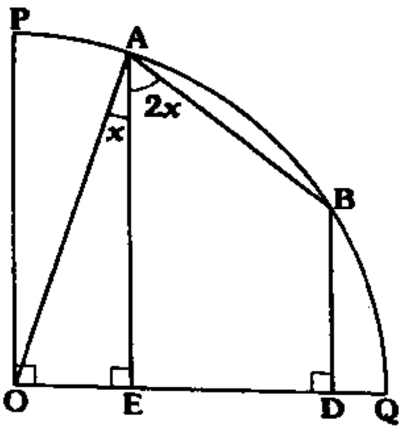


A) 60° B) 75° C) 45°

D) 53° E) 67,5°

PROBLEMA Nº 94

En la figura AB=2BD y POQ es un cuadrante. Calcule "x".



A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 22,5°
E) 15°

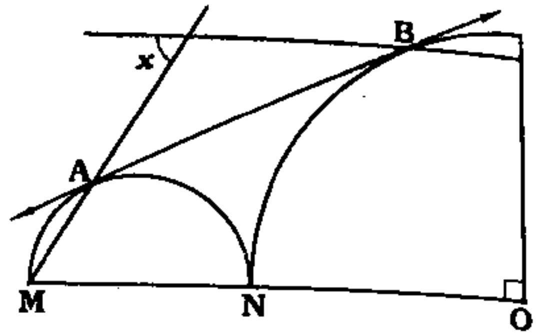
PROBLEMA Nº 95

Dos circunferencias C_1 y C_2 son tangentes exteriores en F. Se trazan las secantes AFB y CFH, A y C en C_1 y B y H en C_2. Si la $m\widehat{AC}=140°$, calcule el ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos CAB y CHB.

A) 45°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 55°

PROBLEMA Nº 96

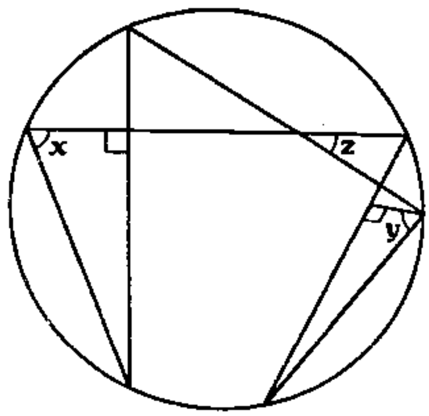
En la figura $\widehat{MAN}$ es semicircunferencia y OCN un cuadrante A y B son puntos de tangencia. Halle "x".



A) 45°
B) 37°
C) 53°
D) 60°
E) 75°

PROBLEMA Nº 97

En la figura, halle $x+y+z$



A) 120°
B) 130°
C) 140°
D) 150°
E) 180°

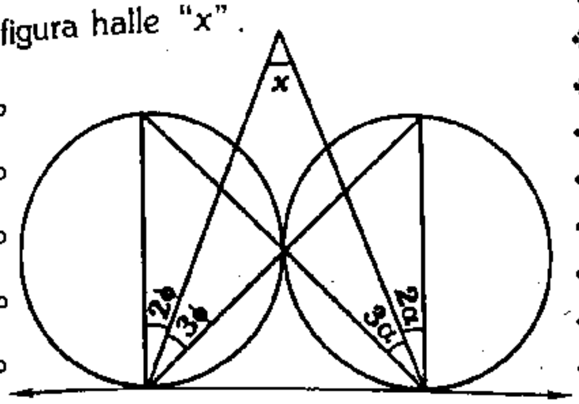
PROBLEMA Nº 98

Dos circunferencias de centros O y O_1 son tangentes interiores en C (O_1 de radio menor) y las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ $(B \in \widehat{AC})$ de la circunferencia O se interceptan en E (punto de O_1) que es el punto de tangencia de $\overline{BD}$ con O_1. Si $m\widehat{AB}=52°$ y $m\widehat{BC}=72°$, calcule $m\measuredangle ACD$.

A) 26°
B) 25°
C) 28°
D) 29°
E) 30°

PROBLEMA Nº 99

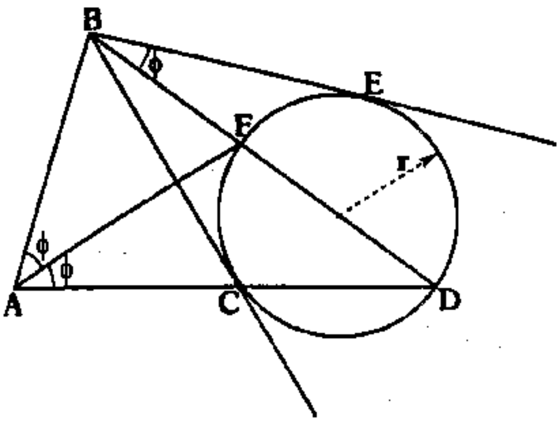
En la figura halle "x".



A) 36°
B) 42°
C) 24°
D) 30°
E) 32°

PROBLEMA Nº 100

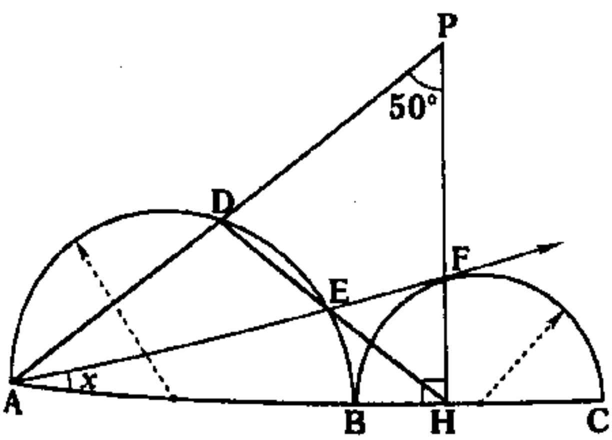
En la figura, calcule AB, si r=3u.



A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}+1$
D) $\sqrt{3}+1$ E) $3\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 101

En la figura, halle "x"



A) 15° B) 10° C) 5° D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº 102

En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ y luego $\overline{HN}\perp\overline{AB}$ y $\overline{HM}\perp\overline{BC}$. Si $m\measuredangle MAC=39°$, calcule $m\measuredangle MNC$.

A) 36° B) 40° C) 39°
D) 51° E) 42°

PROBLEMA Nº 103

En un triángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$. Calcule la medida del ángulo que determinan los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{BK}$, siendo K el circuncentro del triángulo ABC.

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) F.D

PROBLEMA Nº 104

En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AQ}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CP}$.

Si $m\measuredangle BAC=\alpha$, $m\measuredangle ABC=\beta$ y $m\measuredangle BCA=\gamma$, entonces demostrar que:

A) $m\measuredangle PQF=180°-2\alpha$
B) $m\measuredangle PFQ=180°-2\beta$
C) $m\measuredangle QPF=180°-2\gamma$

PROBLEMA Nº 105

Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica R punto medio de $\overline{AD}$, $\overline{AF}$ es perpendicular a $\overline{BR}$ $(F\in\overline{BR})$, calcule la distancia del centro del cuadrado al segmento BR.

A) $\frac{1}{3}$AF B) $\frac{1}{4}$AF C) $\frac{2}{3}$AF
D) $\frac{1}{2}$AF E) $\frac{3}{4}$AF

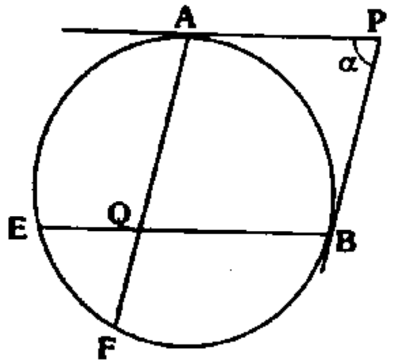
Problema N° 106

Dadas dos circunferencias ortogonales de centros O_1 y O_2 que se interceptan en B y P, se trazan las tangentes común. AC más distante de B que de P. Halle la $m\sphericalangle ABC$.

A) 30° B) 45° C) 50°
D) 60° E) 71°

Problema N° 107

En la figura A y B son puntos de tangencia, $\overline{EB} // \overline{AP}$, $\overline{AF} // \overline{PB}$ sea: $m\sphericalangle APB = \alpha$, halle $m\widehat{EF}$.



A) $90° - \alpha$ B) $3\alpha - 180°$
C) $2\alpha - 90°$ D) $\frac{\alpha}{2}$
E) α

Problema N° 108

¿Es verdad?

I. En una circunferencia, a arcos congruentes le corresponden cuerdas congruentes.
II. En una circunferencia, todo diámetro que biseca a una cuerda, es perpendicular a dicha cuerda.
III. En una circunferencia, si las distancias del centro a dos cuerdas de la circunferencia son iguales, entonces dichas cuerdas son paralelas.

A) sólo I B) sólo II
C) sólo III D) I, II y III
E) sólo I y II

Problema N° 109

Se tiene el rectángulo ABCD, en $\overline{AD}$ se ubica un punto F de manera que en el cuadrilátero ABCF se encuentra inscrita una circunferencia de diámetro 2R, en el triángulo FDC se inscribe la circunferencia de diámetro 2r. Calcule $2R - r$.

A) $\frac{1}{2}AF$ B) $\frac{3}{4}AF$ C) $\frac{4}{5}AF$
D) AF E) $\frac{3}{2}AF$

Problema N° 110

Se tiene el pentágono ABCDE inscrito en una circunferencia, $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{BD}$, $m\widehat{AB} = 100°$. Calcule: $m\sphericalangle CED$.

A) 20° B) 25° C) 40°
D) 50° E) 75°

Problema N° 111

En una circunferencia se trazan dos cuerdas AB y CD perpendiculares entre sí. Las tangentes trazadas a la circunferencia en B y C se intersecan en F; $m\sphericalangle BFC = \theta$, calcule: $m\sphericalangle ABD$.

A) $90° - \frac{\theta}{2}$ B) $180° - \theta$ C) $\frac{\theta}{2}$
D) $\theta - 90°$ E) θ

PROBLEMA Nº 112

ABCD es un cuadrilátero convexo de perímetro 2p circunscrito a una circunferencia. Se construyen los triángulos rectángulos BFC y AGD rectos en F y G, respectivamente, y exteriores al cuadrilátero; si BF+FC+AG+GD=K, calcule la suma de los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos rectángulos.

A) $\frac{K-p}{2}$ B) $K-p$

C) $\frac{K+p}{2}$ D) $p-\frac{K}{2}$

E) $K+\frac{p}{2}$

PROBLEMA Nº 113

En un triángulo ABC, se traza la circunferencia $\mathscr{C}$ que contiene los puntos medios de los tres lados. Si $B\in\mathscr{C}$, entonces la $m\sphericalangle ABC$ es:

A) 75° B) 90°

C) Depende de las medidas de los ángulos del triángulo

D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº 114

En un triángulo ABC recto en B, se trazan la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{BM}\left(\overline{AM}\cong\overline{MC}\right)$. Si $m\sphericalangle BCA=15$ y $AC=\left(\sqrt{3}+1\right)u$ entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia inscrita al triángulo BHM es:

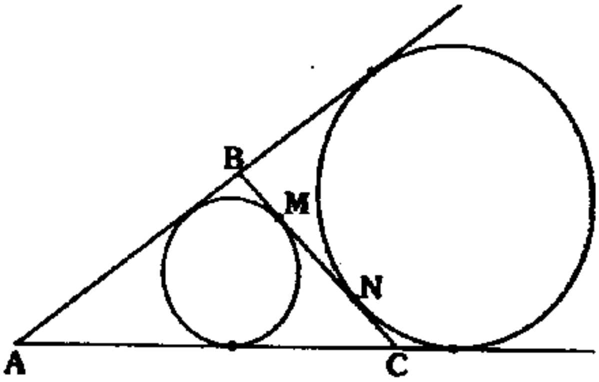
A) 0,45 B) 0,75 C) 0,15

D) 0,35 E) 0,25

PROBLEMA Nº 115

En el gráfico, Si AC=b y AB=c.

Entonces: $\frac{BM}{NC}+MN$ es:



A) 2+c−b B) 1+b−c

C) $1+\frac{b-c}{2}$ D) 1+2B−C

E) 1+b−2c

PROBLEMA Nº 116

Desde el punto P que pertence a la circunferencia circunscrita a un triángulo ABC, se trazan las perpendiculares $\overline{PQ}$ y $\overline{PS}$ a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $\overline{SQ}$ interseca a la prolongación de $\overline{AB}$ en T, entonces la $m\sphericalangle PTA$ es:

A) 30° B) 60° C) 75°

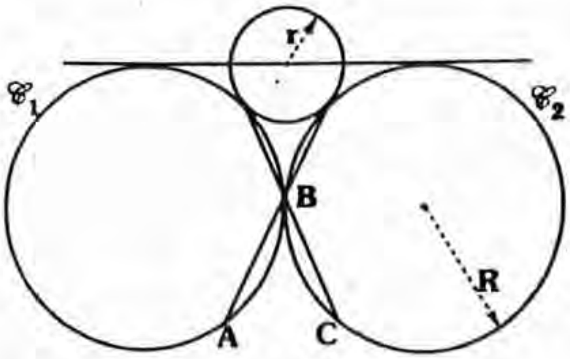
D) 90° E) 100°

PROBLEMA Nº 117

$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son congruentes y tangentes, una circunferencia tiene su centro en la recta tangente común L.

Calcule:

a) $m\sphericalangle ABC$ **b)** $\frac{r}{R}$



A) $60°\ ;\ \frac{1}{2}$ B) $45°\ ;\ \sqrt{2}-1$

C) $30°\ ;\ \frac{\sqrt{2}-1}{4}$ D) $53°\ ;\ \frac{3}{8}$

E) $37°\ ;\ \frac{4}{9}$

PROBLEMA Nº 118

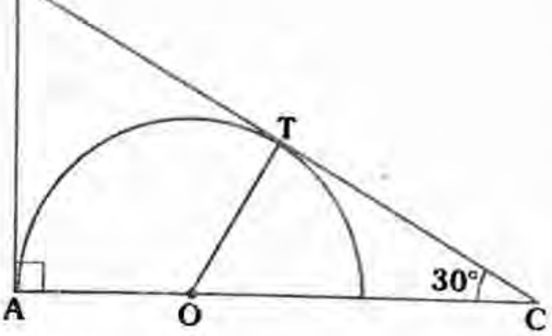
La circunferencia exinscrita de un triángulo ABC relativa a $\overline{BC}$ es tangente a la prolongación de $\overline{AC}$ en E, O es el centro de la circunferencia, se traza $\overline{CF}$ perpendicular a $\overline{BO}$: $m\measuredangle AEF=2(m\measuredangle BAC)$. Halle la medida del ángulo BAC.

A) 18° B) 36° C) 37°

D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 119

En el gráfico OT=5u, calcule AB en "u" (O es centro).



A) $2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$

C) $5\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{2}$

E) $7\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 120

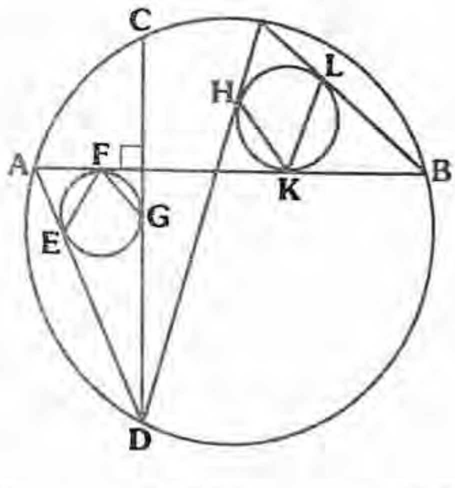
En una circunferencia de centro O, se traza el diámetro AB y en su prolongación se ubica el punto F, tal que AO=OB=BF. Desde F, talque AO=OB=BF. Desde F se traza la tangente a la circunferencia, siendo J el punto de tangencia. Halle la medida del ángulo OJA.

A) 15° B) 30° C) 45°

D) 60° E) 20°

PROBLEMA Nº 121

En el gráfico, $\overline{AB}\perp\overline{CD}$ y $m\measuredangle EFG=79°$. Halle $m\measuredangle HKL$. (E, F, G, H, K y L son puntos de tangencia).

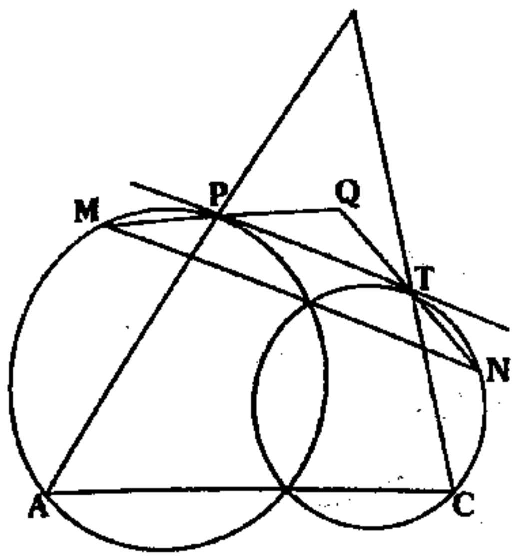


A) 50° B) 56° C) 58°

D) 64° E) 72°

PROBLEMA Nº 122

$\overleftrightarrow{PT}$ es la tangente común a las circunferencias. $m\measuredangle ABC=38°$, halle $m\measuredangle MQN$.

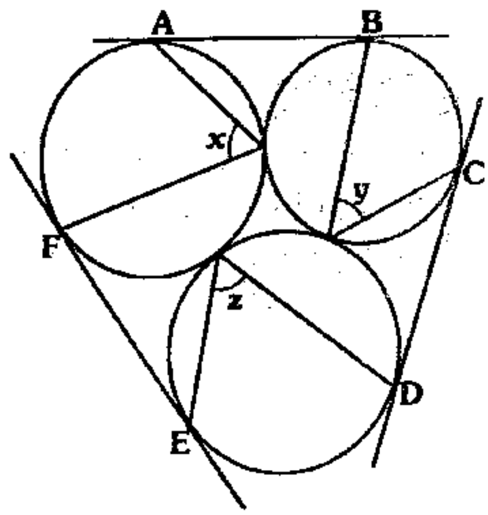


A) 128° B) 138° C) 142°

D) 148° E) 152°

PROBLEMA Nº 123

En la figura, A, B, C, D, E y F son puntos de tangencia. Halle $x+y+z$.



A) 90° B) 120° C) 180°

D) 240° E) 280°

PROBLEMA Nº 124

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Sean las cuerdas AB y BC congruentes se ubican los puntos P y Q de manera que AP=CQ, entonces $\overline{PQ}$ es paralelo a $\overline{CA}$.

II. Una circunferencia está inscrita en un triángulo ABC, tangente a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P, Q y R respectivamente; entonces las cevianas $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ y $\overline{CP}$ concurren.

III. Sean las cuerdas $\overline{AB}$ y CD no paralelas de una circunferencia. Entonces, las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ pasan por el centro de la circunferencia.

IV. En una circunferencia, todo diámetro que biseca a una cuerda es perpendicular a dicha cuerda.

A) FVFV B) VFVF C) VVFF

D) VVVF E) FVVF

PROBLEMA Nº 125

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. En una circunferencia, si el diámetro es perpendicular a una cuerda, entonces divide a la cuerda y al arco que subtiende en partes congruentes respectivamente.

II. En una circunferencia, si dos cuerdas son paralelas, entonces los arcos comprendidos entre las cuerdas, son congruentes.

III. La circunferencia es un conjunto convexo.

A) VFV B) VVF C) VVV

D) FVF E) FFF

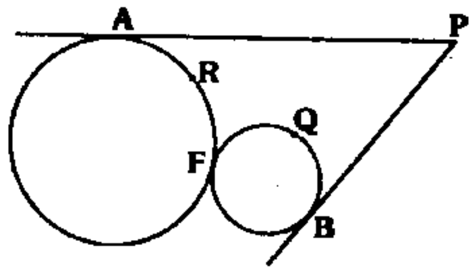
PROBLEMA Nº 126

Dos circunferencias congruentes de centros O_1 y O_2 son tangentes exteriores, halle la medida del ángulo que forman las tangentes trazadas desde O_1 y O_2 a las circunferencias.

A) 90° B) 98° C) 105°
D) 106° E) 120°

PROBLEMA Nº 127

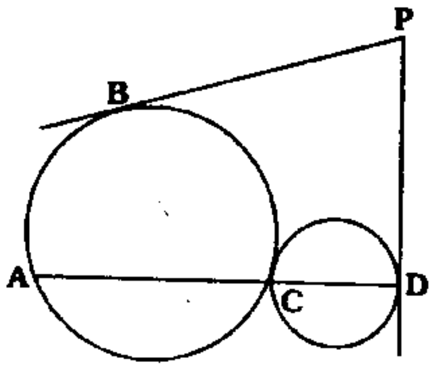
En la figura, A, F y B son puntos de tangencia, $m\widehat{ARF}=\alpha$ y $m\widehat{FQB}=\beta$.
Halle $m\measuredangle APB$.



A) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ B) $\alpha+\beta$
C) $\beta-\alpha$ D) $360°-(\alpha+\beta)$
E) $360°-2\alpha-2\beta$

PROBLEMA Nº 128

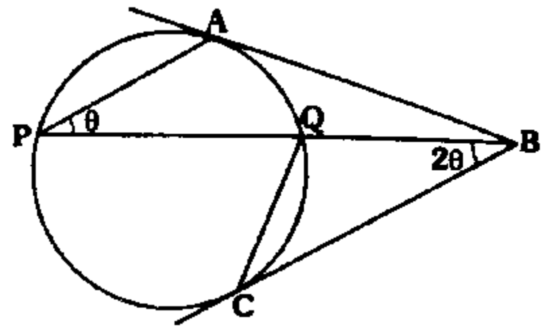
En la figura mostrada B, C y D son puntos de tangencia. Si $m\measuredangle BPD=62°$.
Halle $m\widehat{AB}$



A) 30° B) 31°
C) 45° D) 62°
E) 75°

PROBLEMA Nº 129

En la figura, A y C son puntos de tangencia. Si AP=QC, calcule la medida del ángulo ABC.



A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA Nº 130

Una circunferencia de centro O inscrita en un triángulo ABC determina los puntos de tangencia P, Q y R en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, la prolongación de $\overline{AO}$ intercepta a $\overline{QR}$ en T.
Si $m\measuredangle ATR=\beta$, entonces la $m\measuredangle ABC$ es:

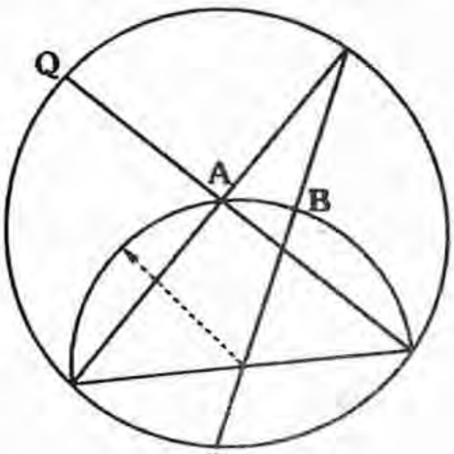
A) $45°+\beta$ B) $60°+\beta$
C) β D) 2β
E) $90°-\beta$

Problemas Propuestos

Ciclo Semestral

Problema Nº 131

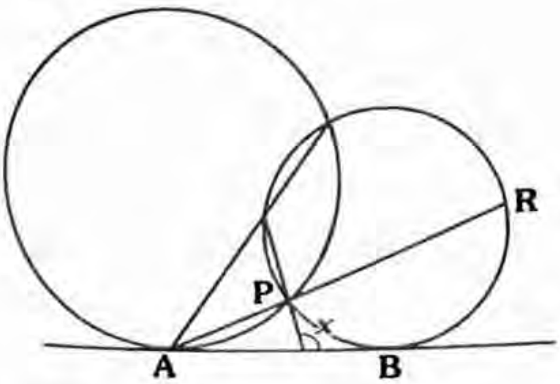
Si $m\overset{\frown}{AB}=20°$. Calcule $m\overset{\frown}{PQ}$.



A) 100°
B) 110°
C) 120°
D) 130°
E) 140°

Problema Nº 132

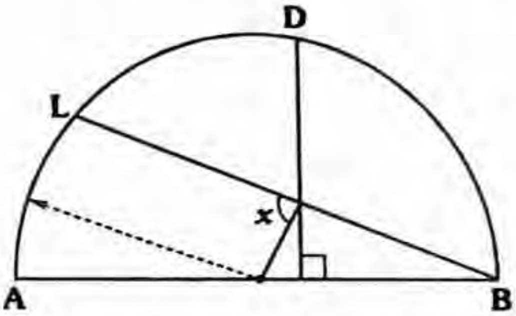
Si $m\overset{\frown}{PBR}=160°$; A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".



A) 80°
B) 100°
C) 40°
D) 140°
E) 70°

Problema Nº 133

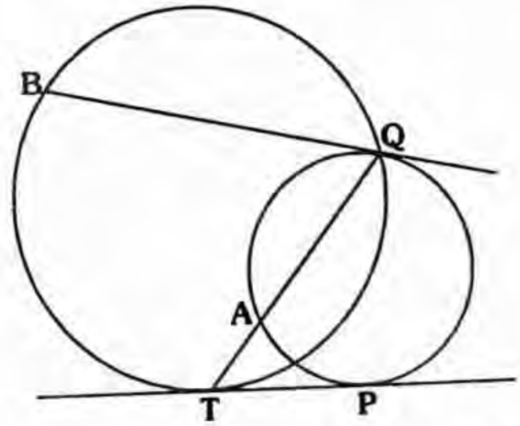
Si $m\overset{\frown}{DB}=2\left(m\overset{\frown}{AL}\right)=80°$. Calcule "x".



A) 50°
B) 80°
C) 40°
D) 70°
E) 25°

Problema Nº 134

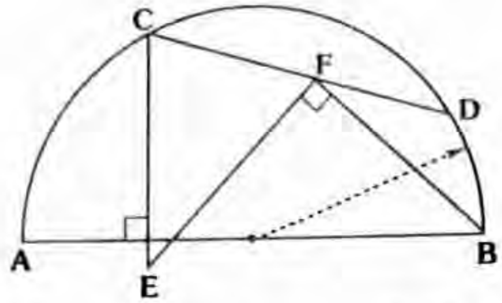
Si P, Q y T son puntos de tangencia y $m\overset{\frown}{AP}=40°$. Calcule $m\overset{\frown}{QB}$.



A) 20°
B) 40°
C) 60°
D) 70°
E) 80°

Problema Nº 135

Si CF=FD y EF=FB. Calcule $m\overset{\frown}{CD}$.

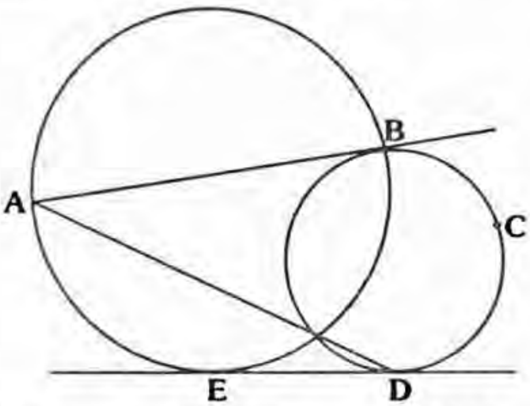


A) 120° B) 150° C) 90°

D) 72° E) 135°

PROBLEMA Nº 136

Si B, D y E son puntos de tangencia y $m\widehat{BCD} = 200°$. Calcule $m\widehat{AE}$.



A) 60° B) 50° C) 40°

D) 100° E) 80°

PROBLEMA Nº 137

Del gráfico. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AB}$ y $\overline{MO}$.

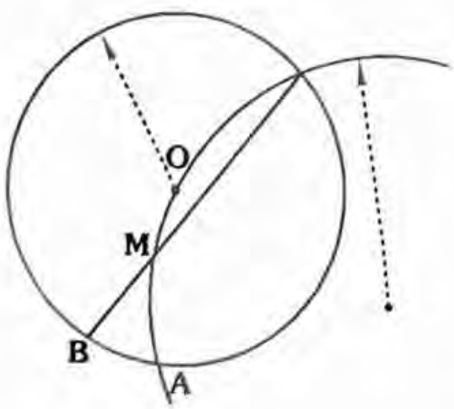
A) 135°

B) 60°

C) 90°

D) 150°

E) 72°



PROBLEMA Nº 138

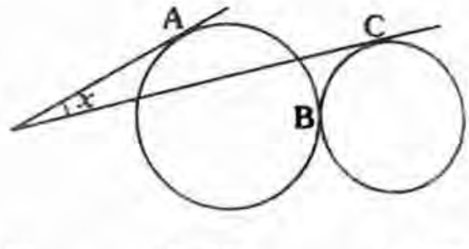
Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las rectas tangentes perpendiculares $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ (A y B son puntos de tangencia) y la secante PCD; $m\widehat{AC} = m\widehat{BD}$. Calcule $m\widehat{BD}$.

A) 60° B) 53° C) 30°

D) 45° E) 36°

PROBLEMA Nº 139

Si A, B y C son puntos de tangencia y $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = 200°$. Calcule "$x$".

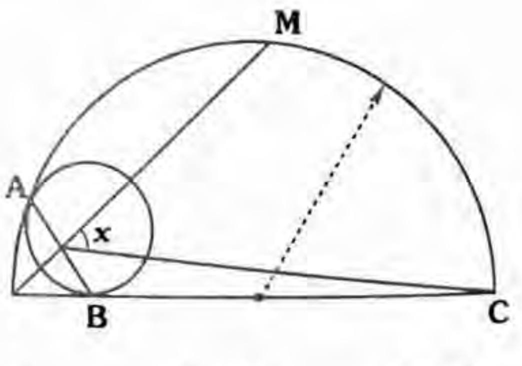


A) 100° B) 90° C) 25°

D) 20° E) 35°

PROBLEMA Nº 140

Si A y B son puntos de tangencia y $m\widehat{AM} = m\widehat{MC}$. Calcule "$x$".

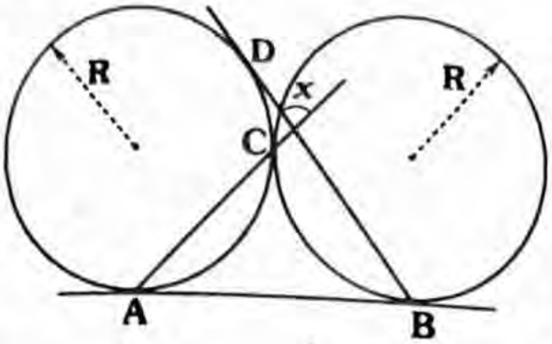


A) 45° B) 60° C) 30°

D) 53° E) 75°

PROBLEMA Nº 141

Si A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule "x".



A) 60°

B) 75°

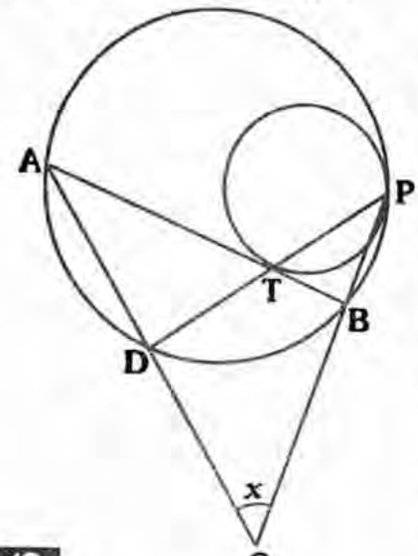
C) 90°

D) 98°

E) 82°

PROBLEMA Nº 142

Si P y T son puntos de tangencia; $m\widehat{PB}=40°$ y AD=DC. Calcule "x".



A) 40°

B) 70°

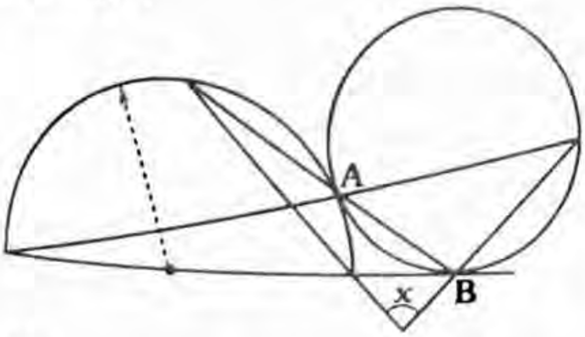
C) 55°

D) 80°

E) 35°

PROBLEMA Nº 143

Si A y B son puntos de tangencia. Calcule "x".



A) 60° B) 120° C) 45°

D) 90° E) 135°

PROBLEMA Nº 144

ABCD es un cuadrado y R=5. Calcule DE.

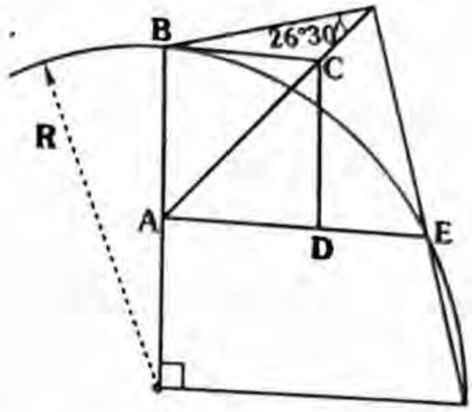
A) 3

B) 2

C) 1

D) 2,5

E) 1,5



PROBLEMA Nº 145

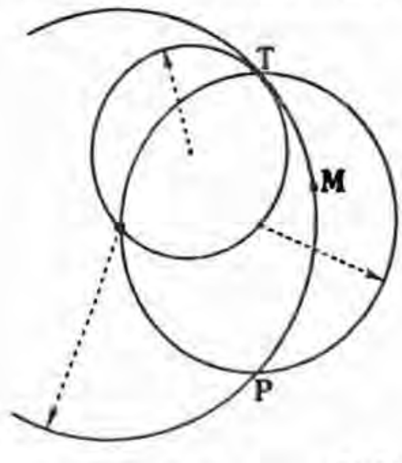
Se tienen las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ de centros O_1 y O_2, respectivamente secantes en P y Q una recta pasa por P y corta a las circunferencias en A y B. (A en $\mathscr{C}_1$ y B en $\mathscr{C}_2$), si $5(AB)=8(O_1O_2)$. Calcule $m\widehat{APQ}$.

A) 120° B) 135° C) 118°

D) 106° E) 121°

PROBLEMA Nº 146

T es punto de tangencia, calcule $m\widehat{TMP}$.



A) 105° B) 90° C) 120°

D) 180° E) 150°

PROBLEMA Nº 147

Si $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$. Calcule $m\widehat{BCD}$.

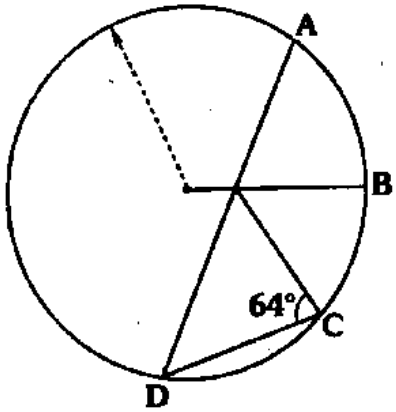
A) 96°

B) 104°

C) 124°

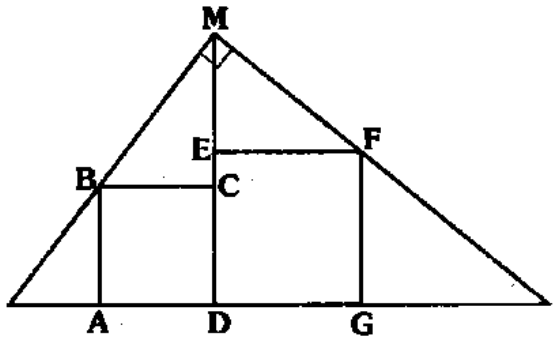
D) 116°

E) 126°



PROBLEMA Nº 148

Si ABCD y DEFG son cuadrados. Calcule BM/MF.

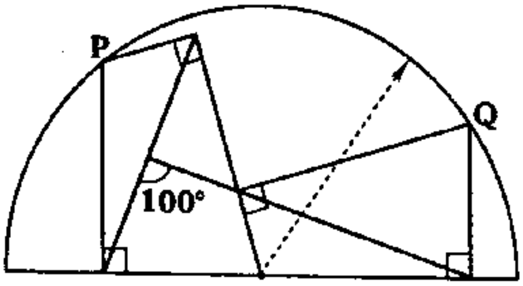


A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1

D) 1/2 E) 2

PROBLEMA Nº 149

Calcule $m\widehat{PQ}$

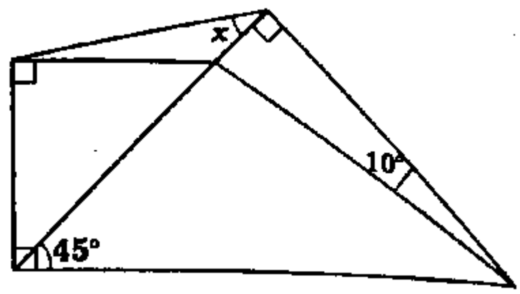


A) 125° B) 80° C) 140°

D) 100° E) 50°

PROBLEMA Nº 150

Calcule "x".



A) 25° B) 30° C) 35°

D) 40° E) 38°

PROBLEMA Nº 151

Si ABCD es un rectángulo; AB=BP. Calcule "x".

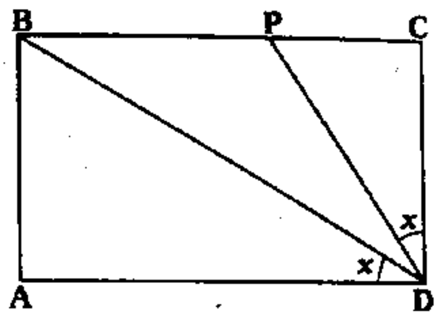
A) 53°/2

B) 37°/2

C) 127°/4

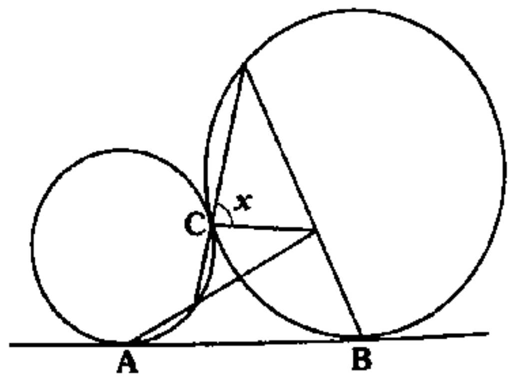
D) 143°/2

E) 127°/2



PROBLEMA Nº 152

Si A, B y C son puntos de tangencia. Calcule "x".

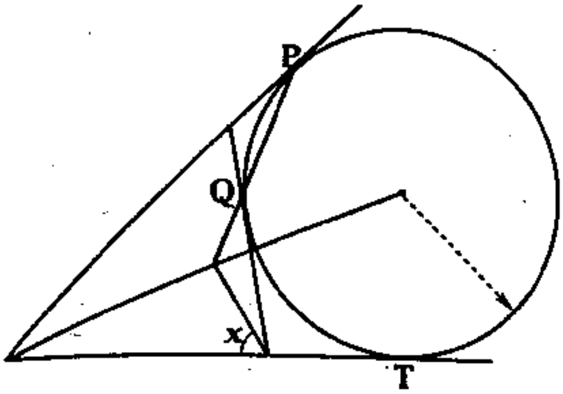


A) 72° B) 60° C) 54°

D) 90° E) 120°

PROBLEMA Nº 153

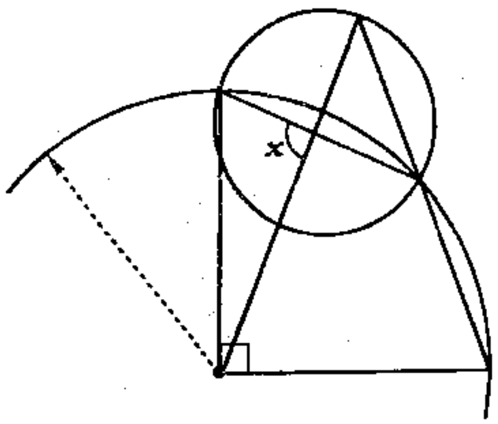
Si P, Q y T son puntos de tangencia y $m\widehat{PQT}=140°$. Calcule "x".



A) 70° B) 40° C) 50°
D) 80° E) 55°

PROBLEMA Nº 154

Calcule "x", en:



A) 60°
B) 75°
C) 67,5°
D) 135°
E) 90°

PROBLEMA Nº 155

En la semicircunferencia S_1, de diámetro $\overline{AB}$ se ubica P, se traza una circunferencia $\mathscr{C}_1$ tangente a $\overleftrightarrow{AB}$ en A y a la prolongación de $\overline{BP}$ en C.

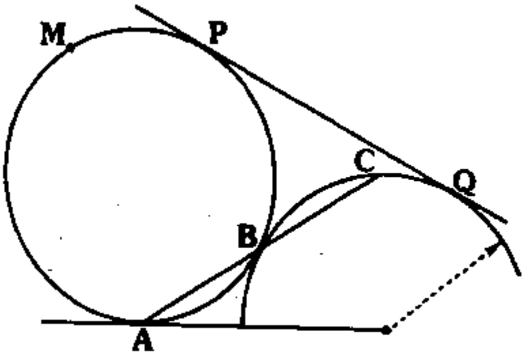
Si $\overline{AP}\cap\mathscr{C}_1=\{T\}$ y $\overleftrightarrow{CT}\cap\overline{AB}=\{H\}$.

Si $m\widehat{CT}=x$ y $m\measuredangle AHC=z$. Calcule x/z.

A) 1 B) $\dfrac{1}{3}$ C) 2
D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{1}{2}$

PROBLEMA Nº 156

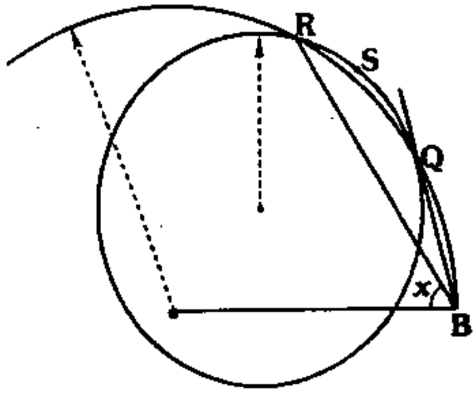
A, B, P y Q son puntos de tangencia y $m\widehat{AMP}=220°$.
Calcule $m\widehat{CQ}$.



A) 50° B) 60° C) 70°
D) 20° E) 40°

PROBLEMA Nº 157

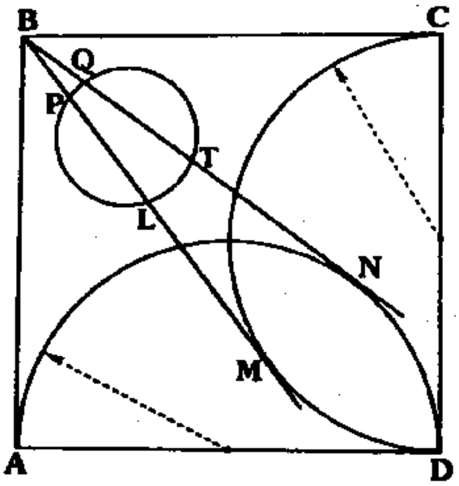
En el gráfico Q es pun punto de tangencia $m\widehat{RSQ}=50°$, calcule "x".



A) 50° B) 55° C) 60°
D) 65° E) 70°

PROBLEMA Nº 158

ABCD es un cuadrado, M y N son puntos de tangencia y $m\widehat{LT}$ toma su menor valor entero par. Calcule $m\widehat{PQ}$.



A) 1° B) 2° C) 3°

D) 6° E) 7°

PROBLEMA Nº 159

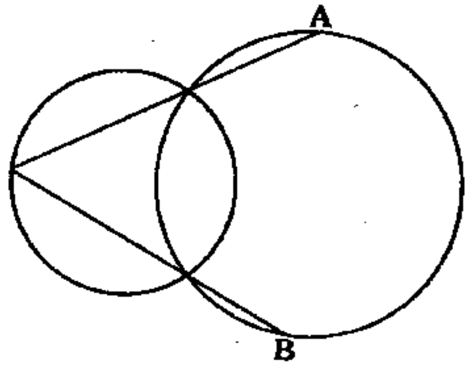
Se tienen dos circunferencias ortogonales y congruentes de radio R se intersecan en A y B. Si la línea de centros interseca a dichas circunferencias en M y N, calcule el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo mixtilineo MAN.

A) R/3 B) R/2 C) R/4

D) R/5 E) R/6

PROBLEMA Nº 160

En el gráfico, las circunferencias son ortogonales, calcule $m\overset{\frown}{AB}$.



A) 90° B) 135° C) 120°

D) 180° E) 225°

PROBLEMA Nº 161

En el gráfico, M, N y Q son puntos de tangencia y $m\overset{\frown}{LC}=50°$. Calcule $\overset{\frown}{ALC}$.

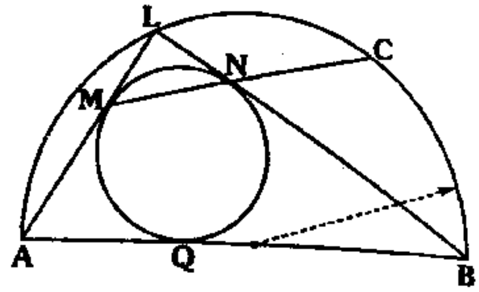
A) 140°

B) 130°

C) 120°

D) 110°

E) 100°



PROBLEMA Nº 162

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, con $AB=BC$, $m\sphericalangle ACD=2\alpha$, $m\sphericalangle ACB=60°-4\alpha$ y $m\sphericalangle DAC=30°+2\alpha$.

Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$.

A) 30° B) $80°+\alpha$ C) $60-\alpha$

D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 163

La medida del menor ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ mide 20°.

Calcule $m\overset{\frown}{CD}$.

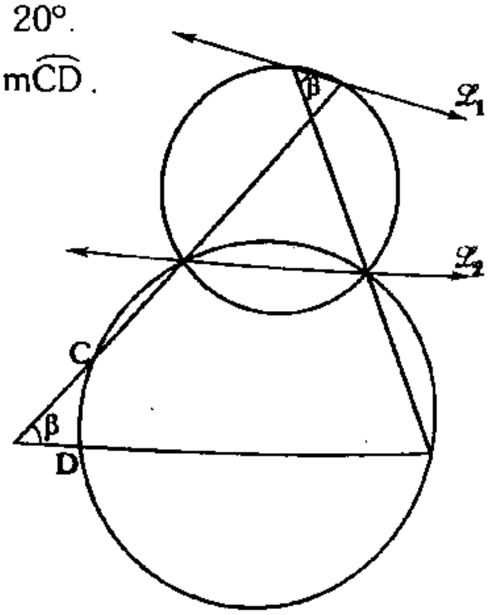
A) 10°

B) 30°

C) 20°

D) 40°

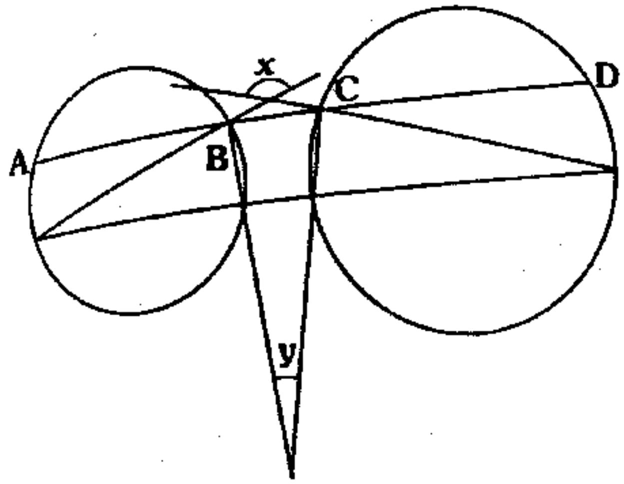
E) 50°



PROBLEMA Nº 164

En el gráfico, $m\widehat{AB}+m\widehat{CD}=80°$.

Calcule $x-y$



A) 40°

B) 50°

C) 60°

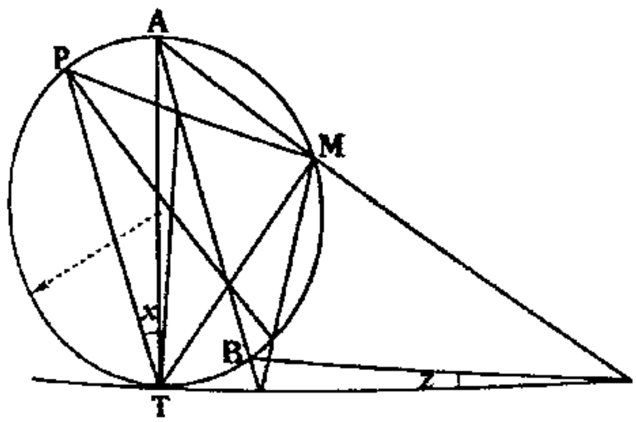
D) 80°

E) 70°

PROBLEMA Nº 165

En el gráfico, T es punto de tangencia, $m\widehat{AP}=6z$ y $m\widehat{AM}=m\widehat{MB}$.

Calcule "x".



A) $3z$

B) $4z$

C) $5z$

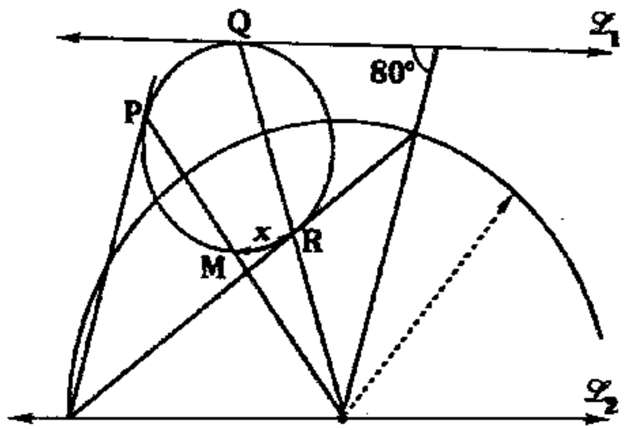
D) $6z$

E) $2z$

PROBLEMA Nº 166

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, P, Q y R son puntos de tangencia.

Calcule "x".



A) 20°

B) 70°

C) 40°

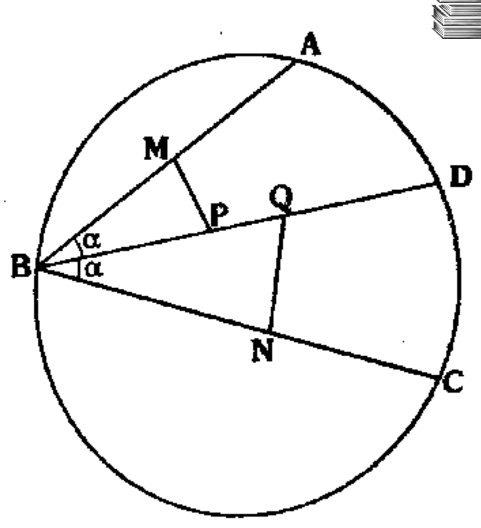
D) 50°

E) 35°

PROBLEMA Nº 167

En el gráfico, $\overleftrightarrow{PM}$ y $\overleftrightarrow{QN}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Calcule $\dfrac{BP}{QD}$.



A) 3/5

B) 4/5

C) 1/2

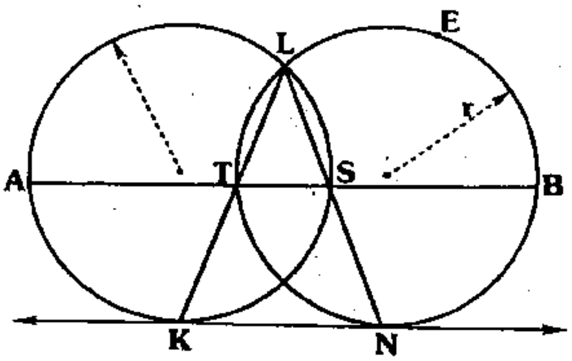
D) 2

E) 1

PROBLEMA Nº 168

En el gráfico, las circunferenicas son ortogonales, $m\widehat{AK}=m\widehat{EB}$ y $r=16$.

Calcule EN.



A) 16 B) $16\sqrt{2}$ C) $16\sqrt{3}$

D) $16\sqrt{5}$ E) 32

PROBLEMA Nº 169

Se tiene el cuadrado ABCD de centro G. P y F están en las prolongaciones de $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ respectivamente, tal que FG=GP y $m\sphericalangle DCP=26°30'$. Calcule $m\sphericalangle FGM$.

$\left(\overline{PC}\cap\overline{BF}\right)=\{M\}$

A) 18°30' B) 15° C) 16°

D) 22°30' E) 8°

PROBLEMA Nº 170

En la circunferencia de centro O se traza la cuerda AB en la cual se ubica M tal que $m\sphericalangle OMA=45°$; la prolongación de $\overline{MO}$ corta a la circunferencia en P.

Si $AB=(MP)\sqrt{2}$, calcule $m\widehat{AP}$.

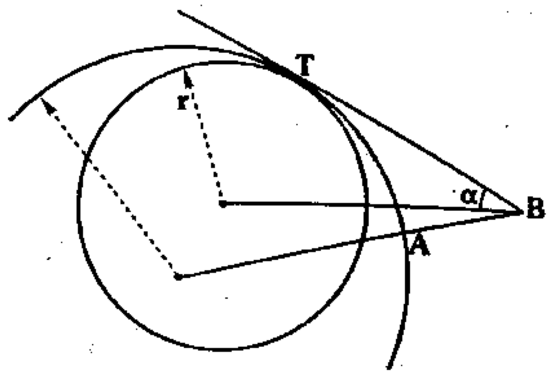
A) 45° B) 53° C) 60°

D) 75° E) 90°

PROBLEMA Nº 171

T es punto de tangencia y $m\widehat{AT}=2\alpha$.

Calcule AB.

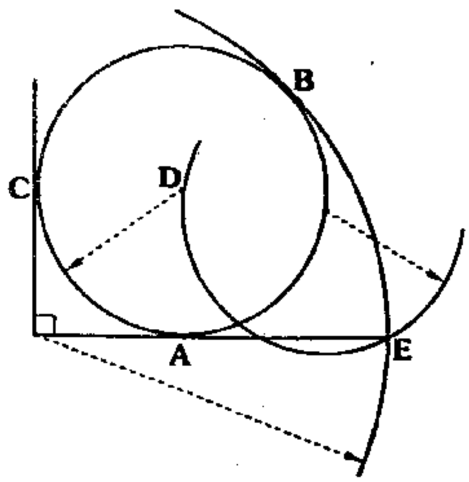


A) $\frac{r}{2}$ B) r C) 2r

D) $\frac{r}{3}$ E) $\frac{r\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA Nº 172

En el gráfico, A, B y C son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{ED}$.



A) 90° B) 60°

C) 120° D) 135°

E) 106°

PROBLEMA Nº 173

Se tiene el cuadrante AOB (AO=OB), se ubica E y P en el arco AB tal que E está en $\overset{\frown}{AP}$. Si $\overline{EP} // \overline{AB}$ y $m\measuredangle OPA = 65°$, calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{EB}$.

A) 110° B) 150° C) 143°
D) 140° E) 120°

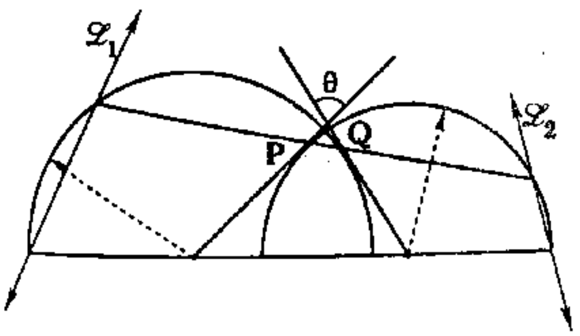
PROBLEMA Nº 174

Se tiene el rectángulo ABCD, con diámetro AD se traza la semicircunferencia que corta a $\overline{BC}$ en P y Q $(P \in \overline{BQ})$. Si $m\overset{\frown}{PQ} = 120°$, calcule $m\measuredangle PDB$.

A) 1° B) 2° C) 3°
D) 7,5° E) 7°

PROBLEMA Nº 175

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Halle la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.



A) θ B) 2θ C) 45°−θ
D) $\frac{\theta}{2}$ E) 45°+θ

PROBLEMA Nº 176

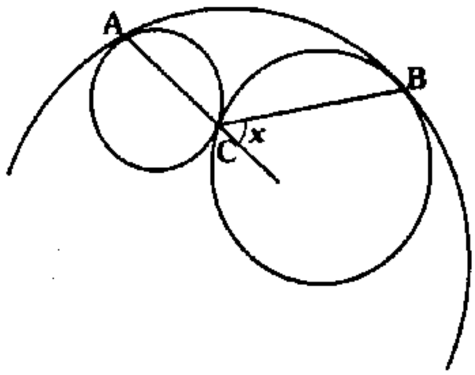
Se tiene el cuadrado ABCD inscrito en una circunferencia, en $\overset{\frown}{AB}$ se ubica P y Q y en $\overline{AB}$ están R y S tal que PQRS es un cuadrado.

Calcule $m\overset{\frown}{PQ}$.

A) 15° B) 30° C) 32°
D) 16° E) 28°

PROBLEMA Nº 177

A, B y C son puntos de tangencia y $m\overset{\frown}{AB} = 40°$. Calcule "x".



A) 40° B) 50° C) 60°
D) 65° E) 70°

PROBLEMA Nº 178

En el cuadrilátero convexo ABCD, con $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Si $m\measuredangle BAC = 7°$; $m\measuredangle CBD = 37°$ y $m\measuredangle DAC = 23°$. Calcula $m\measuredangle BDC$.

A) 21° B) 42° C) 63°
D) 69° E) 76°

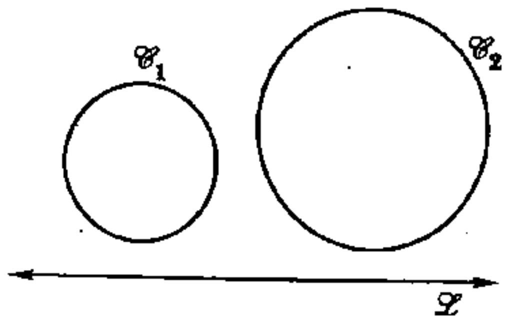
PROBLEMA Nº 179

Se tienen tres circunferencias coplanares secantes dos a dos. Indique el número de circunferencias tangentes comunes a las tres circunferencias se pueden trazar.

A) 1 B) 8 C) 2
D) 3 E) 5

PROBLEMA Nº 180

En el gráfico, ¿cuántas circunferencias se pueden trazar, tangente a $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{L}$?

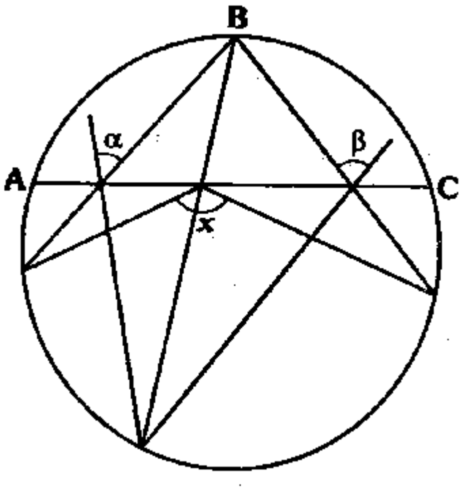


A) 5 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

PROBLEMA Nº 181

Si $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$. Calcule "x" en función de "α" y "β".



A) $\frac{\alpha+\beta}{2}$ B) $\alpha+\beta$

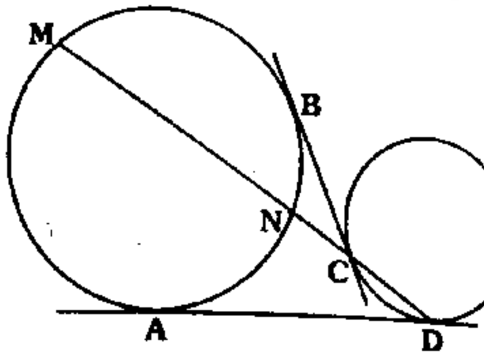
C) $2(\alpha+\beta)$ D) $90°+(\alpha+\beta)$

E) $180° - \frac{(\alpha+\beta)}{2}$

PROBLEMA Nº 182

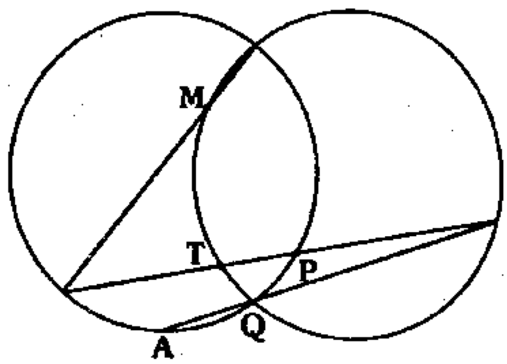
En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia.

Demuestre que $m\widehat{MB} + m\widehat{AN} = 180°$.



PROBLEMA Nº 183

En el gráfico, $m\widehat{TM} = \alpha$, calcule $m\widehat{AQP}$.



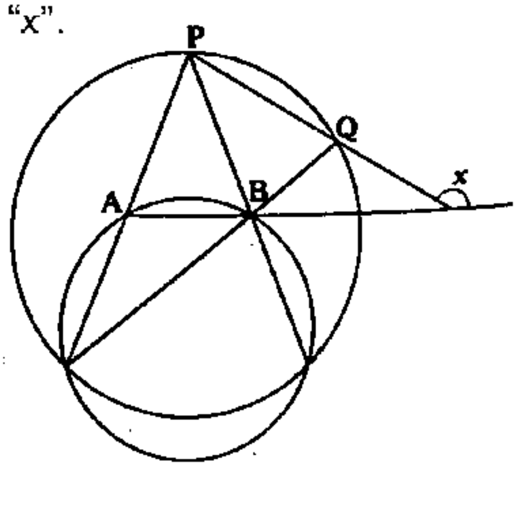
A) α B) 2α C) $\frac{\alpha}{2}$

D) $90°-\alpha$ E) $180°-\alpha$

PROBLEMA Nº 184

En el gráfico, $m\widehat{AB} + m\widehat{PQ} = 80°$.

Calcule "x".



A) 120°

B) 140°

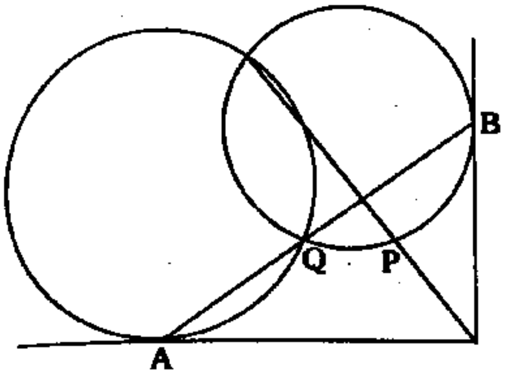
C) 160°

D) 100°

E) 135°

PROBLEMA Nº 185

A y B son puntos de tangencia y $m\widehat{AQ}=50°$. Calcule $m\widehat{PB}$.



A) 40° B) 20° C) 25°
D) 50° E) 65°

PROBLEMA Nº 186

En la semicircunferencia de diámetro AB, se ubican los puntos P y Q, talque $m\widehat{AP}=90°$ y $\overline{AQ}$ interseca a $\overline{PB}$ en M; luego en $\overline{AB}$ se ubica L, tal que $m\sphericalangle AQL=45°$ y AM=2(LB).

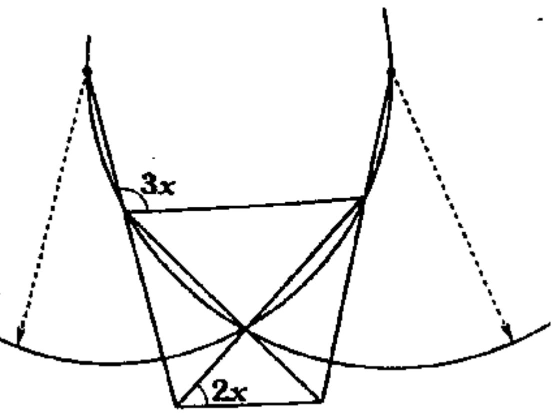
Calcule $m\sphericalangle PLQ$.

A) 45° B) 30° C) 60°
D) 53° E) 37°

PROBLEMA Nº 187

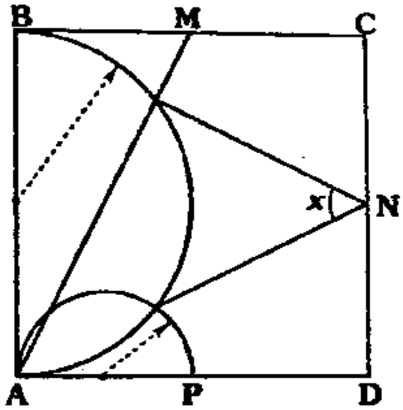
Del gráfico, calcule "x".

A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 18°
E) 22°



PROBLEMA Nº 188

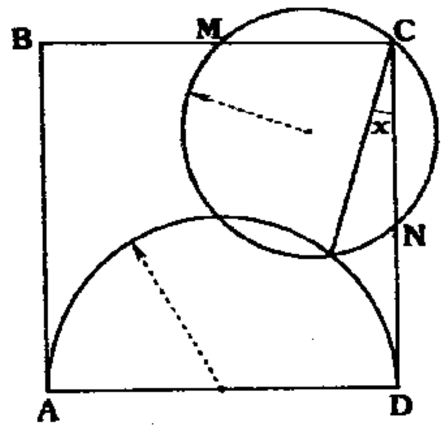
M, N y P son puntos medios y ABCD es un cuadrado. Calcule "x".



A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

PROBLEMA Nº 189

ABCD es un cuadrado y BM=MC=CN. Calcule "x".



A) 15° B) 18,5° C) 22,5°
D) 26,5° E) 30°

PROBLEMA Nº 190

A y B son puntos de tangencia, si PQ=QB. Calcule "x".

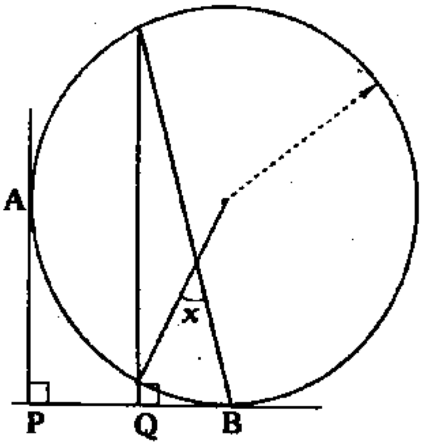
A) 30°

B) 45°

C) 60°

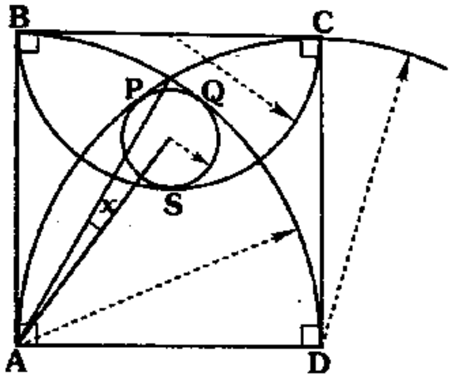
D) 37°

E) 53°



PROBLEMA Nº 191

ABCD es cuadrado, calcule x. Si BQ y S son puntos de tangencia.



A) 15° B) 8° C) 7,5°

D) 4° E) 10°

PROBLEMA Nº 192

Si B es punto de tangencia y $\overline{AB} // \overline{CD}$. Calcule "x".

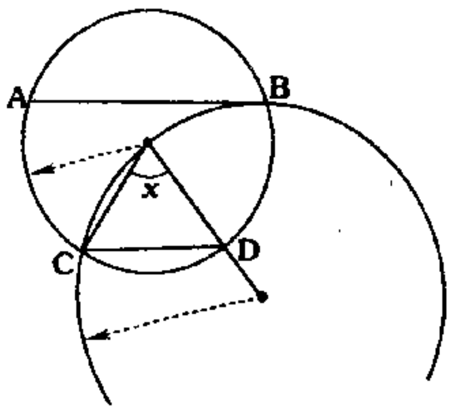
A) 60°

B) 45°

C) 90°

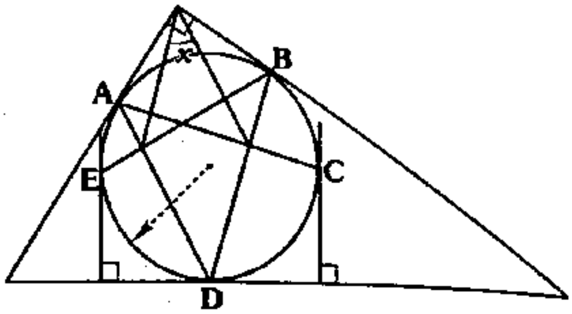
D) 72°

E) 36°



PROBLEMA Nº 193

Si A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule "x".

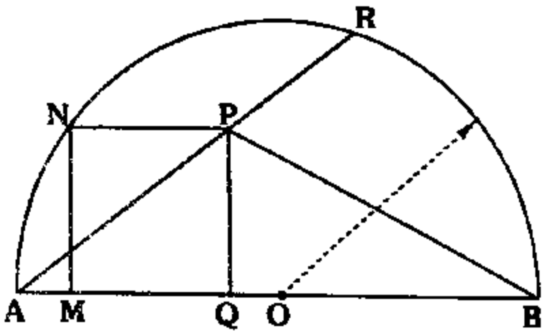


A) 30° B) 60° C) 45°

D) 37° E) 53°

PROBLEMA Nº 194

Calcule $m\widehat{NR}$. Si MNPQ es un cuadrado y $m\sphericalangle PBQ = \dfrac{53°}{2}$.



A) 60° B) 63° C) 69°

D) 37° E) 53°

PROBLEMA Nº 195

Se tiene dos circunferencias tangentes exteriores donde "P" es el punto de tangencia común. Luego se trazan las tangentes exteriores comunes determinando los puntos de tangencia A y B en una de ellas y en la otra los puntos C y D.

Calcule $m\sphericalangle APB + m\sphericalangle DPC$

A) 160° B) 170° C) 180°

D) 150° E) 140°

PROBLEMA Nº 196

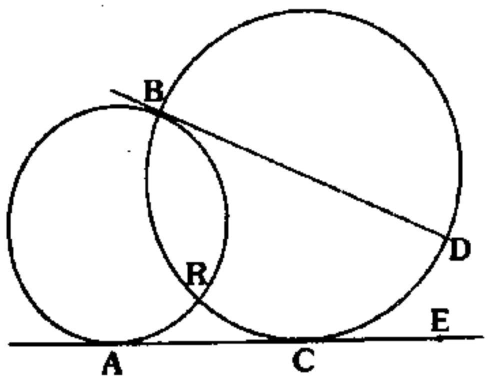
En un rectángulo ABCD "O" punto medio de $\overline{AC}$, en $\overline{BC}$ se ubica el punto P, luego se traza $\overline{PH} \perp \overline{BO}$ $(H \in \overline{BO})$.

Si $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{PD} = \{T\}$, $m\measuredangle PTC = 90°$ y HP=3PT. Calcule $m\measuredangle HPT$.

A) 53° B) 37° C) 45°
D) 30° E) 60°

PROBLEMA Nº 197

Según el gráfico $m\dfrac{\overset{\frown}{ARB}}{5} = m\dfrac{\overset{\frown}{BRC}}{4} = m\dfrac{\overset{\frown}{CED}}{2}$.
Calcule $m\overset{\frown}{CED}$ siendo A, B y C puntos de tangencia.



A) 53° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA Nº 198

Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. Luego se traza $\overline{BH} \perp \overline{AP}$ $(H \in \overline{AP})$ que intersecta a la circunferencia en el punto T, calcule $m\overset{\frown}{AT}$ si AH=HP.

A) 53° B) 60° C) 45°
D) 37° E) 75°

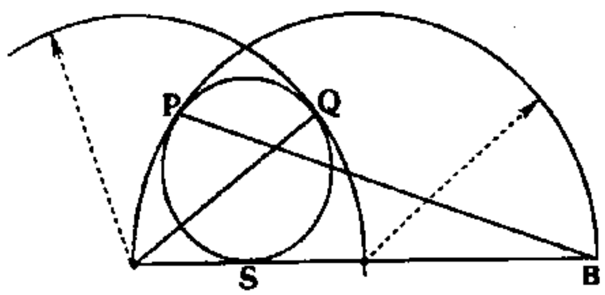
PROBLEMA Nº 199

En una circunferencia cuyo diámetro es $\overline{AB}$ se ubica un punto C $(C \in \overset{\frown}{AB})$ y se traza $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ $(H \in \overline{AB})$ tal que: $m\overset{\frown}{BC} = 80°$. En el arco AC se ubica el punto P, calcule el menor valor entero de la $m\measuredangle HCP$.

A) 51° B) 61° C) 49°
D) 79° E) 81°

PROBLEMA Nº 200

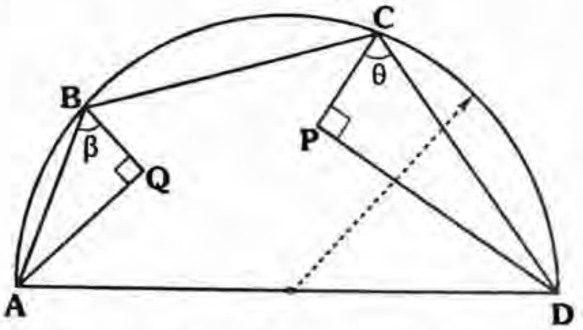
En el gráfico, P,Q y S son puntos de tangencia.



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 36° E) 67,5°

PROBLEMA Nº 201

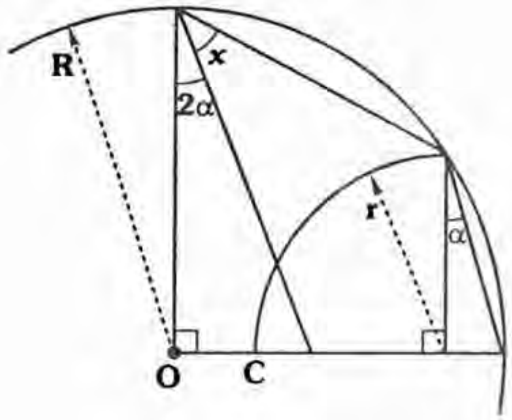
En el gráfico, $m\widehat{AC}=2\beta$, $m\widehat{BD}=2\theta$ y $AQ+PD=BC$. Calcule $m\widehat{BC}$.



A) 90° B) 120° C) 127°
D) 106° E) 135°

PROBLEMA Nº 202

Si $4R=3(OC)+7r$, calcule "x".



A) 30° B) 37° C) 23°
D) 45° E) 53°

PROBLEMA Nº 203

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si dos circunferencias son secantes y la suma de las medidas de los arcos a uno y otro lado de cuerda común es 180°, entonces dichas circunferencias son ortogonales.

II. Las diagonales en un cuadrilátero bicentrico son perpendiculares.

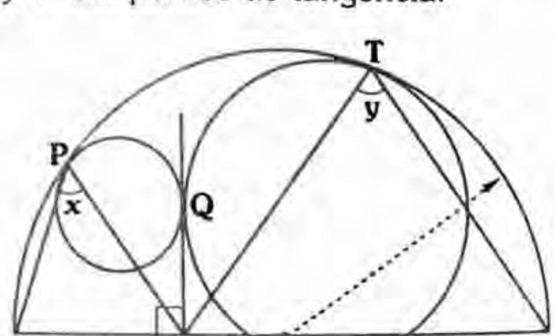
III. En un polígono inscrito de "n" lados, (n es par, $n\geq 4$) la suma de medidas de los ángulos internos alternadamente es $180°(n-3)$.

IV. Todo trapezoide simétrico convexo es un cuadrilátero inscriptible.

A) VFVF B) FFFF
C) VVVF D) FVFF
E) FVVF

PROBLEMA Nº 204

En el gráfico, $m\widehat{PT}=\alpha$, calcule $x+y$, si P, Q y T son puntos de tangencia.



A) $180°-\alpha$ B) $90°+\dfrac{\alpha}{2}$
C) $45°+2\alpha$ D) $180°-2\alpha$
E) 2α

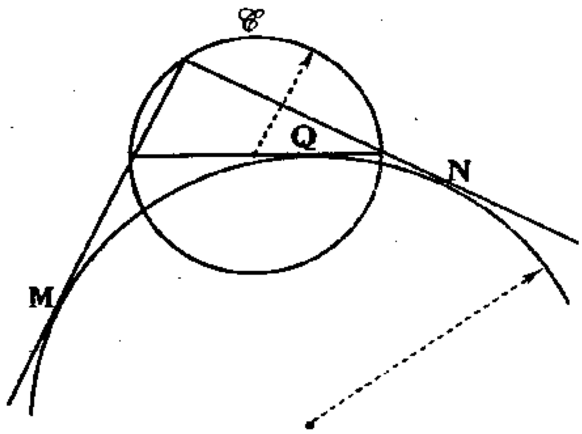
PROBLEMA Nº 205

Se tiene el cuadrilátero inscriptible ABCD las diagonales se cortan en Q. Si $m\sphericalangle CAD = 15°$, $BC = CD$ y $AD = AB + BQ$. Calcule $m\sphericalangle ACD$.

A) 100° B) 105° C) 110°
D) 115° E) 112°

PROBLEMA Nº 206

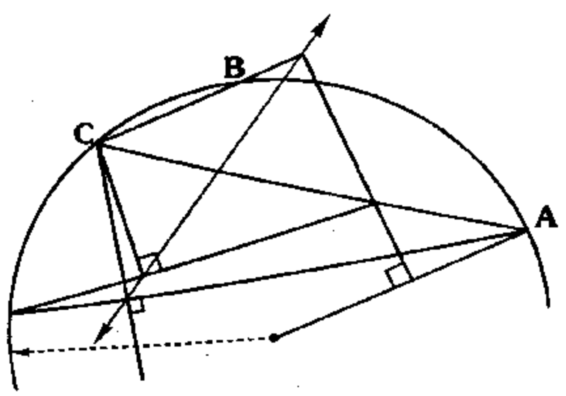
En el gráfico, M, Q y N son puntos de tangencia. Calcule la medida del ángulo entre $\mathscr{C}$ y $\overleftrightarrow{MN}$.



A) 60° B) 45° C) 30°
D) 90° E) 0°

PROBLEMA Nº 207

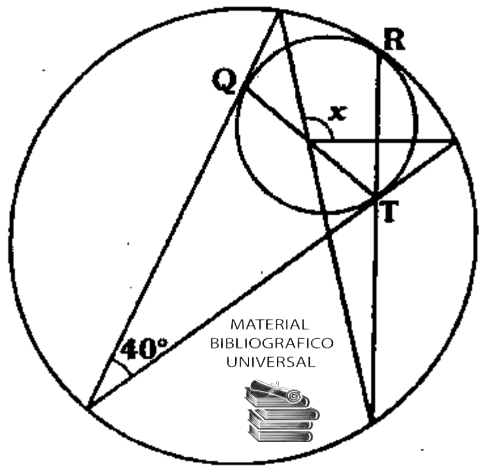
En el gráfico, $m\widehat{AB} = 80°$, calcule $m\widehat{BC}$.



A) 10° B) 20° C) 50°
D) 40° E) 30°

PROBLEMA Nº 208

En el gráfico T, Q y R son puntos de tangencia. Calcule "x".



A) 90° B) 100° C) 110°
D) 120° E) 130°

PROBLEMA Nº 209

Se tiene el triángulo ABC, en el cual se traza la circunferencia inscrita, la cual es tangente a $\overline{AB}$ en P, a $\overline{BC}$ en Q y T en $\overline{AC}$, se ubica H en $\widehat{PQ}$ tal que $\overline{HT} \perp \overline{AC}$, las rectas TP y QH se cortan en S.
Si $m\sphericalangle HTP = 20°$, calcule $m\sphericalangle ABS$.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 35° E) 40°

PROBLEMA Nº 210

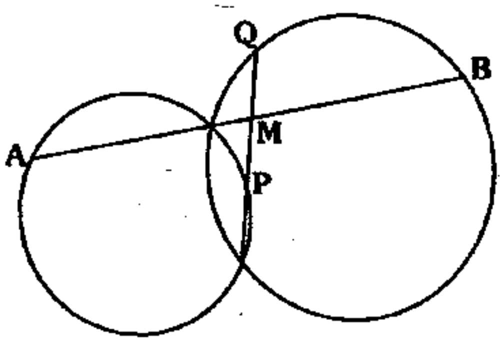
En el triángulo rectángulo donde un ángulo agudo mide 37°. Calcule la medida del menor arco determinado por la mediatriz de la hipotenusa en la circunferencia inscrita en dicho triángulo.

A) 45°   B) 135°   C) 60°

D) 120°   E) 106°

PROBLEMA Nº 211

En el gráfico, AM=MB. Demuestre que PM=MQ.



PROBLEMA Nº 212

Se tiene el triángulo ABC, en el cual se traza la ceviana interior $\overline{BL}$, en cuya prolongación se ubica H, tal que: $m\measuredangle ABH=120°$, $m\measuredangle HBC=15°$, $m\measuredangle BHC=90°$ y $AB=2(BH)$. Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 5°   B) 10°   C) 15°

D) 20°   E) 25°

PROBLEMA Nº 213

Se tienen tres circunferencias tangentes exteriores dos a dos de centros O_1, O_2 y O_3, radios r_1, r_2 y r_3. O es centro de la circunferencia mayor y tangente a las tres circunferencias anteriores. Calcular el valor entero, el radio de la circunferencia de centro O (O es interior al triángulo $O_1O_2O_3$), si $r_1+r_2+r_3=6$.

A) 2   B) 3   C) 4

D) 5   E) 6

PROBLEMA Nº 214

En la semicircunferencia de diámetro ED, se ubican en forma consecutiva A, B, C y D talque A está más cerca a E. $\overline{AD}\cap\overline{EC}=\{P\}$, $\overline{AC}\cap\overline{EB}=\{S\}$ y $\overrightarrow{PS}\cap\overrightarrow{CB}=\{M\}$.

Si $m\overset{\frown}{BC}=m\overset{\frown}{CD}$ y $m\overset{\frown}{ABD}=8(m\measuredangle AMP)$.

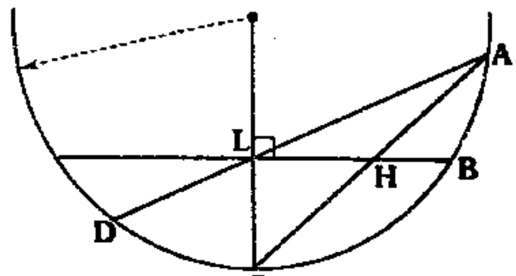
Calcule $m\measuredangle AMP$.

A) 5°   B) 6°   C) 8°

D) 10°   E) 18°

PROBLEMA Nº 215

En el gráfico, LD=10. Calcule el menor valor entero de HC.



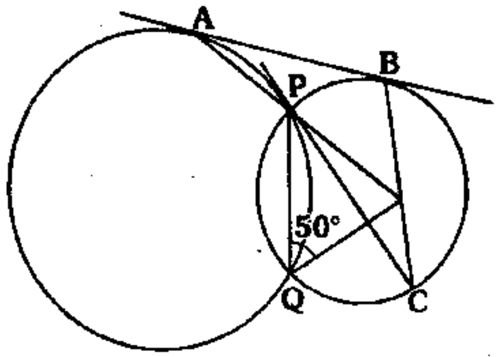
A) 9   B) 10   C) 11

D) 13   E) 15

PROBLEMA Nº 216

A, B y P son puntos de tangencia.

Calcule $m\overset{\frown}{PQC}$.

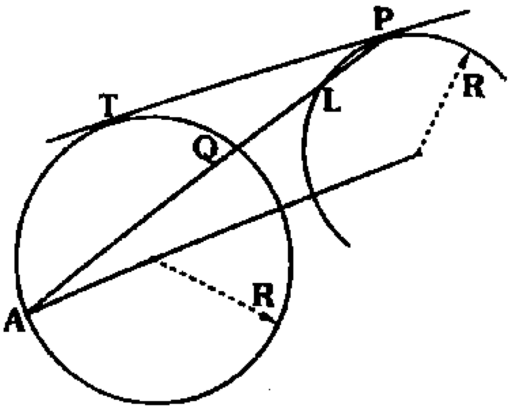


A) 100°   B) 180°   C) 160°

D) 140°   E) 190°

PROBLEMA Nº 217

T y P son puntos de tangencia. Si AQ=PQ, calcule m∢ALT.



A) 30°

B) 15°

C) 18°

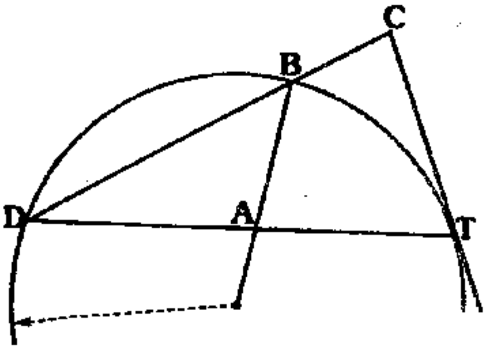
D) 18°30'

E) 27°30'

PROBLEMA Nº 218

En el gráfico, T es punto de tangencia. Si $m\widehat{BT}=60°$ y $6(BC)=5(AB)$.

Calcule $m\widehat{DB}$.

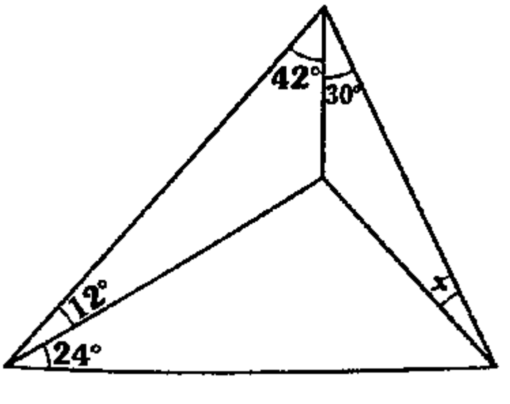


A) 74° B) 53° C) 76°

D) 84° E) 82°

PROBLEMA Nº 219

Calcule "x" en:



A) 12

B) 10°

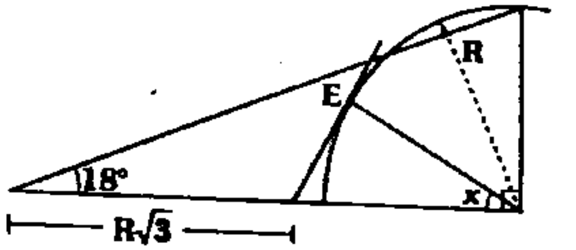
C) 15°

D) 18°

E) 30°

PROBLEMA Nº 220

En el gráfico, E es punto de tangencia. Calcule "x".



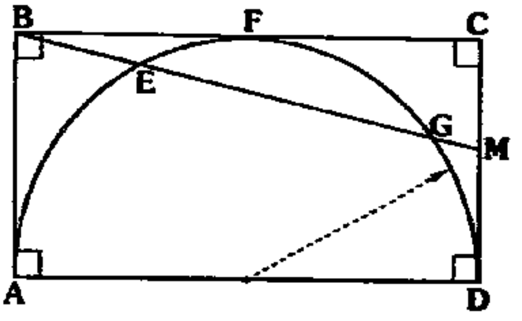
A) 36° B) 18° C) 36°

D) 42° E) 30°

PROBLEMA Nº 221

F es punto de tangencia y $m\widehat{EF}=m\widehat{GD}$.

Calcule $m\widehat{EF}$.



A) 30° B) 45° C) 37°

D) 53° E) 15°

PROBLEMA Nº 222

En el problema anterior, calcule BE/GM.

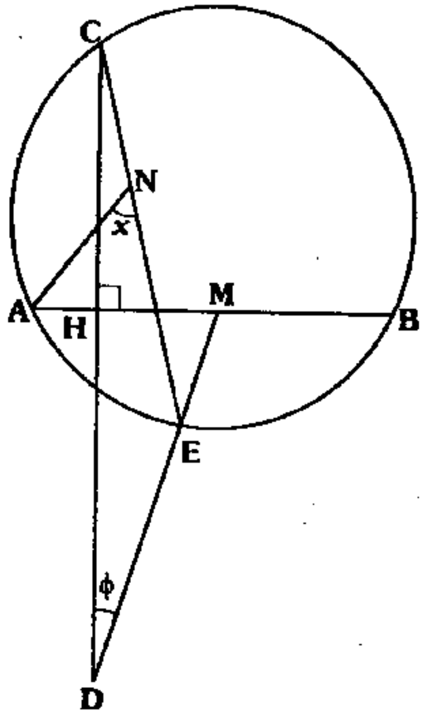
A) $\sqrt{3}-1$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{3}+2$

D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

PROBLEMA Nº 223

Si AM=MB, CN=NE y CH=HD.

Calcule "x", en función de ϕ



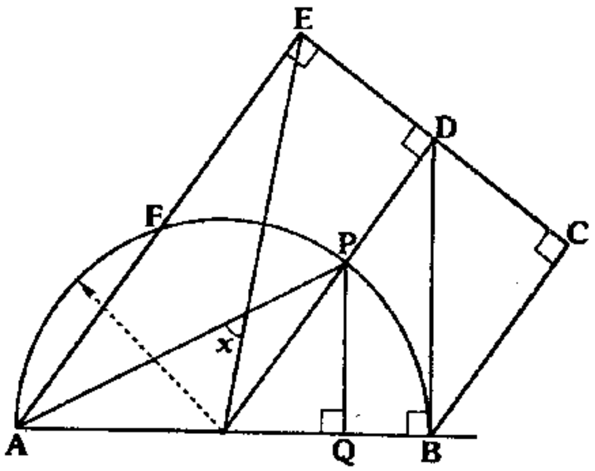
A) ϕ B) 2ϕ C) $90°-\frac{\phi}{2}$

D) $90°-\phi$ E) $90°-2\phi$

PROBLEMA Nº 224

En el gráfico, PQ=EF.

Calcule "x".



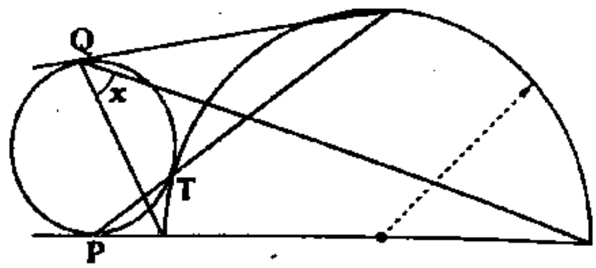
A) 37° B) 53° C) 45°

D) 49° E) 75°

PROBLEMA Nº 225

P, Q y T son puntos de tangencia.

Calcule "x".



A) 30° B) 60° C) 45°

D) 53° E) 37°

PROBLEMA Nº 226

Se tiene el triángulo ABC inscrito en una circunferencia, M y N son puntos medios de los arcos AB y BC respectivamente. Si $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ trisecan a $\overline{MN}$. Calcule m∢ABC.

A) 30° B) 45° C) 60°

D) 79° E) 90°

PROBLEMA Nº 227

Se tiene el triángulo ABC donde se ha trazado la circunferencia inscrita, la cual es tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ en F, D y E respectivamente. Se ubica H∈I en las prolongaciones de $\overline{DF}$ y $\overline{DE}$ respectivamente, tal que DHAI es un paralelogramo, $\overline{AB}\cap\overline{HI}=\{M\}$ y $\overline{AC}\cap\overline{HI}=\{N\}$.

Calcule $\frac{MN}{BC}$

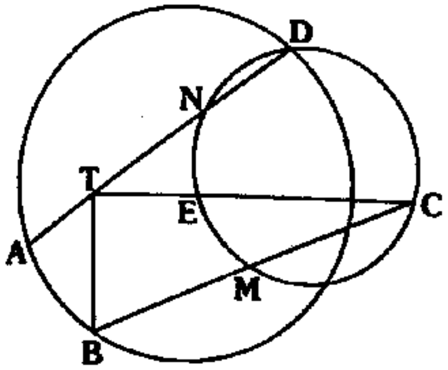
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

PROBLEMA N° 228

En el gráfico, $m\widehat{DNM} = 2(m\measuredangle BTA)$ y $m\widehat{AB} = 24°$.

Calcule $m\widehat{ME}$.

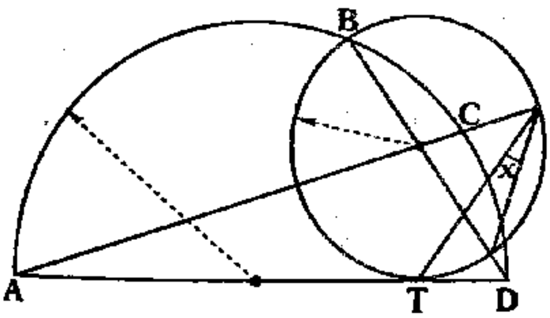


A) 12° B) 24° C) 36°

D) 48° E) 54°

PROBLEMA N° 229

Si $m\widehat{BC} = 36°$ y T es punto de tangencia. Calcule "x".



A) 16° B) 18° C) 20°

D) 22° E) 24°

PROBLEMA N° 230

Se tiene el triángulo ABC inscrito en una circunferencia, P está en $\widehat{BC}$ talque la recta de Simson de P respecto del triángulo corta a la prolongación de $\overline{AB}$ en S.

Si $m\measuredangle ASL = \theta$.

A) θ B) 2θ C) 3θ

D) $90° - \theta$ E) $180° - 2\theta$

PROBLEMA N° 231

Se tiene el cuadrilátero ABCD, H está en $\overline{BD}$ y L en la prolongación de $\overline{AB}$ talque BLCH es un cuadrado. La recta $\overline{LH}$ corta a $\overline{AC}$ en su punto medio M.

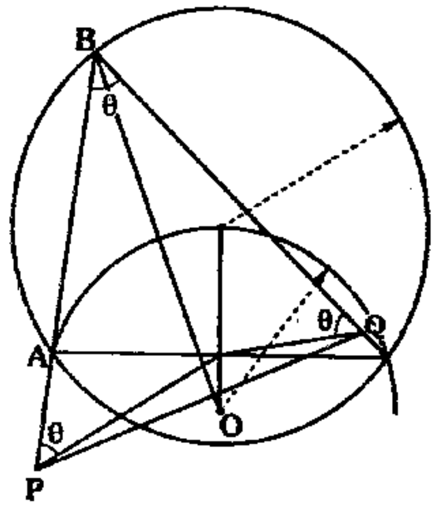
Calcule $m\measuredangle CMD$.

A) 60° B) 45° C) 90°

D) 120° E) 135°

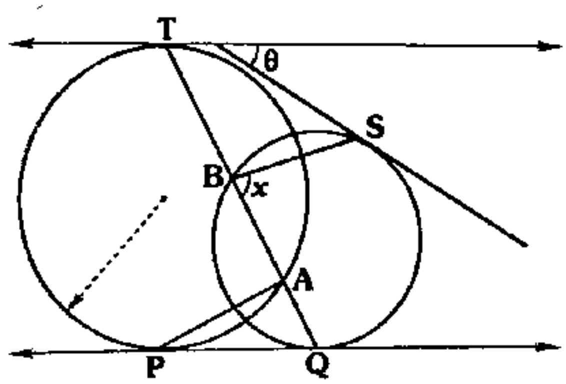
PROBLEMA N° 232

Demostrar que $\overline{PQ} \perp \overline{OB}$.



PROBLEMA N° 233

P, Q, S y T son puntos de tangencia. Si $\overline{PA} // \overline{BS}$, calcule x en función de:



A) θ B) 2θ C) $90° - \dfrac{\phi}{2}$

D) $90° - \dfrac{\phi}{4}$ E) $45° - \theta$

PROBLEMA Nº 234

Se tiene el pentágono convexo ABCDE talque $AE=ED$, $BC=AB+CD$ y $m\sphericalangle BAE+m\sphericalangle CDE=180^\circ$.

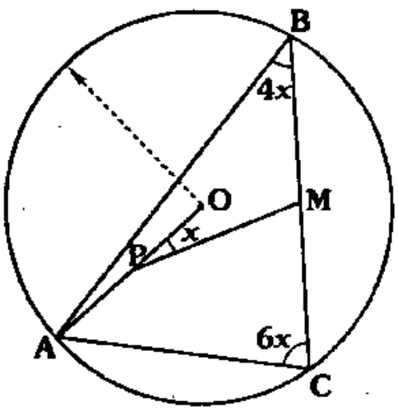
Calcule: $\dfrac{m\sphericalangle AED}{m\sphericalangle BEC}$.

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$

D) 3 E) $\frac{2}{3}$

PROBLEMA Nº 235

En el gráfico, $AP=PO$ y $BM=MC$. Calcule "x".



A) 10°

B) 12°

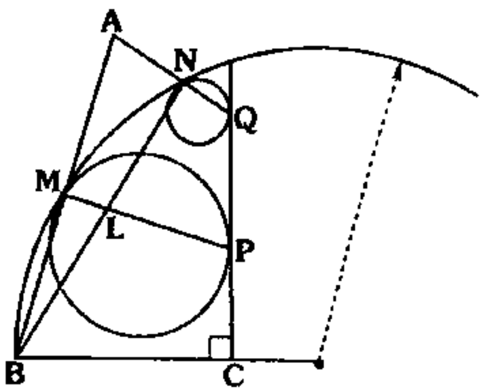
C) 15°

D) 6°

E) 8°

PROBLEMA Nº 236

M, N, P y Q son puntos de tangencia y $m\overset{\frown}{BM}=20^\circ$. Calcule $m\sphericalangle LAM$.



A) 10° B) 20° C) 30°

D) 15° E) 18°

PROBLEMA Nº 237

Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB y en ella se ubica Q, luego con diámetro QB se traza una circunferencia secante AB en L; O es centro de la circunferencia y la recta tangente a la semicircunferencia trazada por Q y es paralela a $\overline{OL}$.

Calcule la medida del ángulo entre la circunferencia y la semicircunferencia.

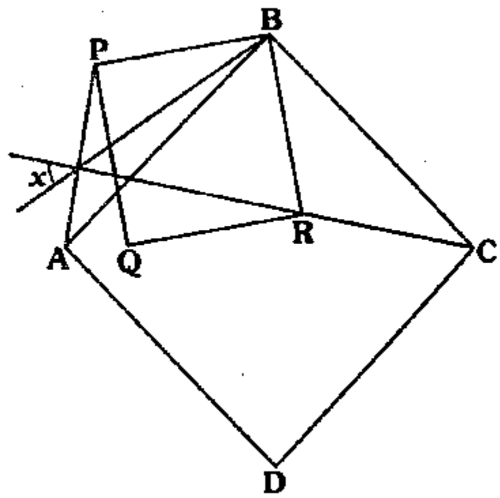
A) 20° B) 18°

C) 37° D) 60°

E) 30°

PROBLEMA Nº 238

ABCD y PBRQ son cuadrados.
Calcule "x".



A) 30° B) 15° C) 45°

D) 75° E) 36°

PROBLEMA Nº 239

ABCD es un cuadrado, T y P son puntos de tangencia, $\overline{AM}//\overline{LN}$ y $BM=NC$.

Calcule "x".

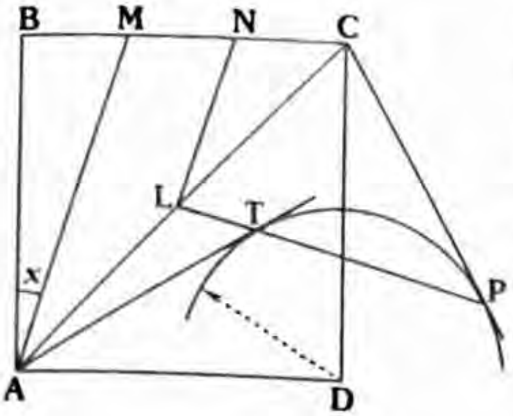
A) 30°

B) 8°

C) 37°

D) 37°/2

E) 53°/2



PROBLEMA Nº 240

P, Q y T son puntos de tangencia.
Calcule "x".

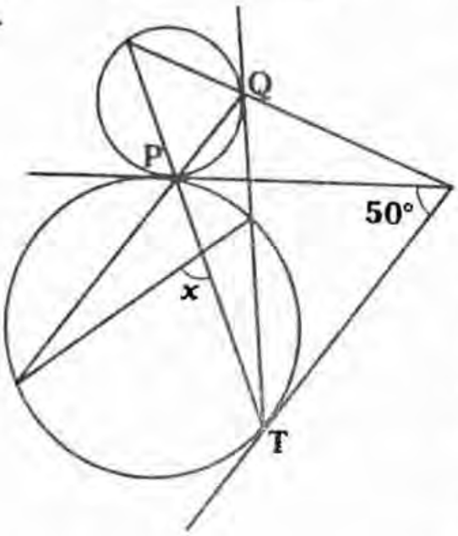
A) 90°

B) 40°

C) 80°

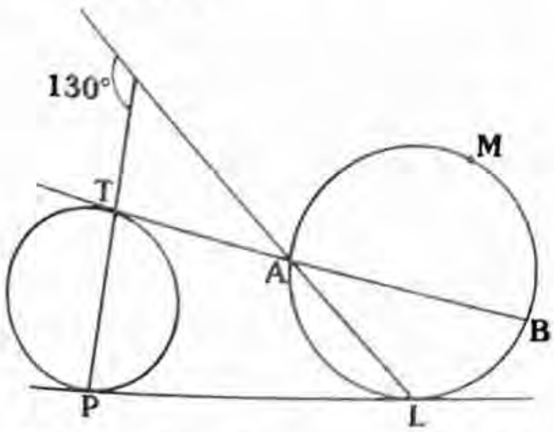
D) 50°

E) 100°



PROBLEMA Nº 241

T, P y L son puntos de tangencia.
Calcule $m\overset{\frown}{AMB}$.

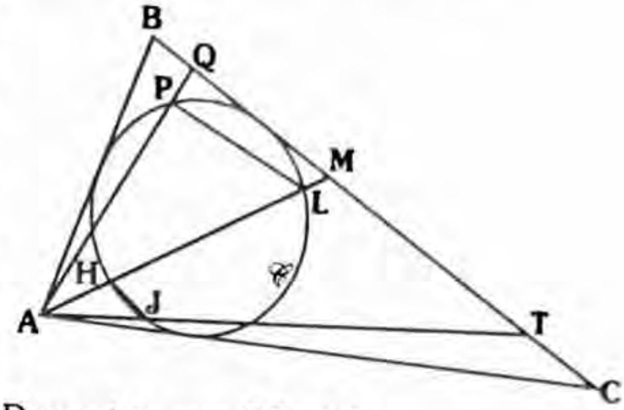


A) 180° B) 182° C) 260°

D) 230° E) 200°

PROBLEMA Nº 242

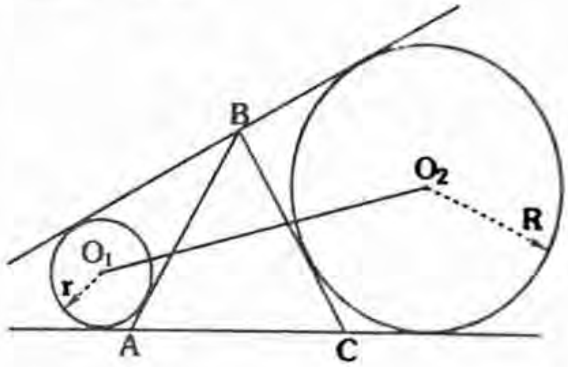
En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita, BM=MC y $\overline{HJ}//\overline{PL}//\overline{BC}$.



Demostrar que BQ=TC.

PROBLEMA Nº 243

Si el triángulo ABC es equilátero.
Calcule O_1O_2.



A) $\dfrac{2}{3}\sqrt{R^2+r^2}$ B) $(R+r)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\sqrt{\dfrac{R^2+r^2+Rr}{2}}$ D) $2\sqrt{R^2+r^2+Rr}$

E) $(R-r)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

PROBLEMA Nº 244

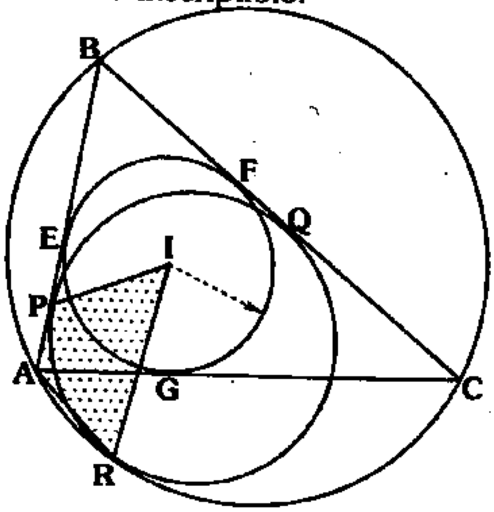
Se tiene el triángulo isósceles ABC(AB=BC), M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. P está en la región exte-

rior relativa a $\overline{AB}$, si B es punto medio de $\overline{PQ}$, $\overline{PB} \perp \overline{BA}$ y $\overline{CM} \perp \overline{AP}$.

Demostrar que $m\measuredangle ANP = 90°$.

PROBLEMA Nº 245

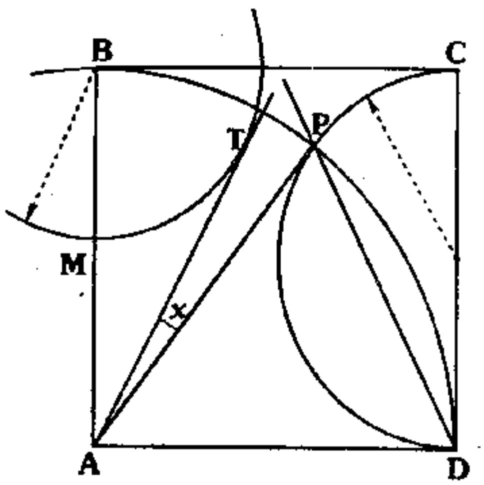
En el gráfico, E, F, G, P, Q y R son puntos de tangencia. Demostrar que el cuadrilátero APIR es inscriptible.



PROBLEMA Nº 246

ABCD es un cuadrado AM=MB y T es punto de tangencia.

Calcule "x".



A) 8°

B) 7°

C) 6°

D) 14°

E) 17°

PROBLEMA Nº 247

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, donde: $m\measuredangle BAC = 10°$, $m\measuredangle CAD = 70°$, $m\measuredangle ADB = 60°$ y $m\measuredangle BDC = 20°$.

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 35° B) 25° C) 20°

D) 30° E) 10°

PROBLEMA Nº 248

Se tiene el triángulo ABC (AB ≠ BC), se traza la bisectriz interior BD, Q y P son las proyecciones ortogonales de A y C sobre $\overline{BD}$. L es la proyección ortogonal de D sobre $\overline{BC}$.

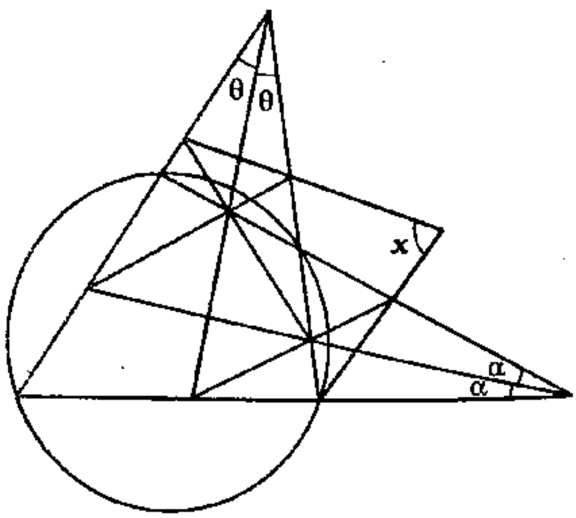
Calcule $\dfrac{m\measuredangle QLD}{m\measuredangle DLP}$.

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2

D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

PROBLEMA Nº 249

Del gráfico, calcule "x".



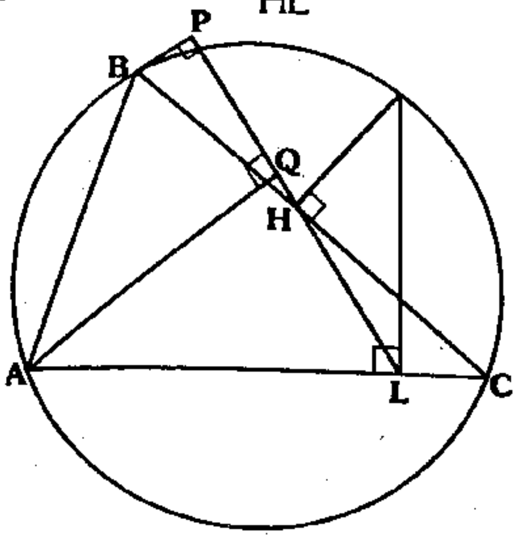
A) 60° B) 45°

C) 90° D) 75°

E) 135°

PROBLEMA Nº 250

Del gráfico, calcule. $\dfrac{PQ}{HL}$



A) F.D. B) 2 C) 1

D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 251

Sea el cuadrilátero convexo ABCD, se ubica E y F en $\overline{BC}$ (en el orden B, E, F y F), si $m\measuredangle BAE = m\measuredangle CDF$ y $m\measuredangle EAF = m\measuredangle FDE$. Si $m\measuredangle FAC = 40°$, calcule $m\measuredangle EDB$.

A) 50° B) 20° C) 40°

D) 80° E) 60°

PROBLEMA Nº 252

Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos circunferencias que se tocan en A y B, sea $\overleftrightarrow{PQ}$ una recta que pasa por A tal que P está en $\mathscr{C}_1$ y Q en $\mathscr{C}_2$. Halle el lugar geométrico del punto medio de $\overline{PQ}$ al variar esta recta.

A) Una recta

B) Un segmento

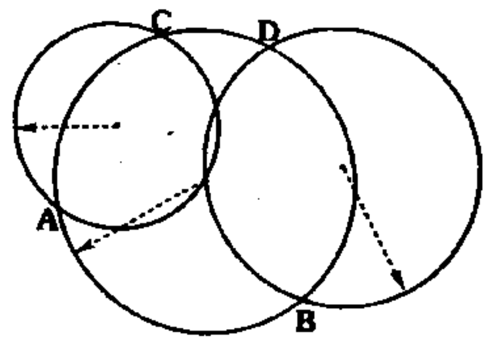
C) Una circunferencia

D) Solo puntos de una circunferencia

E) Una elipse

PROBLEMA Nº 253

En el gráfico, $m\overset{\frown}{AB} = 80°$ y $m\overset{\frown}{CD} = 20°$. Calcule la medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.



A) 50° B) 30° C) 40°

D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 254

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, las diagonales se cortan en M.

Si $m\measuredangle DCA = m\measuredangle ACB = x$; $m\measuredangle DAC = 2x$; $m\measuredangle ABD = 3x$ y $m\measuredangle DBC = 4x$.

Calcule "x".

A) 18° B) 15° C) 12°

D) 10° E) 20°

PROBLEMA Nº 255

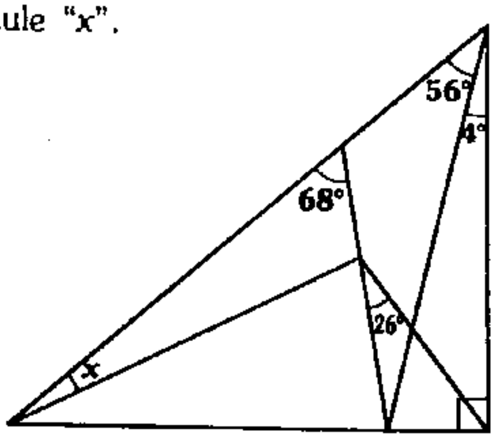
En el rectángulo ABCD, se ubica el punto medio M de $\overline{AB}$, con centro en B y radio BM se traza el cuadrante MBN $\left(N \in \overline{BC}\right)$ y una semicircunferencia de diámetro $\overline{CD}$, si $3(AB) = 2(BC)$. Calcule la medida del ángulo formado por las tangentes trazadas desde A a dichos arcos.

A) 23° B) 22°3' C) 26°3'

D) 30° E) 31°

PROBLEMA Nº 256

Calcule "x".

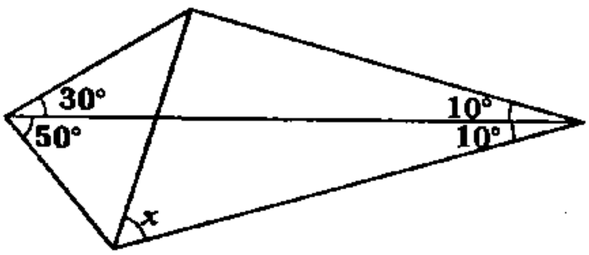


A) 15° B) 18° C) 22°

D) 25° E) 24°

PROBLEMA Nº 257

Calcule "x".

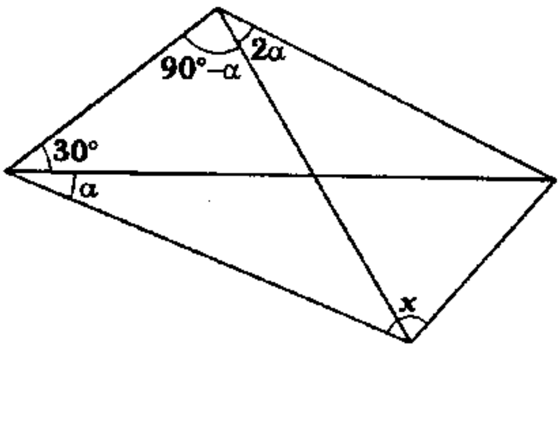


A) 30° B) 45° C) 49°

D) 55° E) 60°

PROBLEMA Nº 258

Calcule "x".

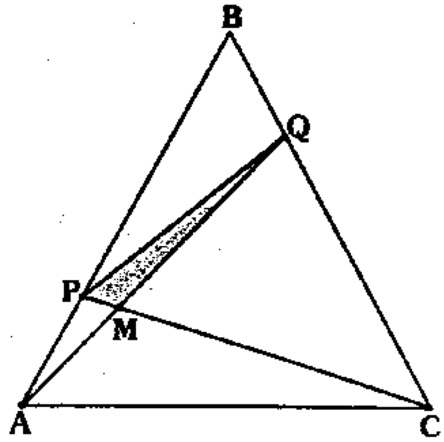


A) 135° B) 120° C) 116°

D) 106° E) 127°

PROBLEMA Nº 259

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero tal que AP=BQ. Si $AB = \ell$, calcule la distancia del circuncentro del ΔMPQ hacia $\overline{AC}$.



A) $\dfrac{\ell}{2}$ B) $\dfrac{\ell}{2}\sqrt{3}$

C) $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{3}$ D) $\dfrac{2\ell}{3}$

E) $\dfrac{2\ell}{3}\sqrt{3}$

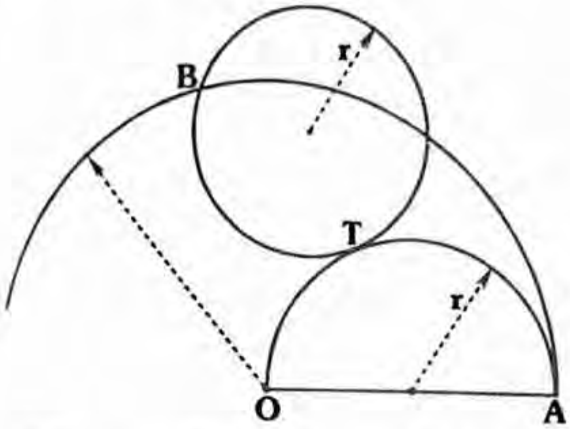
PROBLEMA Nº 260

Se tiene el cuadrilátero ABCD inscrito en la circunferencia $\mathscr{C}$. Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_A}$ la recta de Simson de A respecto del triángulo BCD, análogamente se definen $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_B}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_C}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_D}$. Demostrar que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_A}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_B}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_C}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_D}$ concurren.

Problemas Propuestos
Ciclo Repaso

Problema Nº 261

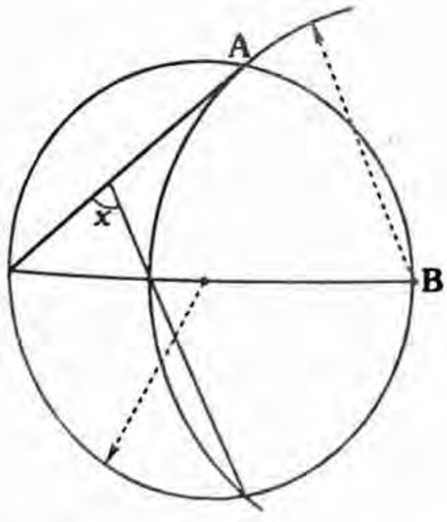
En el gráfico, T es punto de tangencia si $m\overset{\frown}{OT}=40°$. Calcule $m\overset{\frown}{TB}$.



A) 100°   B) 140°   C) 160°
D) 80°   E) 120°

Problema Nº 262

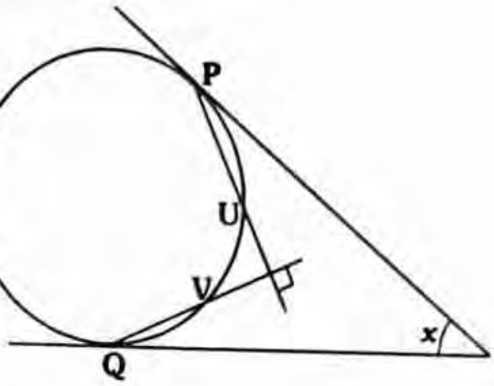
Si $m\overset{\frown}{AB}=\alpha$, calcule "$x$".



A) $135°-\dfrac{3\alpha}{4}$ B) 2α C) $90°-\alpha$
D) $180°-\alpha$ E) $180°-2\alpha$

Problema Nº 263

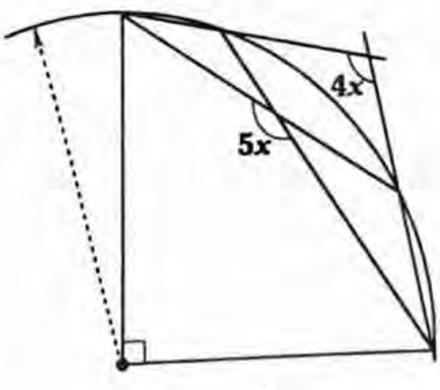
P y Q son puntos de tangencia, si $m\overset{\frown}{UV}=30°$. Calcule "$x$".



A) 30°   B) 45°
C) 60°   D) 67,5°
E) 75°

Problema Nº 264

Calcule "x", en:



A) 20°   B) 8°   C) 10°
D) 25°   E) 30°

PROBLEMA Nº 265

T y R son puntos de tangencia, si PQ=6, calcule r.

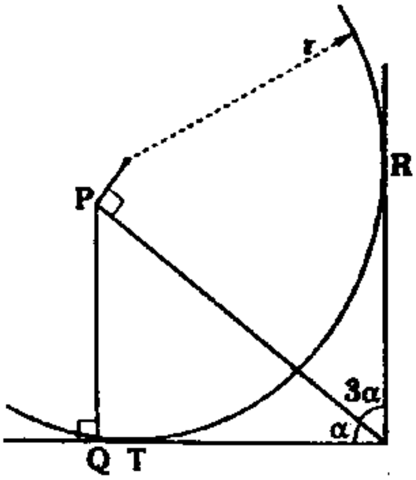
A) 3

B) $3\sqrt{2}$

C) 6

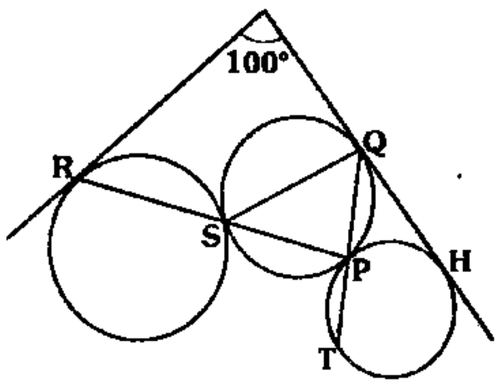
D) $6\sqrt{2}$

E) 12



PROBLEMA Nº 266

H, P, Q, R y S son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{PT}$.



A) 50° B) 90° C) 100°

D) 80° E) 55°

PROBLEMA Nº 267

T es punto de tangencia, ABCD es un cuadrado. Si BT=2 y TC=1. Calcule "x"

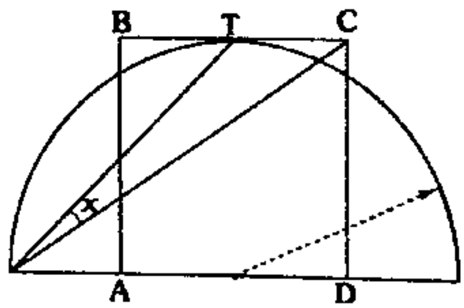
A) 8°

B) 10°

C) 15°

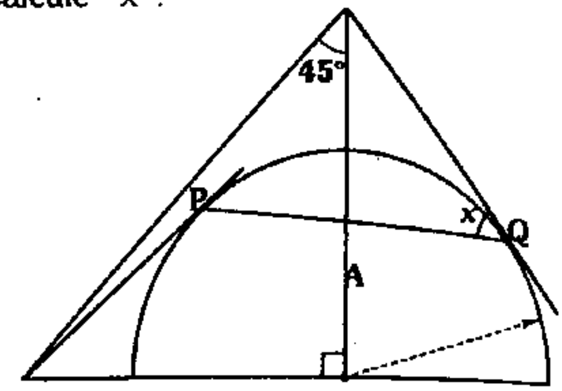
D) 37°/2

E) 53°/2



RESOLUCIÓN Nº 268

Si P y Q son puntos de tangencia. Calcule "x".



A) 30° B) 60° C) 45°

D) 35° E) 50°

PROBLEMA Nº 269

Si AB=2(BC). Calcule "x".

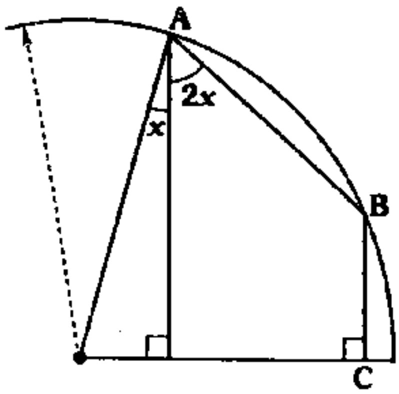
A) 22°30'

B) 15°

C) 20°

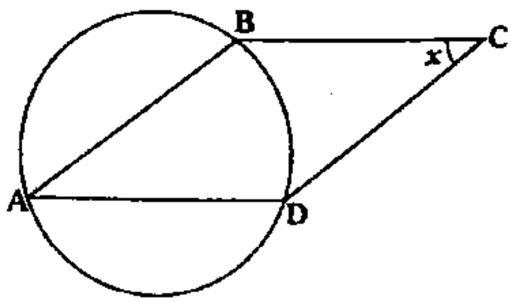
D) 53°/2

E) 37°/2



PROBLEMA Nº 270

Si ABCD es un rombo; $m\widehat{AD}=134°$. Calcule "x".

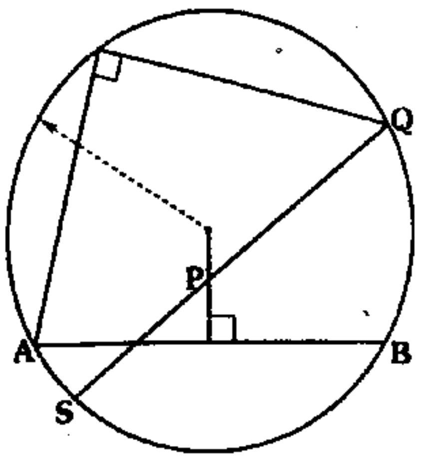


A) 67° B) 48° C) 38°

D) 46° E) 52°

PROBLEMA Nº 271

Si $AB=1{,}2(PQ)$. Calcule $m\widehat{BS}$.

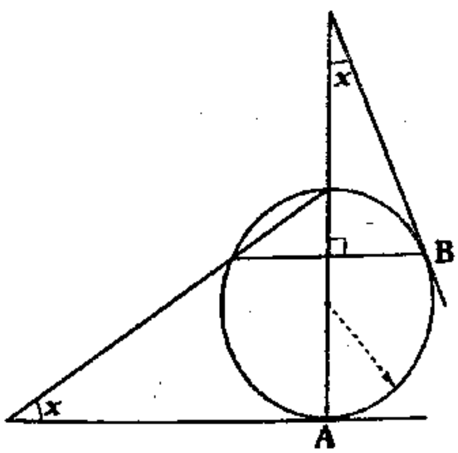


A) 30° B) 60° C) 53°

D) 74° E) 37°

PROBLEMA Nº 272

Si A y B son puntos de tangencia.
Calcule "x".



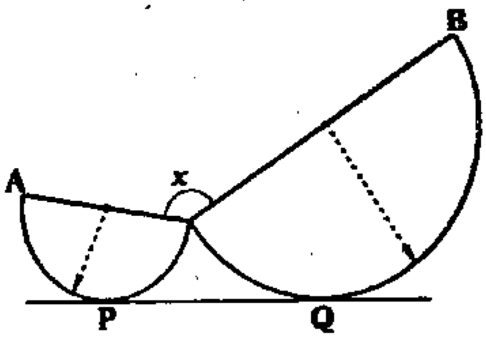
A) 53°/2 B) 37°/2 C) 37°

D) 15° E) 30°

PROBLEMA Nº 273

Si P y Q son puntos de tangencia y $m\widehat{AP}+m\widehat{BQ}=250°$:

Calcule "x".



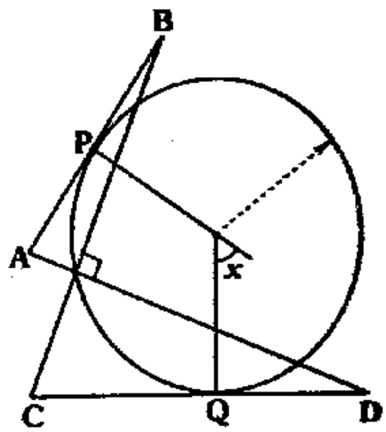
A) 65° B) 125°

C) 110° D) 62°

E) 120°

PROBLEMA Nº 274

Si P y Q son puntos de tangencia AP=PB; CQ=QD.
Calcule "x".



A) 30° B) 45°

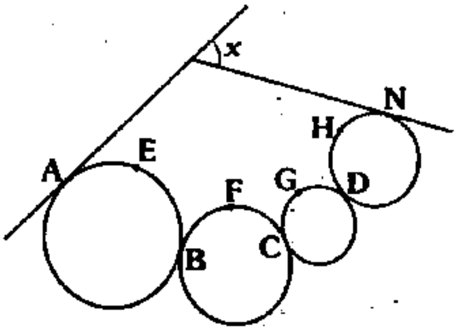
C) 75° D) 60°

E) 53°

PROBLEMA Nº 275

Calcule "x" en el gráfico, si :

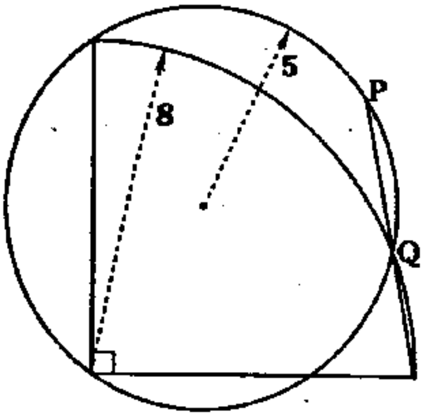
$$m\widehat{AEB}+m\widehat{BFC}+m\widehat{CGD}+mDHN=570°$$



A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 276

Del gráfico, calcule $m\widehat{PQ}$.



A) 37° B) 74° C) 53°
D) 45° E) 58°

PROBLEMA Nº 277

En un triángulo rectángulo se traza una circunferencia que pasa por los tres puntos medios de sus lados. Calcular la medida del arco exterior a la hipotenusa si los arcos exteriores a los catetos miden 80° y 100° respectivamente.

A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 40°

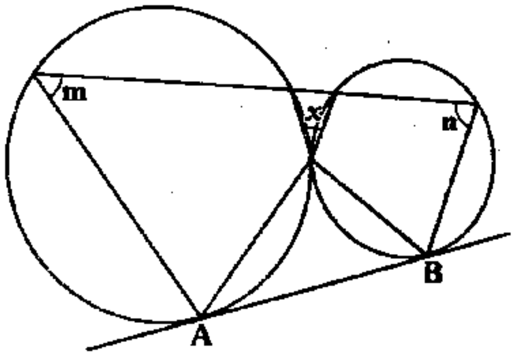
PROBLEMA Nº 278

Dos circunferencias tangentes exteriores en el punto C, son tangentes interiores a una tercera circunferencia en los puntos A y B. Calcular: $m\widehat{AB}$; si $m\widehat{AC}+m\widehat{BC}=260°$. (A y B pertenecen a la circunferencia mayor).

A) 60° B) 80° C) 90°
D) 70° E) 100°

PROBLEMA Nº 279

Si. $m+n=140°$, calcule "x". A y B: son puntos de tangencia.



A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA Nº 280

En un triángulo ABC, recto en "B", se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, por D se levanta una perpendicular a $\overline{AC}$, que intersecta a $\overline{BC}$ en P y a la prolongación de $\overline{AB}$ en Q. Calcular: AC, si PQ=5m, PD=6m.

A) 13m B) 14m C) 15m
D) 16m E) 17m

PROBLEMA Nº 281

Se tiene un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{CD}$ y la ceviana $\overline{BE}$ intersectándos en P. Calcular: mDACB, si: el cuadrilátero ADPE es inscriptible y AD=DE, $m\measuredangle ABE = 20^\circ$.

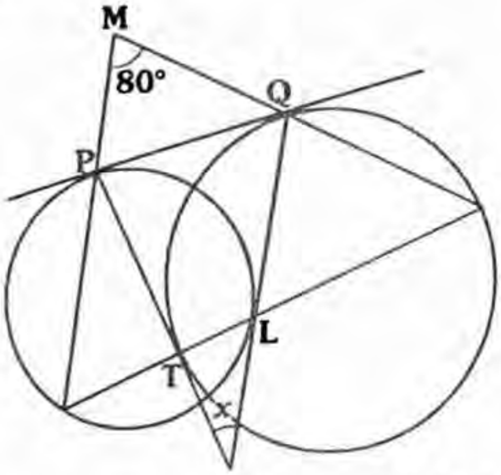
A) 20° B) 30° C) 40°

D) 50° E) 60°

PROBLEMA Nº 282

En el gráfico, P y Q y L son puntos de tangencia.

Calcule "x".

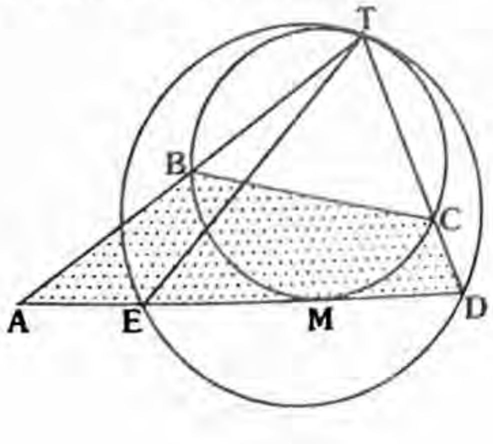


A) 5° B) 10° C) 15°

D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº 283

M es punto de tangencia, si ET=TD. ¿Qué tipo de cuadrilátero es ABCD?



A) Trapecio

B) Trapezoide de simétrico

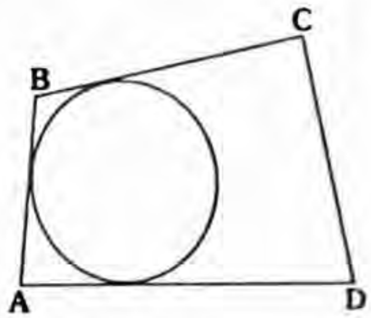
C) Inscriptible

D) Circunscriptible

E) Bicéntrico

PROBLEMA Nº 284

En el gráfico, se muestra una circunferencia tangente a los lados CB, BA y AD Indique la relación correcta.



A) $AB + CD = BC + AD$

B) $AB + CD < BC + AD$

C) $AB + CD > BC + AD$

D) $AB + CD < BD + AC$

E) No existe ninguna relación entre $AB + CD$ y $BC + AD$.

PROBLEMA Nº 285

P es un punto interior del triángulo isósceles ABC(AB=BC) talque:

$m\measuredangle PAC = m\measuredangle PCB = m\measuredangle PBA$ y

$m\measuredangle ABC = 37^\circ$

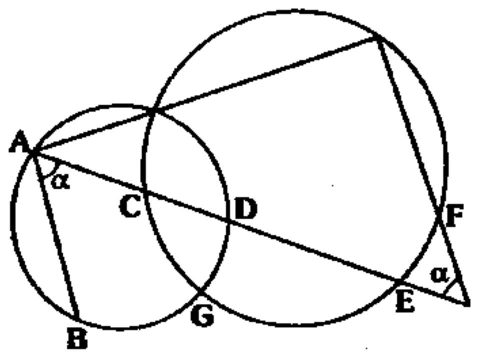
Calcule $m\measuredangle PCA$.

A) 18° B) 26°30' C) 22°30'

D) 45° E) 37°

PROBLEMA Nº 286

En el gráfico, $m\widehat{CG}+m\widehat{GD}+m\widehat{EF}=120^\circ$. Calcule $m\widehat{AB}$.



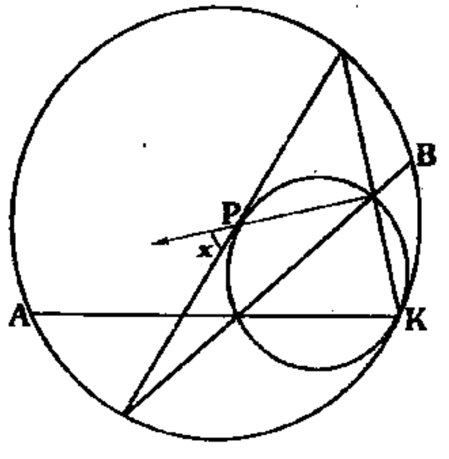
A) 100°   B) 80°

C) 140°   D) 60°

E) 120°

PROBLEMA Nº 287

Calcule "x", si: $m\widehat{AB}=130^\circ$, siendo "P" y "K" puntos de tangencia.



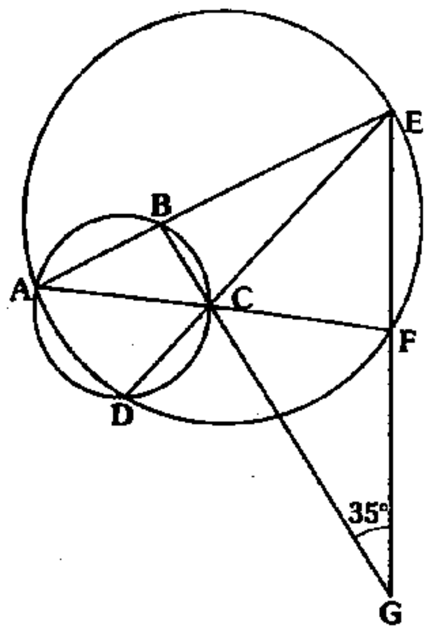
A) 50°   B) 32°30'

C) 80°   D) 22°30'

E) 65°

PROBLEMA Nº 288

Según la figura, $m\measuredangle BGE=35^\circ$, calcule $m\widehat{BC}$.

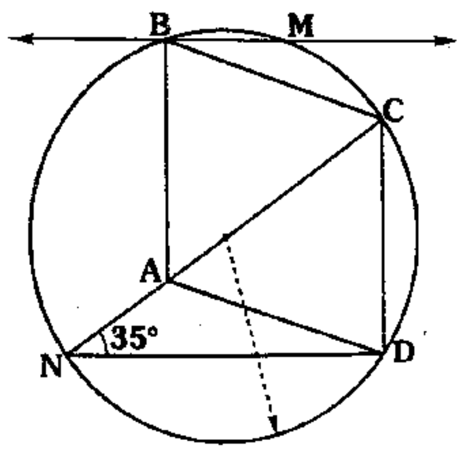


A) 35°   B) 70°   C) 80°

D) 55°   E) 140°

PROBLEMA Nº 289

Calcule $m\widehat{MC}$, si: $\overleftrightarrow{BM}//\overline{ND}$ y ABCD es un paralelogramo.



A) 40°   B) 20°   C) 80°

D) 35°   E) 70°

PROBLEMA Nº 290

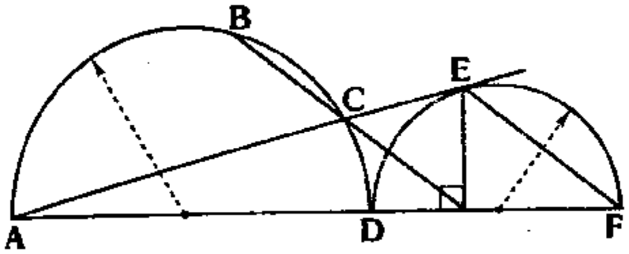
Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, en el cual se ubican los puntos M y P, ("P"$\in \widehat{MB}$) y $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$, luego se ubica el punto "Q" en $\overline{AB}$, tal que: $3AQ=5QB$. Calcule $m\measuredangle PQB$, si $m\measuredangle QMB = m\measuredangle BMP$.

A) 76° B) 31° C) 62°

D) 45° E) 14°

PROBLEMA Nº 291

Según el gráfico, calcule $m\measuredangle EFD$, si $m\widehat{BCD} = \alpha$. (D es punto de tangencia).

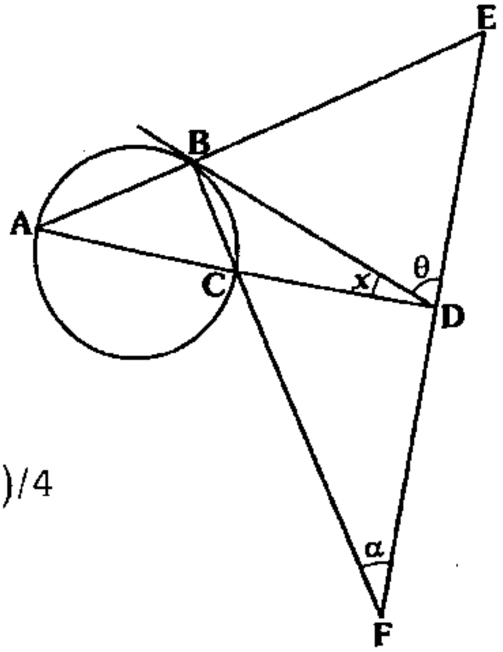


A) $\alpha/4$ B) $\alpha/2$ C) α

D) $3\alpha/2$ E) 2α

PROBLEMA Nº 292

Halle "x", si BE=ED, B punto de tangencia.



A) α

B) θ

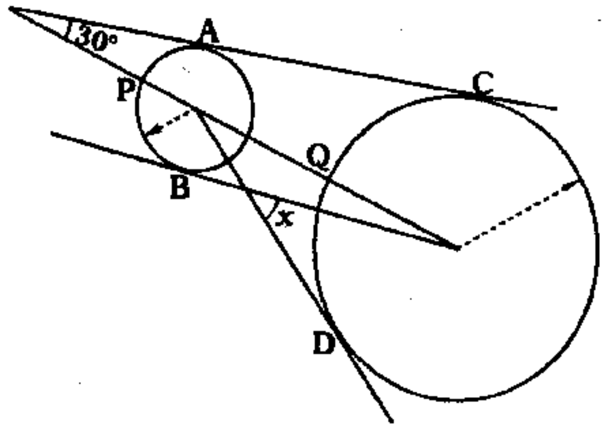
C) $\alpha/2$

D) $\theta/2$

E) $(\alpha+\theta)/4$

PROBLEMA Nº 293

En la figura mostrada. Calcule "x", si $\widehat{APB} = 160°$, $\widehat{CQD} = 130°$.



A) 20° B) 30° C) 25°

D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 294

En el cuadrilátero convexo ABCD, AC=CD, $m\measuredangle ABD = 20°$ y $m\measuredangle DBC = 80°$.

Calcule $m\measuredangle ACD$.

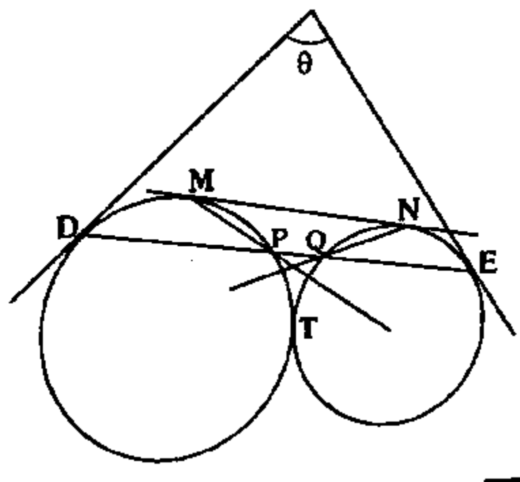
A) 15° B) 18° C) 20°

D) 25° E) 40°

PROBLEMA Nº 295

M, N y T son puntos de tangencia.

Calcule la medida del mayor ángulo entre $\overleftrightarrow{MP}$ y $\overleftrightarrow{NQ}$.



A) 2θ B) $180° - \theta$

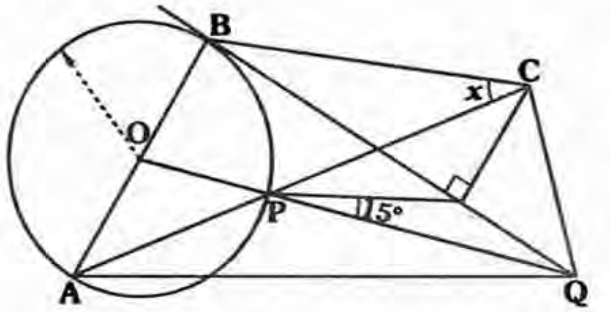
C) $90° + \theta$ D) $90° + \frac{\theta}{2}$

E) $\frac{3\theta}{2}$

PROBLEMA Nº 296

En la figura mostrada, B es punto de tangencia, si $\overline{BP} // \overline{CQ}$ y $m\widehat{AP} = 110°$.

Calcule "x".

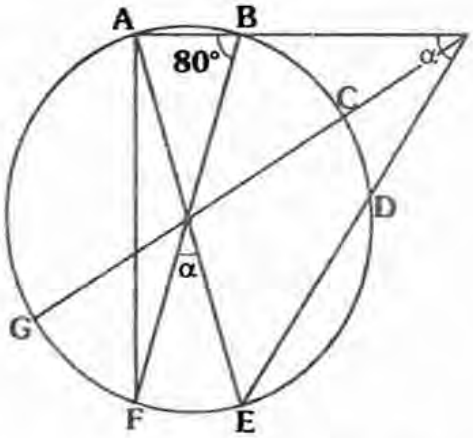


A) 20° B) 25° C) 35°

D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 297

Calcule $m\widehat{GF}$, si $m\widehat{ABC} = 120°$



A) 20° B) 35° C) 70°

D) 60° E) 40°

PROBLEMA Nº 298

Según el gráfico calcule "x", si: $m\widehat{PBR} = 160°$ y A, B son puntos de tangencia.

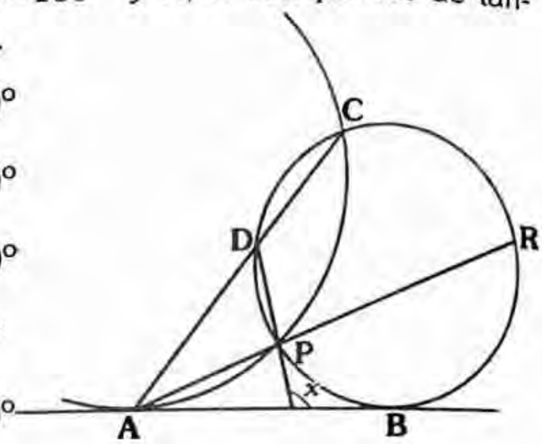
A) 160°

B) 120°

C) 100°

D) 80°

E) 130°



PROBLEMA Nº 299

En la figura calcule "x", si $m\widehat{AF} = m\widehat{EO}$ y $m\widehat{CDE} = 80°$.

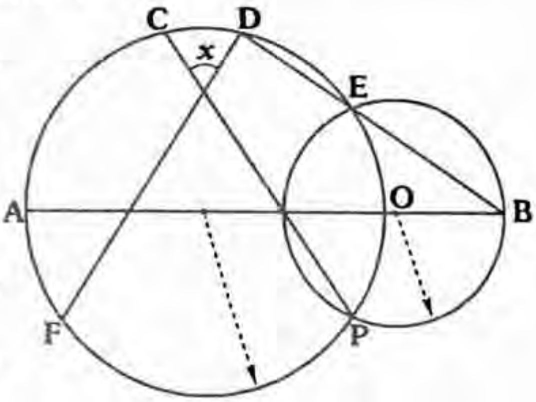
A) 160°

B) 80°

C) 100°

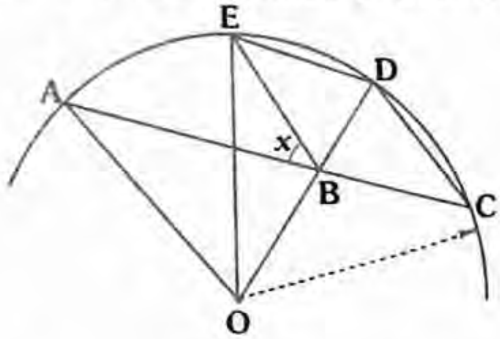
D) 160°

E) 130°



PROBLEMA Nº 300

Calcule "x", BCDE: rombo y $\overline{OA} // \overline{BE}$



A) 72° B) 36° C) 60°

D) 30° E) 45°

CLAVES DE RESPUESTAS

ANUAL

1. A	13. A	25. C	37. B	49. A	61. A	73. D
2. B	14. A	26. D	38. C	50. C	62. C	74. C
3. B	15. E	27. E	39. E	51. E	63. C	75. E
4. C	16. C	28. E	40. A	52. B	64. C	76. B
5. D	17. A	29. C	41. A	53. A	65. B	77. E
6. E	18. B	30. C	42. B	54. C	66. A	78. B
7. B	19. C	31. A	43. B	55. B	67. C	79. A
8. B	20. B	32. B	44. C	56. D	68. B	80. A
9. C	21. D	33. D	45. C	57. D	69. D	
10. B	22. A	34. E	46. D	58. A	70. A	
11. C	23. *	35. E	47. C	59. C	71. C	
12. E	24. C	36. B	48. C	60. C	72. C	

CEPRE-UNI

81. A	89. A	97. E	105.	113. B	121. B	129. D
82. D	90. *	98. A	106. B	114. E	122. D	130. D
83. C	91. A	99. A	107. B	115. B	123. C	
84. A	92. D	100. E	108. A	116. D	124. E	
85 A	93. A	101. B	109. D	117. B	125. B	
86. C	94. D	102. C	110. C	118. B	126. E	
87 A	95. E	103. C	111. C	119. C	127. D	
88. C	96. A	104. *	112. B	120. B	128. D	

(*) Problemas demostrativos

SEMESTRAL

131. E	141. E	151. E	161. B	171. B	181. B	191. B
132. B	142. C	152. D	162. E	172. C	182. *	192. D
133. B	143. D	153. A	163. C	173. D	183. A	193. C
134. E	144. B	154.	164. A	174. A	184. C	194. C
135. C	145. D	155.	165. B	175. D	185. D	195. C
136. E	146. B	156. E	166. C	176. D	186. E	196. A
137. C	147. D	157. D	167. E	177. E	187. C	197. D
138. A	148. C	158. A	168. E	178. D	188. D	198. B
139. D	149. D	159. C	169. E	179. D	189. B	199. A
140. A	150. C	160. D	170. C	180. E	190. B	200. B

SEMESTRAL INTENSIVO

201. A	210. *	219. *	228. B	237. E	246. B	255. A
202. B	211. *	220. C	229. B	238. C	247. C	256. D
203. B	212. C	221. A	230. *	239. D	248. A	257. E
204. B	213. D	222. C	231. B	240. C	249. C	258. B
205. A	214. E	223. C	232. *	241. E	250. C	259. C
206. D	215. C	224. D	233. *	242. *	251. C	260. *
207. B	216. C	225. C	234. B	243. D	252. C	
208. C	217. D	226. C	235. B	244. *	253. B	
209. E	218. A	227. B	236. A	245. *	254. A	

REPASO

261. B	267. A	273. C	279. C	285. D	291. B	297. E
262. D	268. C	274. D	280. E	286. E	292. A	298. C
263. A	269. A	275. C	281. C	287. B	293. B	299. B
264. E	270. D	276. E	282. D	288. B	294. C	300. A
265. E	271. D	277. A	283. C	289. A	295. D	
266. C	272. E	278. B	284. B	290. A	296. C	

(*) Problemas demostrativos

Bibliografía

- **Radmila Bujajick, José Gomez Ortega** — Geometría / Cuaderno de Olimpiadas Matemáticas. Instituto de Matemática UNAM - 2004

- **Jaime Escobar Acosta** — Elementos de Geometría - 1990

- **Pogorelov, J** — Geometría Elemental. Editorial MIR - 1974

- **Apuntes de Patricia Jimenez Gallego - UAZ**

- **Apuntes de Diego Bravo Estrada - PUCP**

- **Material Bibliográfico de Diferentes Instituciones Educativas**

- **Cepre - Uni** — Recopilación de Seminarios, Prácticas calificadas y Exámenes parciales.

- **Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas**

- **www.perugeometrico.blogspot.com**